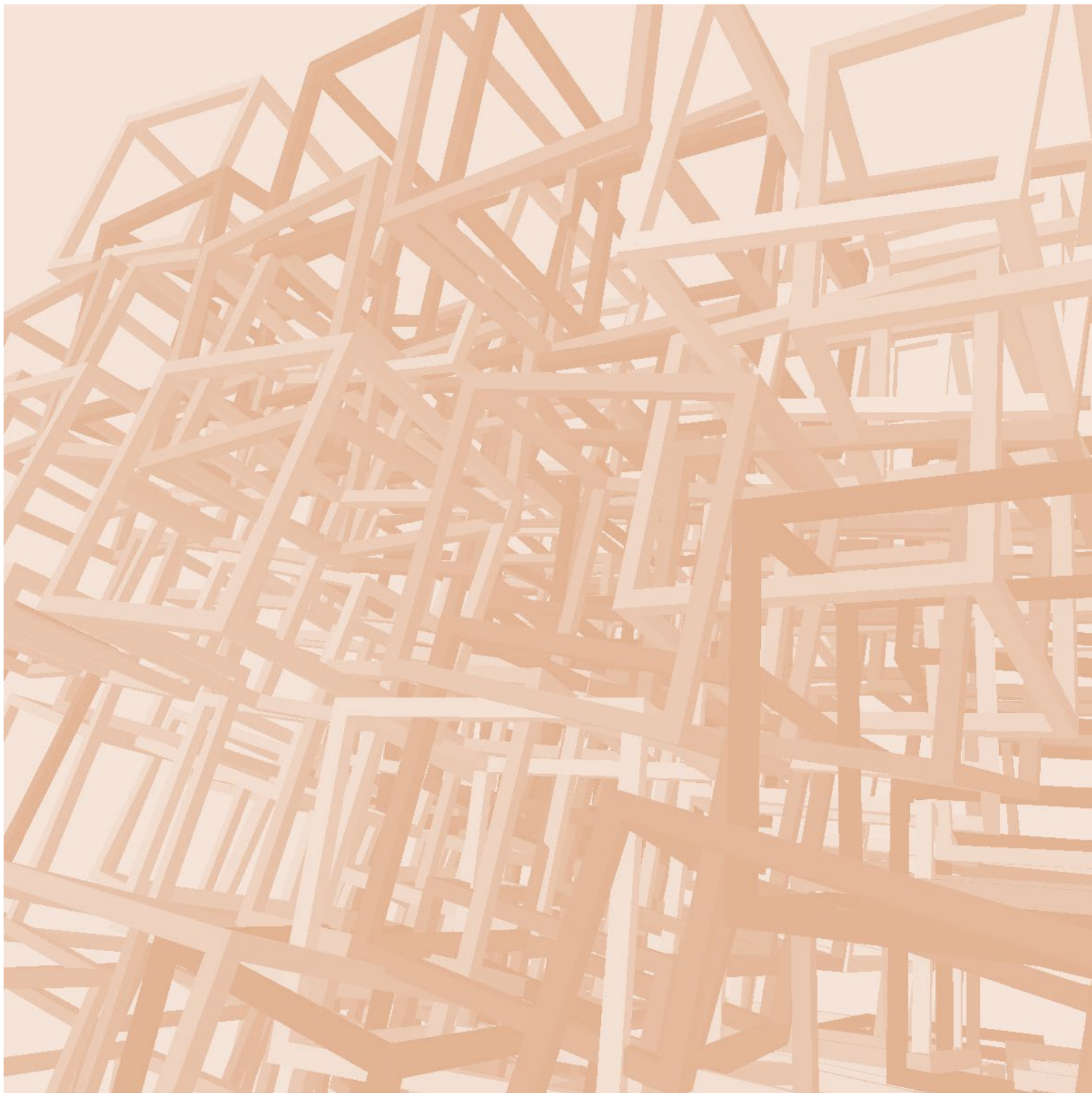


第 19 回 コロキウム

19th Colloquium Analysis and Generation of Structural Shapes and Systems 2024

構造形態の解析と創生 2024



開催日: 2024 年 11 月 7 日, 11 月 8 日

主催 日本建築学会

構造委員会 シェル・空間構造運営委員会 構造形態創生小委員会

構造委員会 応用力学運営委員会 構造最適化と統合設計小委員会(協力)

後援 建築情報学会

ご案内

本書の著作権・出版権は（一社）日本建築学会にあります。本書より著書・論文等への引用・転載にあたっては必ず本会の許諾を得て下さい。

コピーも私的利用の範囲を超えることは法律で禁じられております。

一般社団法人 日本建築学会

趣 旨 説 明

近年の建築の設計プロセスにおける 3D-CAD や BIM の利用は、意匠、構造、設備、施工の連携を強め、また、これまで不可能であった複雑な形態の建造物の建設も可能にしました。また、デジタル・ファブリケーションの技術が普及し、建築のデザインに大きな変化を与えつつあります。実現可能な建築表現の自由度が急速に増すなかで、建築物の形態をどのように決定すべきかという問題について、今後更に深く考えていく必要があります。

本コロキウムは 2006 年度から毎年開催しており、今年で 19 回目を迎えます。これまでに、構造形態創生、構造最適化、アルゴリズムック・デザインといった建築建造物の形態を創り出すための理論・技術に関する研究や、実際のデザインへの応用事例などが数多く紹介され、活発な議論が展開されてきました。これらの理論・技術は一過性のものではなく、本質的なニーズの上に成り立った重要な建設技術であり、新しいコンセプトや最新のアルゴリズムなどを取り入れながら、議論を重ねて今後も発展させていく必要があります。

本年度開催する「第 19 回 コロキウム構造形態の解析と創生 2024」では、これまでと同様に形態創生の理論・技術に関わる研究者、技術者が一堂に会して最新の情報を交換すると同時に、理論・技術だけでなく、それらを具体的な建築物、プロジェクトなどに応用した事例紹介についても議論することで、これらの研究・技術分野が益々発展することを期待して開催されます。

2024 年 11 月

主催 日本建築学会

シェル・空間構造運営委員会 構造形態創生小委員会

応用力学運営委員会 構造最適化と統合設計小委員会（協力）

後援 建築情報学会

■構造委員会

委員長:五十田 博(京都大学)

幹事:楠 浩一(東京大学), 永野 正行(東京理科大学), 山田 哲(東京工業大学)

○シェル・空間構造運営委員会

主査:山下 哲郎(工学院大学)

幹事:張 景耀(京都大学), 宮里 直也(日本大学), 山本 憲司(東海大学)

・構造形態創生小委員会

主査:横須賀 洋平(鹿児島大学)

幹事:永井 拓生(滋賀県立大学),

委員:ガン ブンタラ(日本大学),

舘 知宏(東京大学),

永田 洸大(大建設計),

浜田 英明(法政大学),

三木 優彰(東京大学),

和多田 遼(大阪産業大学)

藤田 慎之輔(近畿大学)

熊谷 知彦(明治大学),

陳 沛山(九州工業大学),

野村 圭介(東海大学),

松尾 智恵(明星大学),

山本 憲司(東海大学),

○応用力学運営委員会

主査:山川 誠(東京理科大学)

幹事:朝川 剛(東京電機大学), 高田 豊文(滋賀県立大学), 向井 洋一(神戸大学)

・構造最適化と統合設計小委員会(協力委員)

委員:小野 聡子(近畿大学),

國光 修五(ユニオンシステム)

多田 聡(構造システム),

和田 大典(梓設計)

木村 俊明(名古屋市立大学),

高田 豊文(滋賀県立大学),

林 和希(京都大学),

「第 19 回コロキウム 構造形態の解析と創生 2024」実施担当者(所属は前掲)

コロキウム実施責任者: 横須賀 洋平

コンテスト担当: 藤田 慎之輔, 多田 聡, 野村 圭介, 和田 大典

資料集担当: 高田 豊文, 永田 洸大, 林 和希

会場担当: 浜田 英明, 山本 憲司

広報担当: 横須賀 洋平

参加登録担当: 木村 俊明, 和多田 遼

若手優秀発表賞担当: 熊谷 知彦, 小野 聡子

コロキウム HP 担当: 陳 沛山, 横須賀 洋平

ポスター担当: 永井 拓生

意見交換会担当: 松尾 智恵, ガン ブンタラ, 國光 修五, 三木 優彰

第 19 回コロキウム構造形態の解析と創生 2024

目次

■特別講演

『アルゴリズムックデザインの応用例:分野特有の形態生成とその工夫』	1
堀川淳一郎(合同会社 Orange Jellies)	
『「wAnder(惑い)/ワンダー/wOnder(感嘆)・ストラクチャー」にだきつく(シェアすること)』	2
名和研二(なわけんじム)	

■一般講演 — 研究論文 —

(R-01) 単層ラチスシェル構造物における総期待建設費用の最小化—格子パターンと部材断面を設計変数として—	3
○岡部竜也(法政大学), 浜田英明	
(R-02) VAE を用いた自由曲面シェルの生成と構造評価	9
○高橋龍徳(東海大学), 山本憲司	
(R-03) Folding Simulation of Square Twist Origami using Planar Tensegrity Model	15
○Zhu Lidong(京都大学), Zhang Jingyao	
(R-04) 曲げ折り構造において初期曲げモーメントを考慮する方法	21
○森本美羽(東海大学), 野村圭介	
(R-05) 3D スキャナーによる形状測定から曲げた平板の曲げモーメントを求める方法	27
○五味雅翔(東海大学), 野村圭介	
(R-06) フーリエ変換を用いた自由曲面シェルの形態的特徴と構造性能	33
○澤田樹一郎(島根大学)	
(R-07) 竹稈の形態と力学的性質の関係に関する研究	39
○永井拓生(滋賀県立大学)	
(R-08) 変数射影法と'揃える'条件によるグリッドシェルの形状決定	45
○三木優彰(東京大学), Toby Mitchell	
(R-09) ヨシムラパターンユニットからなる平坦折り可能なトーラス状折紙構造	51
○早川健太郎(日本大学), 大崎純	
(R-10) Active bending が作用する複合張力構造の形状解析—導入張力による解形状の比較—	57
○中村真子(鹿児島大学), 横須賀洋平	
(R-11) 曲げモーメント比例形状修正による推動型直交格子ドームの部分形状最適化	63
○谷彪吾(大同大学), 萩原伸幸	
(R-12) 膜主応力による曲線梁の形状決定手法—等方軸力状態を目的とした梁配置最適化—	69
○嶋尾恭兵(鹿児島大学), 横須賀洋平	

(R-13) SIMP 法と不連続変形法を用いた組積造の位相最適化	75
○高橋温(京都大学), 大崎純, 林和希, 張景耀	
(R-14) 曲線折りとアクティブ・ベンディングを用いた曲面形状の形状探索	81
○近藤あやめ(名古屋市立大学), 木村俊明	
(R-15) リー球面幾何による膜構造の等張力曲面の形状生成	87
○横須賀洋平(鹿児島大学), 軸丸芳揮	
(R-16) 偏心低減法を用いたフニクラシエルの形状解析—偏心距離の算定方法の検討—	93
○山本憲司(東海大学), 及川司	
(R-17) 構造最適化を用いた耐震補強部材の設計と実装—脆弱建築物を対象とした耐震補強工法の提案—	99
○木村俊明(名古屋市立大学), 北島千朔	
(R-18) 固定荷重と地震荷重に対する総歪エネルギーのトレードオフ関係に着目したグリッドシェル構造の構造形態創生	105
○金子亮太(竹中工務店), 寺澤友貴, 竹内徹	
(R-19) 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的として2段階で形状最適化された単層ラチスシェルの信頼性解析	111
○茂田暁(明治大学), 柳杏美, 小野倫太郎, 熊谷知彦, 加藤史郎	
(R-20) 双安定四辺形境界モジュールを用いた変形する曲面の設計	117
○田中一成(東京大学), 舘知宏	
■一般講演 —技術報告—	
(T-01) 最適設計された大変形弾性合金板の引張実験	123
○内田乙葉(島根大学), 廣山幸樹, 澤田樹一郎	
(T-02) 大規模木造建築に適用することができる大変形弾性部材の研究	129
○廣山幸樹(島根大学), 澤田樹一郎	
■形態創生コンテスト	
□コンテスト概要	133
□入選作品	
(1) Multi-stable Rhombus	139
○高室航平, 塚雄亮(ソニーコンピュータサイエンス研究所)	
(2) 桶箱工法_ver3	141
○金子太一(東京藝術大学)	
(3) Foldable Honeycomb	143
○齋藤魁利(株式会社 AMDlab)	
(4) シザース構造の応用による開閉可能な任意の三次元曲面	145
○浅岡小百合(慶應義塾大学)	

- (5) 曲率の反転～双曲面レシプロカル構造による空間デザイン～ ----- 147
榎田啓吾, 三好健太, 山本怜生, 三田沙也乃, ○村瀬怜奈, 伊藤世玲奈(株式会社大林組)
- (6) Newspaper Pavilion～新聞紙を材料とした3D プリント建築～ ----- 149
○土井究太, 大場風太, 前田駿, 土居颯真, 小田原紫音, 志々目慧大(広島工業大学)
- 佳作作品
- (1) ハリメンシエル 重ね代を調節して同形状面材を貼り合わせ接合することで作る曲面 ----- 151
○古賀大誠(東京大学)

*「第19回コロキウム構造形態の解析と創生2024」に関連する情報は、下記URLのページに掲載しています。
<https://kozokeitaisosei.com/>

■特別講演

特別講演講師 **堀川 淳一郎** (ほりかわ じゅんいちろう)

特別講演題目

『アルゴリズムックデザインの応用例：
分野特有の形態生成とその工夫』

○所属

合同会社 Orange Jellies

〒156-0053 東京都世田谷区桜 1-31-12

○略歴

2009 Columbia University AAD 修了
2009～2014 Noiz Architects 建築デザイナー
2010～2013 東京大学 非常勤講師
2015～現在 Orange Jellies 主宰(現在合同会社化)
2017～2020 東京藝術大学 非常勤講師
2019～2023 早稲田大学 非常勤講師
2022～現在 京都工芸繊維大学 特任研究員
2024～現在 東京大学 特任研究員
現在に至る

○主な受賞

2019 ONE SHOW 2019 Gold Pencil
2020 第23回文化庁メディア芸術祭 アート部門 優秀賞
2023 CCBT フェロー採択

特別講演講師 **名和 研二**(なわ けんじ)

特別講演題目

『「wAnder(惑い)/ワンダー/wOnder(感嘆)・ストラクチャー」に
だきつく(シェアする)こと』

○所属

なわけんジム(すわ製作所)

〒220-8190 横浜市西区みなとみらい 2-2-1 ランドマークプラザ B1F BUKATSUDO #7

○略歴

1994 東京理科大学工学部建築学科 卒業

2002 なわけんジム(すわ製作所)設立

現在に至る

○主な受賞

2007 吉岡賞

2014 AACA 賞 芦原義信特別賞 日本環境・設備デザイン賞

2023 日本構造デザイン賞

■ 一般講演 ー 研究論文 ー

単層ラチスシェル構造物における総期待建設費用の最小化 — 格子パターンと部材断面を設計変数として —

岡部 竜也¹⁾, 浜田 英明²⁾

1)法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻, 学士, tatsuya.okabe.2f@stu.hosei.ac.jp

2)法政大学デザイン工学部建築学科, 教授, 博士(工学), h.hamada@hosei.ac.jp

1 序論

構造設計において、力学的合理性や経済性から、最小限の断面で最大の機能を求めると、構造物の冗長性が失われることになる。日本では、地震や積雪などの自然現象による不確定な荷重が多く、空間構造物にこのような偏載荷重が作用した場合、耐力が著しく低下することがこれまでの研究で報告されている。そのため空間構造物には冗長性を持たせる必要がある。

不確定な荷重を確率的に捉え、設計を行うのが限界状態設計法である。この設計法は、荷重値の不確定要素に加えて、部材断面の誤差や施工誤差などの人為的な不確定要素も設計に取り込めるところが特徴的であり、信頼性指標と呼ばれる値で評価する。これを用いることで建物に適切な冗長性を確保することができる。信頼性指標が大きいほど破壊確率は小さくなり、破壊確率を扱うことで構造物の期待被害費用を求めることができる。

本研究では初期建設費用に期待被害費用を加えた総期待建設費用を目的関数として、単層ラチスシェル構造物の格子パターンと部材断面の違いが総期待建設費用に与える影響を考察する。

2 理論

2.1 限界状態設計法

限界状態設計法は、構造物にどのような性能を付与し、その性能水準をどの程度に設定するかという二つの重要な側面を有している。前者については設計者や建築主が構造物に要求する多様な性能を選定することであり、それらの要求性能は使用限界状態や終局限界状態に分類解釈される。後者については、選定された性能のグレード設定に関する定量的な側面であり、考慮する限界状態ごとに設定する必要がある。

限界状態は限界状態関数を用いて表される。本研究では使用限界状態を「ある部材で最大応力度が長期許容応力度を超えた状態」、終局限界状態を「作用荷重が弾塑性座屈荷重を超えた状態」と定義した。

2.2 信頼性指標 β と破壊確率 P_f

本研究では荷重、耐力関数は正規分布と仮定し、設計強度値、設計荷重値の平均値と標準偏差から求める。これらの関数は、設計値の平均からどのくらいばらつきがあるかを示したものであり、荷重関数 S が耐力関数 R を上回っている状態の時に構造物が破壊することになる。つまり、 $R > S$ の時は安全で、 $R \leq S$ の場合、破壊するとみなす。これらの関数から求めることができる安全の余裕を表すものが、性能関数 Z であり、 $Z = R - S$ で表すことができる。ここで、 $Z > 0$ は安全、 $Z \leq 0$ で破壊されるということであり、 Z の平均値 μ_Z が標準偏差 σ_Z を尺度として何倍離れているかを表すパラメータが信頼性指標 β であり、式(2.2.1)で求める。

信頼性指標が大きいと安全で、小さいと破壊しやすいことになる。また、この破壊しやすさを確率に表したものを破壊確率と呼び、式(2.2.2)で表される。

性能関数の概念図を図1に示す。

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{2.2.1}$$

β : 信頼性指標

μ_Z : 性能関数の平均値, σ_Z : 性能関数の標準偏差

μ_R : 耐力効果の平均値, σ_R : 耐力効果の標準偏差

μ_S : 荷重効果の平均値, σ_S : 荷重効果の標準偏差

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \tag{2.2.2}$$

P_f : 破壊確率

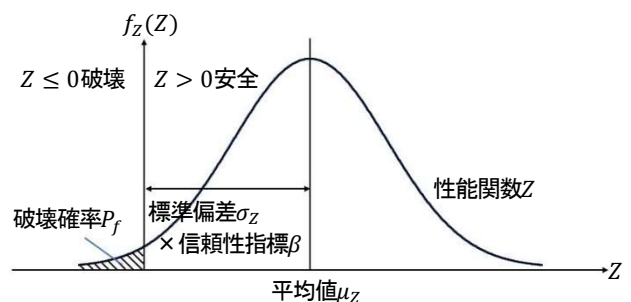


図 2.2.1 性能関数 Z の概念図

2.3 平均値 μ と標準偏差 σ

終局限界状態のパラメータを「弾塑性座屈荷重」、使用限界状態のパラメータを「ひずみエネルギー」として終局限界状態と使用限界状態の荷重効果・耐力効果の平均値、標準偏差を定式化する。

終局限界状態の耐力効果の平均値 μ_R は弾塑性座屈荷重として、修正ダンカレー式を使い求める。ここで線形座屈荷重値の標準偏差 σ_R は線形座屈荷重値を部材断面寸法で一次近似することで求める。部材断面の寸法の誤差がラチスシェル構造物に与える影響が大きいと見え、部材断面の直径を D 、厚さを t とすると、線形座屈荷重値は式(2.3.1)で表せ、マクローリン展開より一次近似すると式(2.3.2)で表せる。

$$P_{cr} = P_{cr}(D, t) \quad (2.3.1)$$

$$P_{cr} = \sum_{i=1}^{nel} ({}_D C_i D_i + {}_t C_i t_i) \quad (2.3.2)$$

$${}_D C_i = \frac{\partial P_{cr}}{\partial D_i} \quad {}_t C_i = \frac{\partial P_{cr}}{\partial t_i} \quad (2.3.3)$$

${}_D C_i$: 線形座屈荷重を D で偏微分して求められる感度係数
 ${}_t C_i$: 線形座屈荷重を t で偏微分して求められる感度係数

これらの感度係数と寸法の標準偏差 $\sigma(D_i)$ 、 $\sigma(t_i)$ を用いると線形座屈荷重値の標準偏差は式(2.3.4)となる。

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{nel} \{ {}_D C_i^2 \cdot \sigma(D_i)^2 + {}_t C_i^2 \cdot \sigma(t_i)^2 \}} \quad (2.3.4)$$

部材断面寸法の標準偏差 $\sigma(D_i)$ 、 $\sigma(t_i)$ は鋼構造 LSD 指針より、直径 D と厚さ t の 15%とする。また、荷重効果の平均値 μ_S は設計荷重として、標準偏差 σ_S は設計荷重の 10%とする。

使用限界状態の耐力効果の平均値 μ_{UR} は許容ひずみエネルギーとし、式(2.3.5)で求める。

$$\sigma_R = U_a = \frac{U_0}{v} \quad (2.3.5)$$

U_0 : 平均荷重 μ_S を受けた状態の基準ひずみエネルギー
 U_a : 許容ひずみエネルギー, v : 部材検定比の最大値

許容ひずみエネルギー U_a の標準偏差 σ_{UR} は終局限界状態の標準偏差 σ_R と同様に部材断面寸法の一次近似より求めると、式(2.3.6)となる。

$$\sigma_{UR} = \sqrt{\sum_{i=1}^{nel} \{ {}_D C_{Ui}^2 \cdot \sigma(D_i)^2 + {}_t C_{Ui}^2 \cdot \sigma(t_i)^2 \}} \quad (2.3.6)$$

$${}_D C_{Ui} = \frac{\partial U_a}{\partial D_i} \quad {}_t C_{Ui} = \frac{\partial U_a}{\partial t_i} \quad (2.3.7)$$

${}_D C_{Ui}$: 許容ひずみエネルギーを D で偏微分して求められる感度係数
 ${}_t C_{Ui}$: 許容ひずみエネルギーを t で偏微分して求められる感度係数
 荷重効果の平均値 μ_{US} は設計荷重作用時のひずみエネルギー U_0 とし、標準偏差 σ_{US} は式(2.3.8)より正規分布を仮定して、式(2.3.9)から求める。

$$U_0 = \frac{1}{2} f^T d \quad (2.3.8)$$

$$\sigma_{US} = \sqrt{\left(\frac{\partial U_0}{\partial f} \right)^2 \cdot \sigma_S^2} \quad (2.3.9)$$

f : 節点荷重ベクトル, d : 節点変位ベクトル

各限界状態の平均値と標準偏差を表 2.3.1 にまとめる。

表 2.3.1 各限界状態の平均値と標準偏差

	終局限界状態	使用限界状態
耐力効果の平均値 μ_R	弾塑性座屈荷重	許容ひずみエネルギー
耐力効果の標準偏差 σ_R	式(2.3.4)	式(2.3.6)
荷重効果の平均値 μ_S	設計荷重	ひずみエネルギー
荷重効果の標準偏差 σ_S	設計荷重の 10%	式(2.3.9)

2.4 修正ダンカレー式

初期不整と接合部の剛性を考慮して求められる特定部材の弾性座屈軸力は式(2.4.1)で算定できる。

$$N_{cr}^{el} = \alpha \cdot \lambda_{cr}^{lin} \cdot N_0 \quad (2.4.1)$$

N_{cr}^{el} : 弾性座屈軸力, α : ノックダウンファクター

λ_{cr}^{lin} : 線形座屈荷重値, N_0 : 設計荷重に対する特定部材の軸力

特定部材を用いて正規化細長比 Λ_e は式(2.4.2)で表され、鋼構造設計規準式を適用すると、式(2.4.3)となる。

$$\Lambda_e = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}^{el}}} \quad (2.4.2)$$

$$\frac{N_{cr}}{N_y} = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \frac{1 - 0.24\Lambda_e^2}{1 + \frac{4}{15}\Lambda_e^2} & for \quad \Lambda_e \leq \frac{1}{\sqrt{0.6}} \\ & \frac{9}{13}\Lambda_e^2 & for \quad \Lambda_e \geq \frac{1}{\sqrt{0.6}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

N_{cr} : 特定部材の圧縮強度, N_y : 特定部材の降伏軸力

λ_{cr}^{lin} : 線形座屈荷重値, N_0 : 設計荷重に対する特定部材の軸力

弾塑性座屈荷重値 λ_{cr}^{pl} は式(2.4.4)から得られる。

$$\lambda_{cr}^{pl} = \frac{N_{cr}}{N_0} \quad (2.4.4)$$

N_{cr}^{el} : 弾性座屈軸力, N_0 : 設計荷重に対する特定部材の軸力

2.5 感度係数

今回の結果において、終局限界状態の耐力効果の標準偏差 σ_R を求める際に使用する感度係数 ${}_D C_i$ 、 ${}_t C_i$ と使用限界状態の耐力効果の標準偏差 σ_{UR} を求める際に使用する感度係数 ${}_D C_{Ui}$ 、 ${}_D C_{Ui}$ はそれぞれ数値微分によって求めているが、剛性マトリクス等を微分することで、求めることもできる。

標準偏差 σ_R を求める際に用いる感度係数 ${}_D C_i$ 、 ${}_t C_i$ は式(2.3.3)から式(2.5.1)のように表せる。

$${}_D C_i = \frac{\partial P_{cr}}{\partial D_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial D_i} P_0 \quad (2.5.1)$$

$${}_t C_i = \frac{\partial P_{cr}}{\partial t_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial t_i} P_0$$

P_{cr} : 形座屈荷重, λ_i : i 次線形座屈荷重値, P_0 : 設計荷重

構造物の初期剛性マトリクスを \mathbf{K}_L 、幾何剛性マトリクスを \mathbf{K}_G とすると、 i 次の座屈モードを ϕ_i とすると、式(2.5.2)と式(2.5.3)が得られる。

$$\left[\mathbf{K}_G + \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{K}_L \right] \phi_i = 0 \quad (2.5.2)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K}_L \phi_i = 1 \quad (2.5.3)$$

式(2.5.2)と式(2.5.3)をある設計変数 x_i で微分すると、

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} - \frac{\mathbf{K}_L}{\lambda_i^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} \right] \phi_i \quad (2.5.4)$$

$$+ \left[\mathbf{K}_G + \frac{\mathbf{K}_L}{\lambda_i} \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} \phi_i + 2 \phi_i^T \mathbf{K}_L \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5.5)$$

これらを整理して、マトリクス表現すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G + \frac{\mathbf{K}_L}{\lambda_i} & -\frac{\mathbf{K}_L}{\lambda_i^2} \phi_i \\ 2 \phi_i^T \mathbf{K}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} \phi_i - \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} \phi_i \\ -\phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} \phi_i \end{Bmatrix} \quad (2.5.6)$$

式(2.5.6)の連立方程式を解くことで、 $\partial \lambda_i / \partial x_i$ を求められ、式(2.5.1)より、感度係数 ${}_D C_i$ 、 ${}_t C_i$ が得られる。

標準偏差 σ_{UR} を求める際に用いる感度係数 ${}_D C_{Ui}$ 、 ${}_t C_{Ui}$ は式(2.3.7)から式(2.5.7)のように表せる。

$${}_D C_{Ui} = \frac{\partial U_a}{\partial D_i} = \frac{\partial U_0}{\partial D_i} / v \quad (2.5.7)$$

$${}_t C_{Ui} = \frac{\partial U_a}{\partial t_i} = \frac{\partial U_0}{\partial t_i} / v$$

構造物のひずみエネルギーは式(2.5.8)で表される。ある設計変数 x_i の変化が \mathbf{f} に影響を与えないと仮定し、ひずみエネルギーを x_i で微分すると、

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_i} \quad (2.5.8)$$

構造物の静的挙動は有限要素法を用いて式(2.5.9)のようにかかる、これを微分すると式(2.5.10)となる。

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.5.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_i} = -\mathbf{K}_L^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} \mathbf{d} \quad (2.5.10)$$

これらを用いて式(2.5.8)は式(2.5.11)のように得られる。

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial x_i} \mathbf{d} \quad (2.5.11)$$

上式より、 $\partial U_0 / \partial x_i$ が求められ、式(2.5.7)より感度係数 ${}_D C_{Ui}$ 、 ${}_D C_{Ui}$ を得られる。

2.6 最適化手法

本研究では最適化手法として遺伝的アルゴリズムを用いる。設計変数 ϕ を部材断面として、目的関数を総期待建設費用 cost とした最適化問題は次のように帰着される。

$$\text{minimum } f(\phi) = \text{cost}$$

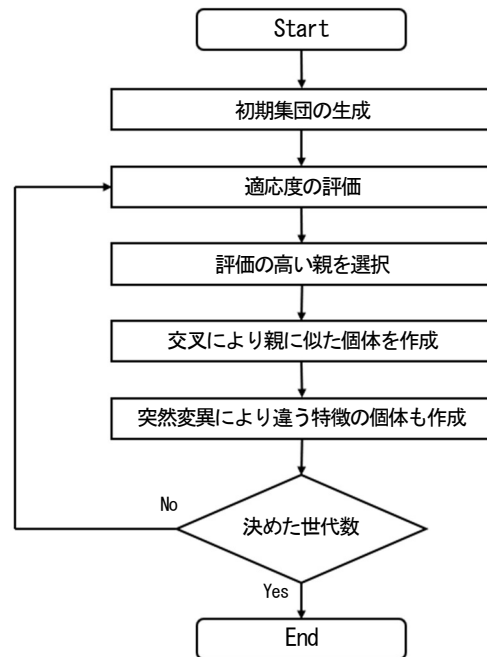


図 2.6.1 解析のフローチャート

2.7 総期待建設費用

総期待建設費用とは、建設時にかかる初期費用に建物が損傷した時の修復にかかる期待被害費用を加えたもので、総期待建設費用はある設計荷重において最小となり、その時の設計荷重は、初期建設費用においても、期待被害費用においても一番適切な大きさになる。この考え方を総期待建設費用最小化の原理と呼び、この原理を使うことで、適切な費用で適度な冗長性を持った構造物を得ることができる。総期待建設費用のグラフを図2.7.1に示す。

本研究の総期待建設費用は初期建設費用との比で表し、(3)の式で求める。期待被害費用は使用限界状態と終局限界状態の2つの場合で分けて算出する。

$$\frac{C_T}{C_0} = \text{cost} = \left\{ 1 + wKc \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right) \right\} \times (1 + uP_{fn} \cdot u_g + sP_{fn} \cdot s_g) \quad (3)$$

C_T : 供用期間中の総期待建設費用, W : 構造物の総躯体重量

W_0 : 基準躯体重量, C_0 : W_0 の時の初期建設費用

wKc : 重量のコスト上昇係数

u_g : 終局損失費用係数, uP_{fn} : 終局限界状態の破壊確率

s_g : 使用損失費用係数, sP_{fn} : 使用限界状態の破壊確率

式を見てわかるように、構造物の総躯体重量と基準躯体重量の比を用いて算出を行う。今回は基準躯体重量 $W_0 = 150t$ とする。また、本研究では終局限界状態のパラメータを「線形座屈荷重×ノックダウンファクター=0.4」、使用限界状態のパラメータを「ひずみエネルギー」として、それぞれの破壊確率 $uP_{fn} \cdot sP_{fn}$ を算出する。

2.8 損失費用係数

損失費用係数とは、以下の(a)~(h)に示すような被害があった時に初期建設費用 C_0 に対して g 倍の費用がかかる係数である。この値は建物の用途、重要性によって変化するものであり、表2.8.1にまとめる。

本研究では建築用途を(D)高層事務所と同等なものとして仮定し、損失費用係数の算出を行う。理由として、(A)~(C)では規模が小さく、(E)~(G)ほど、機能が損失した時にかかる損失費用までは到達しないと考えたからである。

また、使用限界状態における損失費用係数は(a)~(c)であると想定し、使用損失費用係数を $s_g = 1.05$ とする。

終局限界状態における損失費用係数は(a)~(h)であると想定し、終局損失費用係数を $u_g = 6.50$ とする。

2.9 コスト上昇係数

コスト上昇係数は、構造コストが総コストの1/3で、構造コストの6割が躯体重量に比例して変化するものとする、コスト上昇係数は $1/3 \times 6/10 = 1/5$ となる。建設コストの概念図を図2.9.1に示す。

また、本研究で使用するコスト上昇係数 wKc は元の論文¹⁾より、ラチスシェル構造物の固定荷重時のコスト上昇係数である $wKc = 0.25$ を使用する。

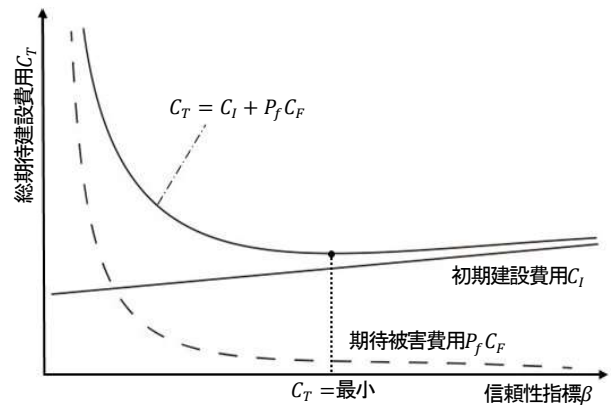


図 2.7.1 総期待建設費用のグラフ

表 2.8.1 建物と被害の種類による損失費用係数

	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
(a)	0.3	0.3	0.4	0.25	0.25	0.3	0.15
(b)	0.4	0.2	0.4	0.2	0.5	0.1	0.1
(c)	0.2	0.2	0.1	0.3	0.3	0.2	0.2
(d)	0.1	0.1	0.1	0.3	0.5	0.2	10.0
(e)	0.1	0.1	0.2	0.2	10.0	10.0	2.0
(f)	0.2	0.5	0.2	0.5	0.1	0.1	100
(g)	0.1	0.2	0.1	5.0	5.0	5.0	2000
(h)	1.0	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

(a)	構造物の被害	(A)	住宅
(b)	内容物の被害	(B)	マンション
(c)	非構造物の被害	(C)	小店
(d)	設備機器の被害	(D)	高層事務所
(e)	機能損失	(E)	病院
(f)	怪我	(F)	消防署
(g)	人命損失	(G)	原子力発電所
(h)	心理的被害		

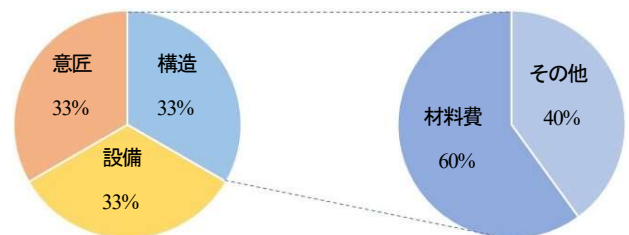


図 2.9.1 建設コストの概念図

3 単一断面での総期待建設費用

3.1 許容応力度設計

ラチスシェル構造物の静的解析から長期許容応力度を求め、総期待建設費用算出時の適切な鋼管の断面を求める。全体形状を四角形、格子を3パターン、分割方法を投影長等分割とした計3つのモデルを解析対称とする。解析モデルの規模は2方向格子、2方向斜格子は50m×50m、3方向格子は50×52mとする。各モデルの平面図を図3.1.1に示す。また、解析概要を表3.1.1にまとめる。例として、2方向格子のモデルと2方向斜格子、3方向格子の平面図を図3.1.2に示す。許容応力度設計の結果から、解析に使用する各モデルの断面を決定した。各モデルの使用断面と検定比、躯体重量を表3.1.2に示す。

3.2 解析結果

各モデルの終局限界状態の信頼性指標 β_λ と破壊確率 $P_{f\lambda}$ 、使用限界状態の信頼性指標 β_{U0} と破壊確率 P_{fU0} 、総期待建設費用costを表3.2.1にまとめる。cost算出時の基準躯体重量は200tとする。各モデルの力学的特性から、2方向格子モデルは曲げ抵抗型、2方向斜格子モデルと3方向格子モデルは軸力抵抗型と分けることが出来た。

3.2.1 信頼性指標 β

信頼性指標は2~2.5が良いとされている。各モデルの信頼性指標を見てみると、どのモデルも不十分な値になっている。終局限界状態の信頼性指標 β_λ は軸力抵抗型のモデルの方が小さくなっている。これは修正ダンカレー式を使用し、弾塑性座屈荷重値を算出する際に軸力の影響を受けるためだと考えられる。使用限界状態の信頼性指標 β_{U0} は曲げ抵抗型のモデルの方が小さくなっている。これは曲げ抵抗型のモデルの方が変位は大きくなりやすく、ひずみエネルギーの影響を受けやすいからだと考えられる。

3.2.2 総期待建設費用cost

costにおいては曲げ抵抗型の2方向格子モデルが最大値で軸力抵抗型の3方向格子モデルが最小値の結果が得られた。軸力抵抗型の2モデルの方が曲げ抵抗型のモデルよりもcostは小さくなった。これは信頼性指標の値がどれも小さく、どのモデルも破壊確率が大きい値になったため破壊確率ではなく、躯体重量の大きさの影響を強く受けたからだと考えられる。

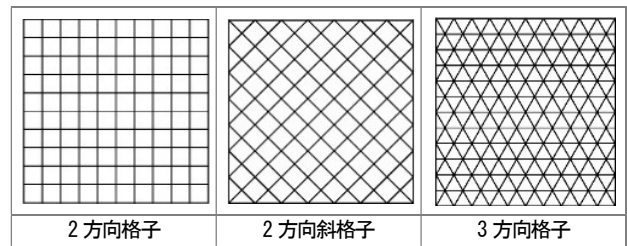


図 3.1.1 各解析モデルの平面図

表 3.1.1 解析概要

形状	半開角 30 度, 裁断球殻
支持条件	隅各部ピン支持, 四辺ローラー支持
接合条件	剛接合
荷重条件	1.5kN/m ² として各節点に分割鉛直下向き
使用断面	STKN400
鋼材諸元	E = 2.05 × 10 ⁵ (N/mm ²), ν = 0.3 G = 7.94 × 10 ⁴ (N/mm ²) σ _v = 235(N/mm ²)
E : ヤング係数, ν : ポアソン比 G : せん断弾性係数, σ _v : 降伏応力度	

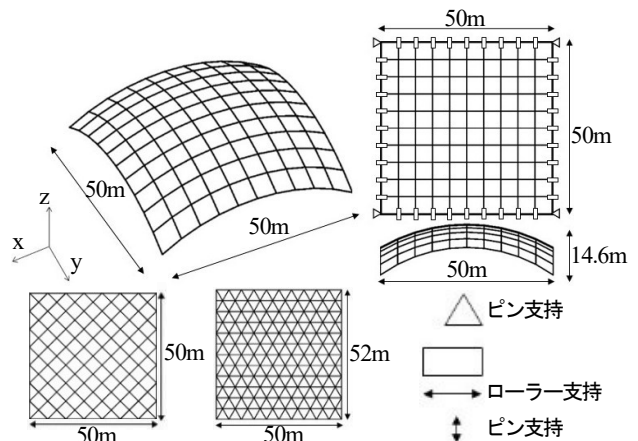


図 3.1.2 解析モデル

表 3.1.2 各モデルの使用断面・検定比・躯体重量

	2方向格子	2方向斜格子	3方向格子
断面	φ812.8 × 12.0	φ406.4 × 12.0	φ318.5 × 9.0
検定比	95.1%	42.3%	52.6%
重量	274.8t	146.9t	140.4t

表 3.2.1 各モデルの信頼性指標・破壊確率・cost

	2方向格子	2方向斜格子	3方向格子
β_λ	0.0001	4.42 × 10 ⁻⁶	7.11 × 10 ⁻⁵
$P_{f\lambda}$	50.0%	50.0%	50.0%
β_{U0}	0.025	0.380	0.419
P_{fU0}	49.0%	35.2%	33.8%
cost	5.210	4.313	4.261

曲げ抵抗型 (Red background) 軸力抵抗型 (Blue background)

4 断面を変数に加えた場合の総期待建設費用

4.1 解析概要

選定した8つの断面を使用して総期待建設費用の算出を行う。使用する8つの断面の詳細を表4.1.1、GAのパラメータを表4.1.2に示す。解析概要と解析モデルは表3.1.1、図3.1.2と同じとする。

4.2 解析結果

解析から得られた各モデルの使用部材断面を示した平面図を図4.2.1に示す。また、各モデルの検定比・躯体重量を表4.2.1、終局限界状態の信頼性指標 β_λ と破壊確率 $P_{f\lambda}$ 、使用限界状態の信頼性指標 β_{U0} と破壊確率 P_{fU0} 、総期待建設費用costを表4.2.2にまとめる。cost算出時の基準躯体重量は200tとする。

4.2.1 信頼性指標 β

各モデルの信頼性指標を見ると終局限界状態の信頼性指標 β_λ は過剰な値になっているのに対して、使用限界状態の信頼性指標 β_{U0} は不十分な値になっている。単一断面時と同様に軸力抵抗型のモデルの方が β_{U0} は大きい。

4.2.2 総期待建設費用cost

costにおいても、単一断面時と同様に軸力抵抗型のモデルの方が小さくなった。これは全モデルの β_λ が過剰な値になり、 β_{U0} の値を大きく受けたからだと考えられる。また、軸力抵抗型の2つのモデルを比較すると、躯体重量の値が大きく異なるが、costの差が小さいことがわかる。これは β_{U0} の差だと考えられ、3方向格子モデルの方がひずみエネルギーの影響を受けにくいといえる。

5 結論

単層ラチスシェル構造物においては、抵抗方法の違いが各信頼性指標に影響を及ぼし、曲げ抵抗型モデルではひずみエネルギーの影響が大きく、軸力抵抗型モデルでは修正ダンカレー式による弾塑性座屈荷重値の影響を大きい。総期待建設費用costは軸力抵抗型モデルの方が低い。

表 4.1.1 使用断面

No	直径D	厚さt	断面積A	断面二次
1	190.7	8.2	4700	19613000
2	216.3	6.0	3960	21932000
3	267.4	9.0	7310	61053000
4	355.6	7.9	8630	130474000
5	406.4	12.0	14870	289370000
6	508.0	19.0	29190	873766000
7	711.2	16.0	34940	2112220000
8	812.8	19.0	47380	3734182000

表 4.1.2 遺伝的アルゴリズム (GA) のパラメータ

1世代の個体数	25
世代数	30
交叉確率	90%
突然変異確率	10%

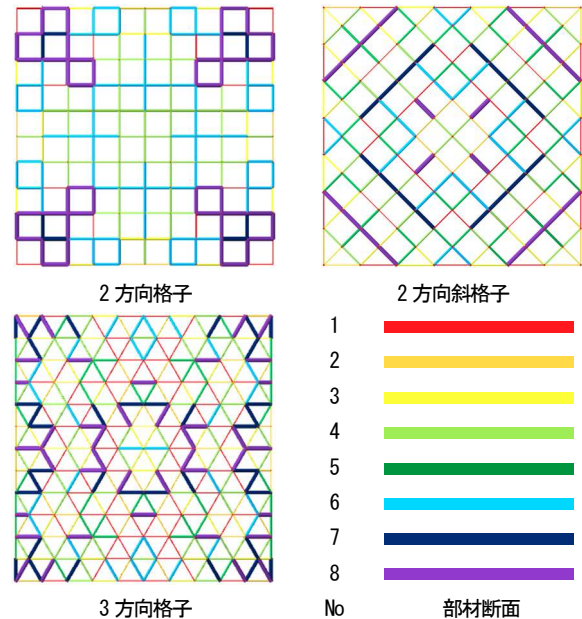


図 4.2.1 平面図

表 4.2.1 各モデルの検定比・躯体重量

	2方向格子	2方向斜格子	3方向格子
検定比	95.1%	60.6%	44.7%
重量	274.8t	151.2t	248.8t

表 4.2.2 各モデルの信頼性指標・破壊確率・cost

	2方向格子	2方向斜格子	3方向格子
β_λ	29.41	9.26	11.06
$P_{f\lambda}$	0%	0%	0%
β_{U0}	0.015	0.231	0.553
P_{fU0}	49.4%	40.9%	29.0%
cost	1.583	1.342	1.384

曲げ抵抗型

軸力抵抗型

参考文献

- 1) 日本建築学会：ラチスシェルの座屈と耐力，2010
- 2) 源博欽，浜田英明：総期待建設費用最小化の原理を用いたラチスシェル構造物の形態創生，日本建築学会大会学術講演梗概集，2019年7月
- 3) 神田順・高田毅士・平川倫生・前川利雄・小宮嘉之・櫻村俊也・藤井正則・樋口聖子：若き建築構造技術者に向けてー限界状態設計法の挑戦ー，建築技術，2008
- 4) 上原隼大：格子パターン及び配列方法の違いによる単層ラチスシェル構造物の力学的特性と冗長性に関する研究，法政大学卒業論文，2021

VAE を用いた自由曲面シェルの生成と構造評価

高橋 龍徳¹⁾, 山本 憲司²⁾

1)東海大学大学院工学研究科, 大学院生, 4cckm024@tokai.ac.jp

2)東海大学, 建築都市学部, 教授, 博士(工学)

1 はじめに

建築技術が高度化して、複雑な形態をもった自由曲面シェル構造が建設されるようになった。それに伴いシェル構造の形態創生に関する研究が注目されている。シェルの形状最適化を扱った研究はこれまでに多くある^例 (例えば1),2),3)。シェル曲面をNURBS曲面などのパラメトリック曲面で与えて制御点座標を設計変数とし、歪エネルギーや座屈荷重などを目的関数として、形状探索が行われる。これらの方法では、シェルの曲率や板厚を変化させ、初期に与えたシェルの境界形状やトポロジーなどは基本的には変化させないため、シェルの見た目は大きくは変わらない。シェルの位相最適化を行っている研究もある。上村、藤井ら⁴⁾はボクセル有限要素法とIESO法を用いてシェル形態を生成している。シェル形態の表現自由度は極めて高く、荷重や境界条件の設定によって多様なシェルを生成可能と考えるが、設計空間を小さな要素で要素分割する必要があるため、計算規模やコストが極めて大きくなる。

近年、機械学習を工学問題に応用した研究が盛んに行われており、シェルの構造形態創生問題にも適用事例が見られるようになってきた。Mirra⁵⁾は、機械学習の手法のひとつである変分自己符号化器 (Variational Autoencoder, 以下VAE) を用いて、多様なシェル形態を出力する生成モデルを構築し、目的関数を歪エネルギー、開口高さ、建築面積の3つとした多目的最適化を行っている。この手法は、様々なトポロジーを持つシェル構造を少ない変数で生成でき、なおかつ変数に対してシェル形態が連続的に変化するため、比較的簡単に多様なシェル形態の比較や最適化を実行できる。

本研究はMirraらと同様にVAEによるシェル形態の生成モデルの構築を行い、トポロジーの異なる多様なシェル形態を多数生成し、それらの構造特性を評価する。Mirraらはシェル形態を1つの深度マップで表現してVAEに学習させているが、著者らはシェルの曲面とトポロジーを別々の深度マップで表現するデザイン手法を提案する。シェルのトポロジーを表現するためにレベルセット法のように曲面の等高線を利用している。調べる構造特性を曲げ歪エネルギー率とし、様々なシェルの曲げ歪エネルギー率を全探索的に調査する。また、シェル形

状の微妙な変化に対する曲げ歪エネルギー率の変化(敏感性)も同時に調査した。

2 VAEによるシェルの生成モデル

2.1 VAE

VAEとはニューラルネットワークを取り入れた生成モデルのアルゴリズムである。入力データを一度圧縮した後に同じものを復元するアルゴリズムであるAutoencoder (VAE) とは異なり、圧縮後の変数 (潜在変数) を確率変数として扱うことで、出力データを潜在変数に対して連続的に変化させることができる。シェル構造の形態創生問題にこのVAEを利用すれば、少ない変数で多様なシェル形態を表現することができる。

図1はVAEのモデルを簡単に図示したものである。高次元データである入力データ \mathbf{x} (図1では画像データ入力1・入力2)をエンコーダに入力すると低次元に圧縮した潜在変数 \mathbf{z} の平均 $\boldsymbol{\mu}$ と分散 $\boldsymbol{\sigma}^2$ を出力する(AEでは \mathbf{z} がそのまま出力される)。デコーダは潜在変数 \mathbf{z} を入力としてデータ \mathbf{x} を出力する(図1の復元1・復元2)。ニューラルネットワークの学習の際、エンコーダの出力 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2$ を用いてそのまま潜在変数のサンプリングを行うと、損失関数の勾配が計算できない。したがって勾配降下法を用いたバックプロパゲーションができるようにするために潜在変数を $\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, \odot は要素ごとの積を表す)と計算して、デコーダに受け渡す(reparameterization trick)。

VAEのニューラルネットワークの学習には、周辺対数尤度関数の変分下界に相当する式として、次式の損失関数が用いられる。

$$Loss(\mathbf{x}, \phi, \theta) = E_{rec} + E_{reg} \quad (1)$$

$$E_{rec} = \frac{1}{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{n_i} \left\{ -x_i^{(j)} \ln \hat{x}_i^{(j)} - (1 - x_i^{(j)}) \ln (1 - \hat{x}_i^{(j)}) \right\} \quad (2)$$

$$E_{reg} = D_{KL} [N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \| N(\mathbf{0}, \mathbf{I})] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{n_i} \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 + \ln(\sigma_i^{(j)})^2 - (\mu_i^{(j)})^2 - (\sigma_i^{(j)})^2 \right) \right\}$$

ここに、 θ, ϕ はそれぞれエンコーダ、デコーダのニューラルネットワークのパラメータである。 E_{rec} は再構成誤差関数とよばれ、エンコーダの入力 \mathbf{x} とデコーダの出力 $\hat{\mathbf{x}}$ のバイナリクロスエントロピー誤差である。 n_b はバッチサイズ、 n_n は入出力層のニューロン数を表す。また例えば $x_j^{(i)}$ はバッチの j 番目の x の i 番目の要素を表す。 E_{reg} は正則化項と呼ばれる。 D_{KL} は KL ダイバージェンスであり、エンコーダの出力する平均 μ と分散 σ^2 による多変数正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ (Σ はベクトル σ^2 を対角項に持ちそれ以外はゼロ) が $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ に近いほど小さな値をとる。 n_l は潜在変数の数を表す。

2.2 シェル形状の表現方法

今回、シェルの形状を表現する際、2 つの定義曲面を用いた。1 つ目はシェル曲面の曲率を定義するための曲面である。これを曲率定義曲面と呼ぶことにする。2 つ目はシェル曲面の境界の形状やトポロジーを定義するための曲面である。これをトポロジー定義曲面と呼ぶことにする。これはあるシェル曲面を切り欠いたり切り抜いたりすることで生成されるシェル曲面の形状を多様化するものである。その手法を以下に述べる。

手法の概略図を図2に示す。図中の最下段の図(c)の曲面がトポロジー定義曲面である。レベルセット法のように、この曲面の $z=0$ の平面の交差する等高線を利用して、シェルのフリーエッジや開口の境界線を表現する。中段の図(b)の曲面は、曲率定義曲面である。トポロジー定義曲面の $z=0$ の等高線を垂直方向にシェル曲面に投影し、等高線または、等高線とフィールドとの境界に囲まれた範囲を指定して切り欠くことで、図(a)のようなシェル曲面を生成する。

2.3 深度マップ

前節で説明した2つの定義曲面を図3のように5×5のグリッド上に25個の測定点を定義し、各点の高さの測定データをリスト化し、数値情報として利用する。この曲率定義曲面、トポロジー定義曲面のリスト化された測定データをそれぞれ、曲率定義変数、トポロジー定義変数と呼ぶことにし、これらの定義変数を組み合わせたものをVAEに学習させる学習データとする。また、その変数をもとに定義曲面を上から見た様子を平面的に可視化したものが深度マップであり、図4は図3を深度マップで表現した例である。白から黒へのグラデーションで表現されており、測定点の z 座標が低い ($z=0$ に近い) ほど黒に近くなり、白に近いほど曲面の最高高さに近い点であることを表している。

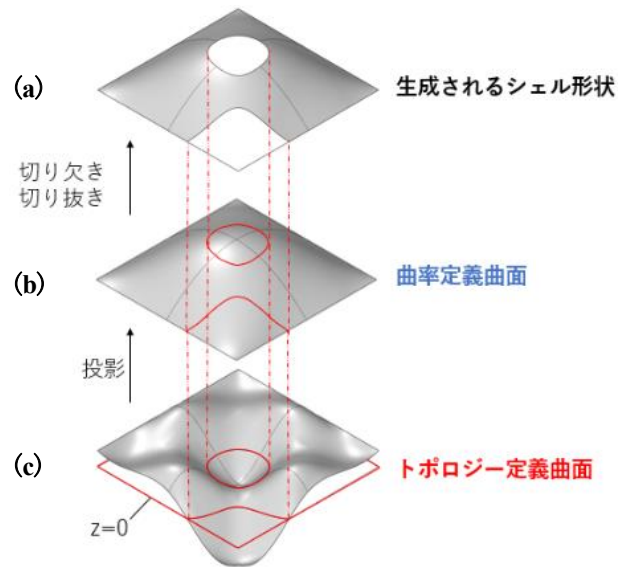


図2 トポロジー定義手法

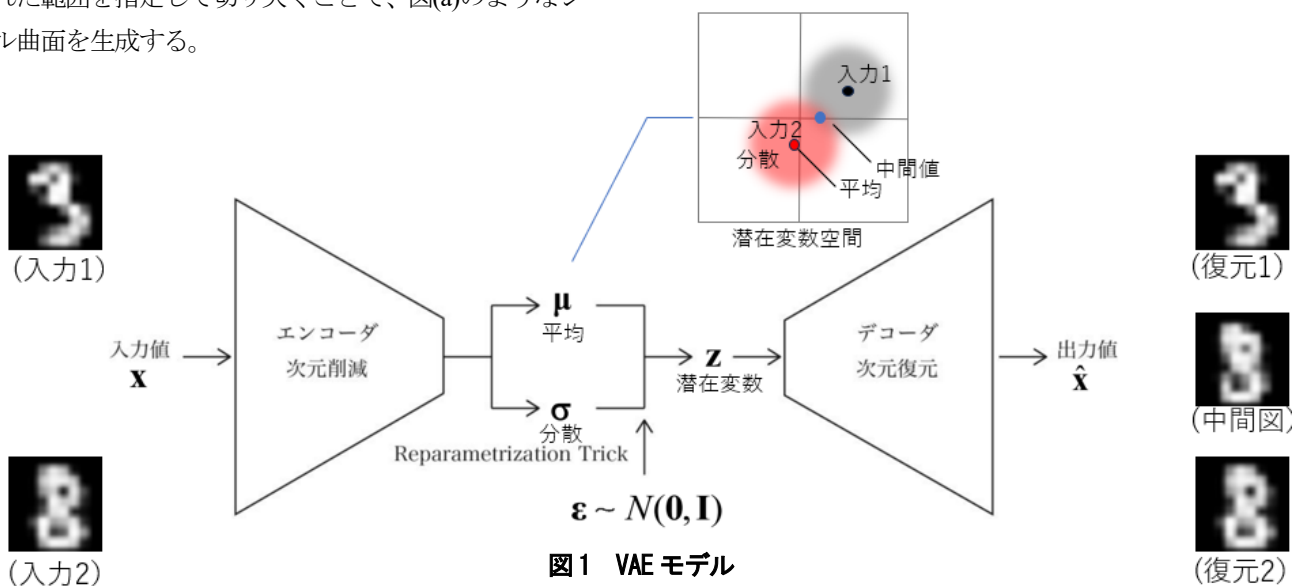


図1 VAE モデル

3 シェルモデルの学習と生成の例

3.1 学習データの作成

実用段階を想定して3つの学習モデルを作成した。学習データにより表現されるシェルモデルを図5(a)に示す。四隅に支持部分を持ち各辺にフリーエッジがあるモデル0、三辺を支持辺とした片持ち形状のモデル1、ヴォールト状の曲面の一辺にフリーエッジ部分を持ち、頂点に丸い穴が開いているモデル2である。この3つのモデルはすべてスパン10m、最高高さ3mである。それぞれの学習モデルを構成する曲率定義曲面を図5(b)に、トポロジー定義曲面を図5(c)に示す。また、図5の(a)、(b)において上段が曲面、下段が深度マップを表している。

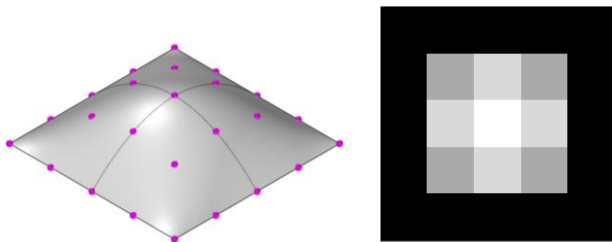
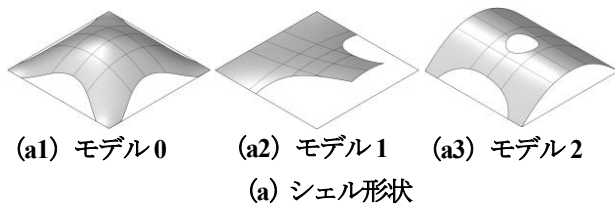


図3 曲面の格子分割

図4 深度マップ

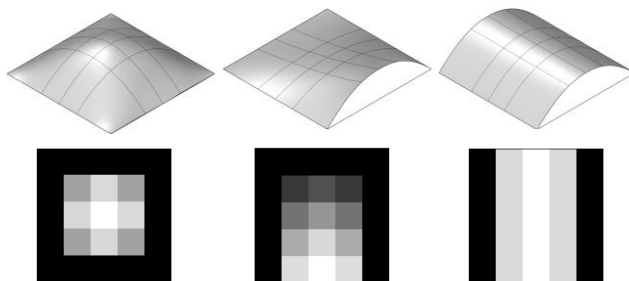


(a1) モデル0

(a2) モデル1

(a3) モデル2

(a) シェル形状

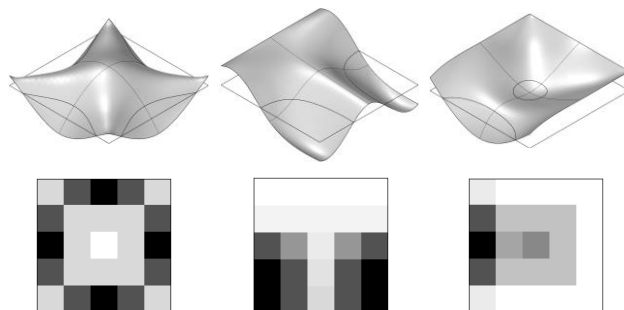


(b1) モデル0

(b2) モデル1

(b3) モデル2

(b) 曲率定義曲面



(c1) モデル0

(c2) モデル1

(c3) モデル2

(c) トポロジー定義曲面

図5 学習データ

3.2 VAEの学習

作成した3つの学習データを用いてVAEを学習させた。

本報で用いたVAEのニューラルネットワークの構成を述べる。エンコーダの入力層、デコーダの出力層のノード数は、2つの定義曲面を生成すVAEにおいて、どちらも25である。扱うデータの規模が比較的小さいためエンコーダの中間層は1層で、ノード数は16とし、活性化関数にはReLUを用いる。出力層は、平均、分散ともにノード数を2(2変数)とした。デコーダの入力層のノード数は2、中間層はエンコーダと同じ1層16ノードでReLUを用いる。出力層の活性化関数にはシグモイド関数を用いている。学習に用いる最適化手法にはAdamを用い、学習率は0.01とした。また、VAEのプログラムはPythonライブラリの一つであるPytorchを用いた。

学習過程の誤差関数の推移を図6に示す。今回は学習のエポック数を10000に設定して行った。横軸のエポック数に対して式(1)の2つの誤差の和が減少していることから学習が進んでいることがわかる。エンコーダにより出力された学習データの潜在変数(z_1, z_2)の平均値(μ_1, μ_2)の値を図7の潜在変数空間に●印で示す。また、各学習データのエラーバーは(z_1, z_2)の標準偏差(σ_1, σ_2)の範囲を表している。

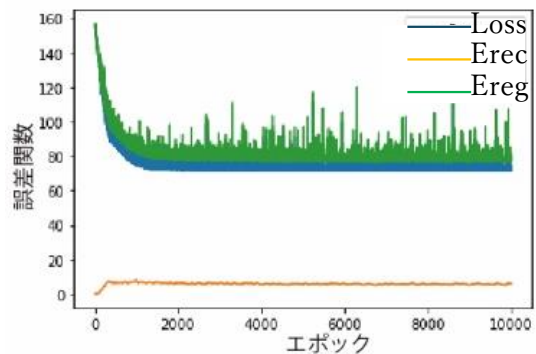


図6 誤差関数の推移

3.3 曲面生成

学習データの潜在変数の中間的な値をデコーダに入力して生成されたシェル形状を図8に示す。また、それぞれの曲面を出力する潜在変数を図7の潜在変数空間に●印で示す。例えばモデル0、モデル1とその間のA、B、C点の形状を比較すると、0→A→B→C→1のように連続的に形状が変化していることがわかる。学習データの中間的な値を入力することで学習データ間を補完するようなシェル形状が得られた。以上のようにVAEを用いることで少ない変数で多様なシェル形状を生成できることがわかる。

4 曲げ歪エネルギー率による構造評価

4.1 曲げ歪エネルギー率

VAE により生成される曲面の構造特性を評価する指標として曲げ歪エネルギー率を用いる。曲げ歪エネルギー率とは外力により生じる歪エネルギーのうち、曲げ歪エネルギーの占める割合のことであり、以下の式により定義する。

$$\beta = U_b / U = \mathbf{d}^T \mathbf{K}_b \mathbf{d} / \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (4)$$

ここで U_b は曲げ歪エネルギー、 U は歪エネルギーを、 \mathbf{d} は節点変位ベクトル、 \mathbf{K}_b は曲げ剛性マトリクス(剛性マトリクスの面内剛性を 0 としたマトリクス)、 \mathbf{K} は剛性マトリクスを表す。

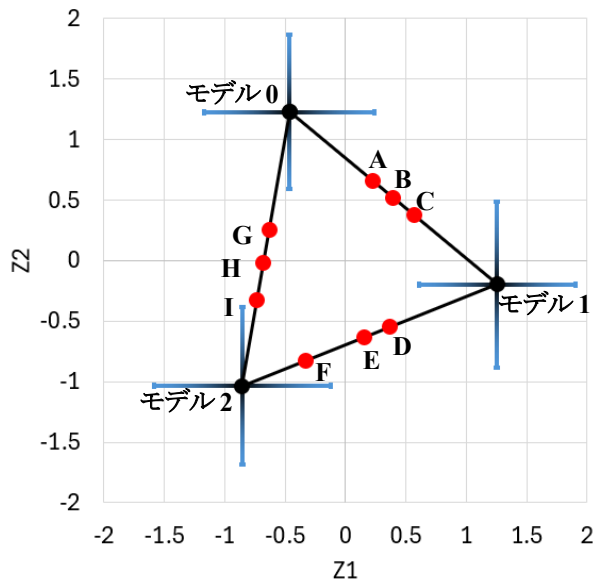


図7 潜在変数空間

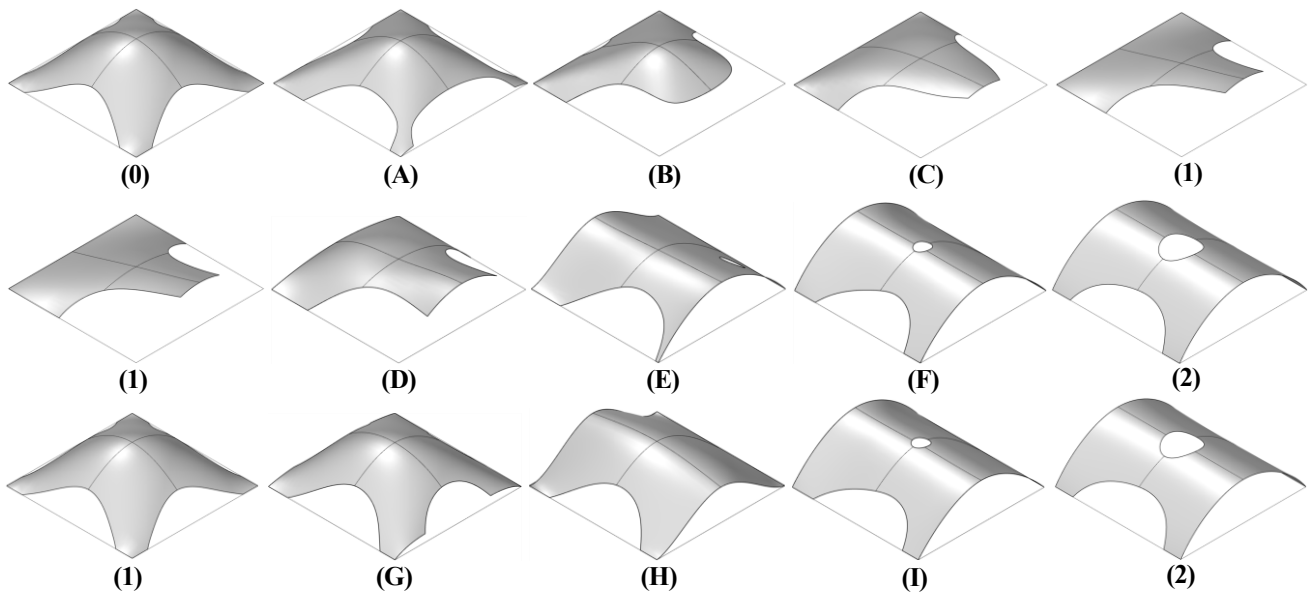


図8 復元・生成された曲面

4.2 曲げ歪エネルギー率の敏感性

生成されたシェルの形状をわずかに変化させることで得られる曲げ歪エネルギー率の変化量を計算することでその形状の敏感性(ロバスト性)を評価する。

わずかな形状変化は曲率定義曲面の制御点の z 座標を動かすことで与える。動かす制御点は図3に示す制御点のうち、支持条件が変化しないように境界条件を除いた中央付近にある9つの制御点とした。形状変化は9つの制御点座標の修正量のノルムを一定として、曲げ歪エネルギー率が最小となるように与えるものとする。この問題は式(5)、(6)で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } \beta(\Delta \mathbf{z}) &= \beta(\mathbf{0}) + \frac{\partial \beta}{\partial \Delta z_1} \Delta z_1 + \dots + \frac{\partial \beta}{\partial \Delta z_N} \Delta z_N \quad (5) \\ &= \beta(\mathbf{0}) + \nabla \beta^T \Delta \mathbf{z} \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\text{制約条件: } c(\Delta \mathbf{z}) = \Delta \mathbf{z}^T \Delta \mathbf{z} - r^2 = 0 \quad (r = 100\text{mm}) \quad (6)$$

ただし、形状変化は微小であるとして、曲げ歪エネルギー率 β を制御点 z 座標の修正増分 $\Delta \mathbf{z}$ でテーラー展開し、 $\Delta \mathbf{z}$ の一次関数であらわしている。式(6)は修正増分のノルムの大きさを一定にする制約条件であり、今回は r の値を 100mm に設定した。式(5)、(6)の問題にラグランジュ乗数法を用いると、式(7)となる

$$L(\Delta \mathbf{z}, \lambda) = \beta(\Delta \mathbf{z}) + \lambda c(\Delta \mathbf{z}) \quad (7)$$

上式の停留条件式を求めると式(8)、(9)となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} = \nabla \beta + 2\lambda \Delta \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Delta \mathbf{z}^T \Delta \mathbf{z} - r^2 = 0 \quad (9)$$

式(8)、(9)を $\Delta \mathbf{z}$ について解くと式(10)が得られる。

$$\Delta \mathbf{z} = -\frac{r}{\sqrt{\nabla \beta^T \nabla \beta}} \nabla \beta \quad (10)$$

さらに最適解における曲げ歪エネルギー率の変化量 $\Delta \beta$ は式(10)を用いて式(11)のように陽な式で求めることができる。

$$\Delta \beta = \nabla \beta^T \Delta \mathbf{z} = -r \sqrt{\nabla \beta^T \nabla \beta} \quad (11)$$

ただし、本研究では曲げ歪エネルギー率の勾配 $\nabla \beta$ は数値微分により求めるものとする。

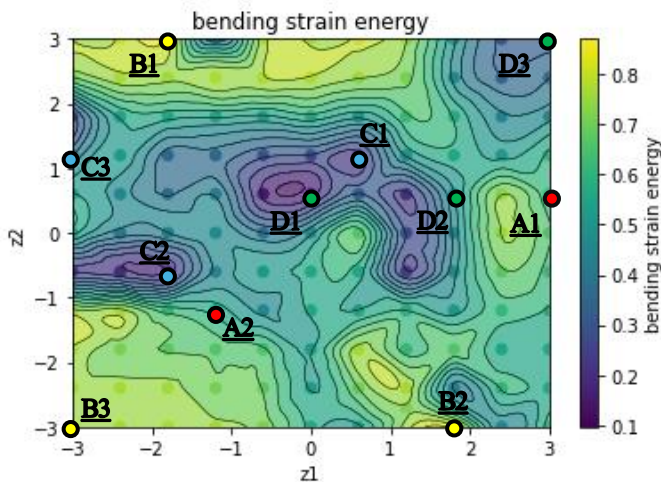


図9 曲げ歪エネルギー率 β

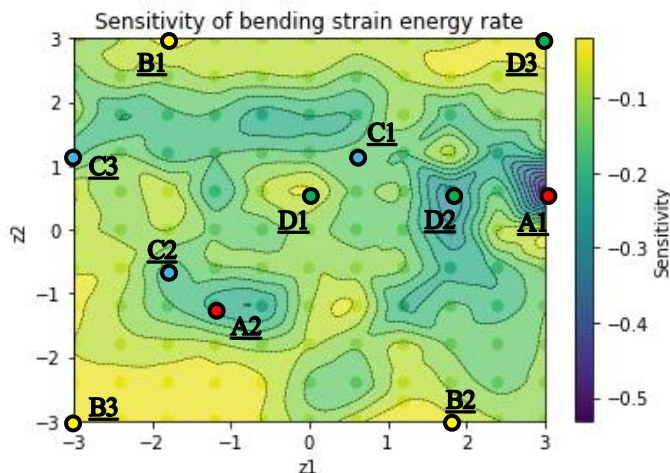


図10 曲げ歪エネルギー率の変化量 $\Delta \beta$

4.3 数値解析結果

3章ではVAEを用いることでシェルの形状を少ない変数で生成できることを示した。ここでは3.3節で学習させたVAEを用いて生成したシェルの構造特性を評価する。2つの潜在変数 z_1, z_2 を-3から3まで等間隔に11点

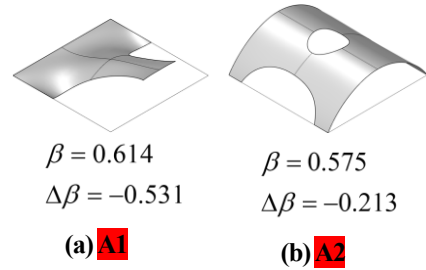


図11 β が大きく $\Delta \beta$ も大きい曲面

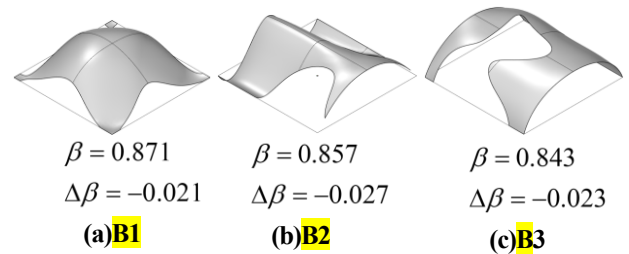


図12 β が大きく $\Delta \beta$ は小さい曲面

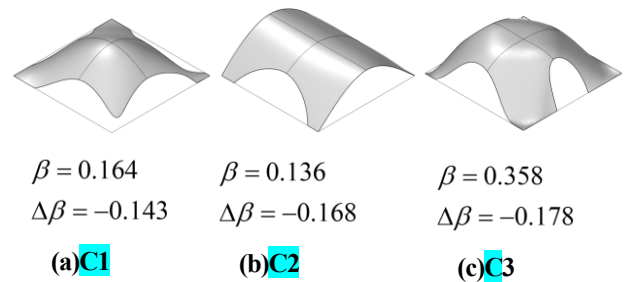


図13 β が小さく $\Delta \beta$ は大きい曲面

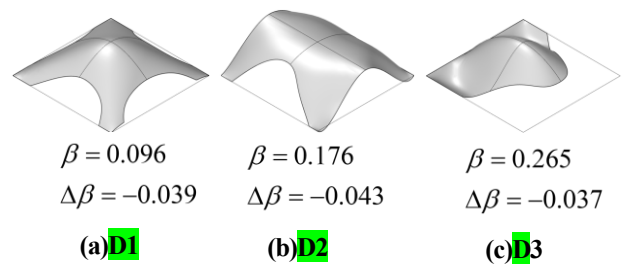


図14 β が小さく $\Delta \beta$ も小さい曲面

サンプリングし、2つの変数を組み合わせた $11 \times 11 = 121$ 組のシェルを生成した。そしてこれらのシェルの曲げ歪エネルギー率とその変化量を調査した。解析条件は、シェル厚 20cm、ヤング率 21GPa、ポアソン比 0.17 とし、 24kN/m^3 の自重を与えた。境界条件はメッシュ分割した際に、平面で見たときの外周部分において z 座標が $-50\text{mm} \leq z \leq 50\text{mm}$ の範囲にある節点をピン支持としている。

曲げ歪エネルギー率 β を潜在変数空間にコンター図として示したものを図 8 に示す。カラーバーにおいて青に近いほど曲げ歪エネルギー率が小さいことを表している。前章の条件式に基づいて計算した曲げ歪エネルギー率の変化量 $\Delta\beta$ のコンター図を図 9 に示す。カラーバーにおいて青に近いほど変化量が大きく、敏感性が高いことを表している。この 121 個の曲面の中から構造特性が特徴的なものを分析する。また、曲面生成、解析は Rhinoceros、Grasshopper 上で行った。

曲面の特性を 4 グループに分けて分析した。それぞれのグループの曲面と、各曲面の曲げ歪エネルギー率 (以下 β)、曲げ歪エネルギー率の変化量 (以下 $\Delta\beta$) を図 11 ~ 14 に示す。また、潜在変数空間における、それぞれの曲面を生成する潜在変数の位置を図 8、9 に示す。

図 11 の曲面は β が大きく、 $\Delta\beta$ も大きい曲面である。

つまり、これらの曲面は曲げ変形が大きく、形状の変化に対しても敏感にその性質が変化するため、構造的に不利な形状であることがわかる。一方向のみの曲率を持つヴォールト状の形状や大きくせり出した片持ち状の曲面があった。

図 12 の曲面は β が大きく、 $\Delta\beta$ は小さい曲面である。図を見ると支持点付近に下に凸な曲率を生じており、見るからに曲げ変形を生じやすい形状であることがわかる。これらの曲面は形状の変化に対してロバストな形状といえるが、一貫して曲げ変形が大きいため構造的に優秀な形状とは言えない。

図 13 の曲面は β が小さく、 $\Delta\beta$ は大きい曲面である。

つまり、曲げ変形は小さいが形状の変化に対して敏感にその性質が変化するため構造的に優秀な形状とは言えない。

図 14 の曲面は β が小さく、 $\Delta\beta$ も小さい曲面である。つまり、これらの曲面は安定して曲げ歪エネルギー率が低いロバストな形状であり、構造的に優秀な形状であることがわかる。曲面の広い範囲で多方向に曲率を持ち、剛性の高そうな形状となっている。

5 まとめ

シェル曲面を曲率とトポロジーの 2 つの定義曲面で表現し、それらを学習データとして用いて VAE を学習させた。それにより少ない変数で多様な曲率、トポロジーのシェル曲面を生成することができることを確認した。また、生成されるシェル曲面を曲げ歪エネルギー率を指標として構造特性を評価し、構造的に優秀な形状を探索することができた。

今回、曲げ歪エネルギー率の変化量 $\Delta\beta$ は 4.2 節により予測値を用いているが、実際の変化量を確認していないため精度について今後検討する必要がある。また、試験的にわずか 3 つの学習データ用いて実行環境の構築とその有用性を検討した。今後、実践的な曲面の数多くの学習データを用いて自由曲面シェルのデザイン手法について検討したい。

謝辞：本研究は JSPS 科研費、JP24K07770 の助成を受けたものです。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 浜田英明、大森博司：設計者の選考と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の毛構造形態創生法の提案：その 1 多目的遺伝的アルゴリズムによる発見的方法、日本建築学会構造系論文集, No.609, pp.105-111, 2006.11
- 2) 木村俊明、大森博司：形状と厚さの同時最適化法の構造位相決定問題への応用-自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案 (その 2) ,日本建築学会構造系論文集, No.648, pp.357-376, 2010.2
- 3) 永田洗大、本間俊雄：ベジエ曲線によるトリム曲面を用いた開口部を有する自由曲面シェルの形状最適化、構造工学論文集, Vol.64B, pp.515-523, 2018.3
- 4) 上村紘一、眞鍋 匡利、松本 慎也、藤井 大地：IESO 法を用いた連続体シェル構造の形態創生、日本建築学会構造系論文集, Vol.745, pp.459-465, 2018.3
- 5) G.Mirra and A.Pugnale : Comparison between Human-Defined AiGenerated Design Spaces for the Oprimisation of Shell Structures, Structures34, pp.2950-2961, 2021
- 6) 門松碧音、福田滉貴、山本憲司：曲げ歪エネルギー率を用いた自由曲面シェルの形状評価に関する研究-形状修正量を指定した形状最適化を用いた敏感性の調査、コロキウム構造形態の解析と創生 2023, pp.127-132, 2023

Folding Simulation of Square Twist Origami using Planar Tensegrity Model

Zhu Lidong 1), Zhang Jingyao 2)

1) Graduate School of Engineering, Kyoto University, Ph.D. student

2) Graduate School of Engineering, Kyoto University, Asso. Prof, Dr. Eng

1. Introduction

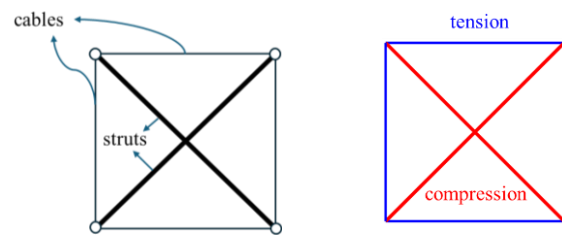
Origami is a traditional craft that involves folding a sheet of paper into two-dimensional or three-dimensional structures without cutting or gluing. Since the early 21st century, with the evolution of computers and technological advancements, origami has been explored as a research topic in many fields. For example, origami enables continuous shape transformation through unfolding and folding, allowing it to be stored and transported in the smallest possible volume. This has led to applications in deployable architectural structures and solar panels for satellites.

Along with the developments in origami designs and applications, many modeling methods have been utilized to analyze origami's kinematical and mechanical behaviors. Kinematic methods such as Spherical Trigonometry [1] and Loop Closure Conditions [2] simulate thin and rigid origami without panel deformation and thickness. They cannot capture deformations such as bending and twisting of paper panels. In comparison, mechanical methods, such as truss-based or panel-hinge models, can simulate both rigid and non-rigid origami. For the truss-based models, the folding path can be calculated by analyzing the mechanism modes if the origami is flat-foldable. However, for paper panels with more than three edges, such as quadrilaterals, the traditional truss model—with members along the four edges and two diagonals—is unstable. This instability occurs because infinitesimal rotations (mechanisms) around the diagonals exist within the triangular elements, leading to a loss of planarity. To address this issue, Schenk [3] triangulated quadrilateral facets and placed springs between two internal triangles to eliminate out-of-plane mechanisms. These springs provide a panel bending stiffness to the panel. Zhang [4] complemented a dummy point outside the triangulated quadrilateral plane to create a pyramid-like three-dimensional truss model. Both methods significantly increase the degrees of freedom, resulting in a high computational cost for the folding simulation.

This study proposes modeling panels with more than three

edges as planar tensegrity structures, which refer to those whose components (nodes, struts, cables) lie in a single plane. Specifically, quadrilateral panels are represented as X-form tensegrities (kite frames) consisting of two intersecting compressive struts along the diagonals and four tensile cables along the edges, as illustrated in Fig. 1 (a). The existence of prestress, as illustrated in Fig. 1 (b), stabilizes tensegrity structures and maintains planarity by eliminating redundant infinitesimal mechanisms. This model can also be applied to simulating non-rigid origami. Prestress in the tensegrity model provides geometrical stiffness [5] that restores planarity, similar to practical paper panels while concerning the panel bending.

This study investigates the folding behaviors of the square twist through repeated nonlinear analysis of the tensegrity model



(a) X-form tensegrity

(b) Prestress

Figure 1. Four-edge planar tensegrity model applied with incremental enforced displacement. The square twist has four types of folding motions due to different mountain-valley (MV) crease assignments, among which two are rigid-foldable, and two are non-rigid-foldable. But the non-rigid-foldable origami pattern can be modified to become rigid-foldable by augmenting a temporary diagonal crease to the central square, as shown in Fig. 2, where thick segments indicate valley creases, thin segments indicate mountain creases and the

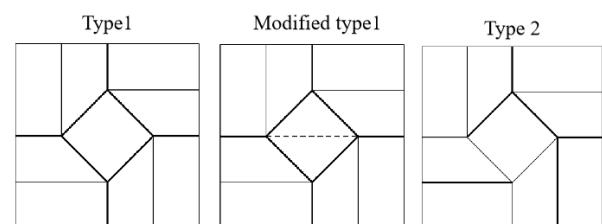


Figure 2. Classical and modified square twist origami

dashed segment indicates a temporary crease. The rigidity of modified square twists has been proven in the research of Hull [6] and Feng [7]. It is checked through the strain energy variation in this study.

This paper is organized as follows: Section 2 introduces the innovative planar tensegrity modeling method for origami and investigates the bending stiffness of a square X-form tensegrity. Section 3 presents the folding simulation method, where the folding path is derived via incremental enforced displacement and repeated form finding. Section 4 simulates the folding of (modified) square twist origami. The conclusion is drawn in Section 5.

2. Planar tensegrity modeling

In this section, we model quadrilateral papers by X-form tensegrities, consisting of two intersecting compressive struts along the diagonals and four tensile cables along the edges. We also model triangular papers as traditional trusses.

2.1 Derivation of prestress

Suppose a tensegrity model has n^e nodes and m^e members. Denoting a as a positive scalar to indicate the prestress level, the prestress $as_{\mathbf{f}}$ in the tensegrity satisfies

$$\mathbf{D}(as_{\mathbf{f}}) = \mathbf{D}s_{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

where $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3n^e \times m^e}$ is the equilibrium matrix, $s_{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{m^e}$ is a linear combination of the prestress modes which lie in the null space of \mathbf{D} . In the X-form tensegrity, only one prestress mode exists. Still, we should adjust its vector direction to ensure diagonal members are in compression, as illustrated in Fig 1(b).

2.2 Stiffness investigation of X-form tensegrity

Based on the prestress in X-form tensegrity, we construct compressive members by struts and tensile members by cables with elastic modulus of struts and cables assigned as E_s and E_c , respectively. We assume all members have a unit cross-sectional area. Tangent stiffness $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3n^e \times 3n^e}$ of tensegrity model consists of two parts: the elastic stiffness \mathbf{K}_e influenced by material properties and the geometric stiffness \mathbf{K}_g dominated by the prestress [5], i.e.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (2)$$

We impose six displacement constraints on the corners to eliminate rigid-body mechanisms, as illustrated in Fig. 3. Then, the eigenvalue decomposition of the partial elastic and tangent

stiffness demonstrates that the X-form tensegrity has one mechanism mode without prestress. However, this mechanism can be eliminated by introducing prestress.

To investigate the bending stiffness of the X-form tensegrity, we perform a nonlinear analysis where one corner is gradually lifted outside the plane. The deformation motion and force-displacement graph are shown in Fig. 3. As illustrated, we find that elastic stiffness is initially zero in the planar state and then exponentially increases when no prestress is introduced. However, non-zero stiffness can be confirmed even in the planar state after the introduction of prestress, e.g., red lines with markers in Fig. 3. Additionally, the elastic stiffness of the cables has a more significant influence on the total elastic stiffness than struts.

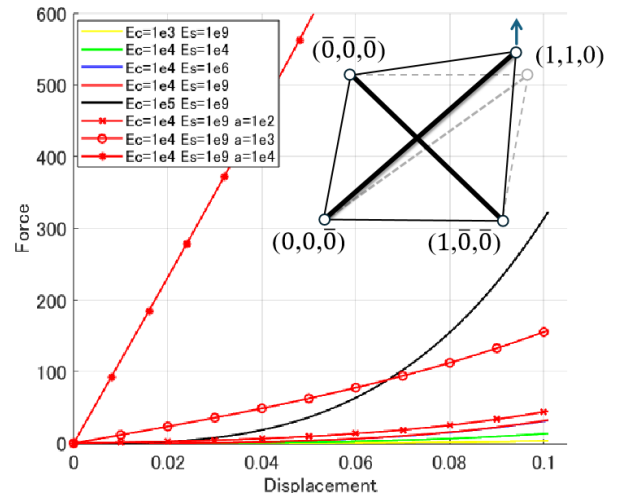


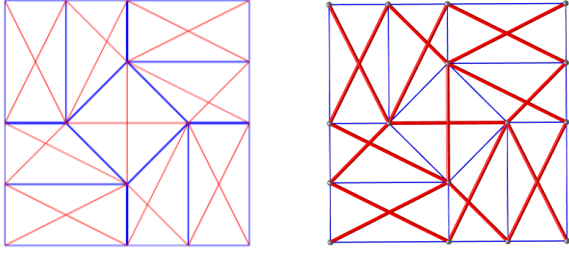
Figure 3. Bending stiffness

2.3 Assembly

We assemble the entire model and determine whether each member is a cable, or a strut based on the sign of the prestress or summed prestress in the case of shared edges. The prestress and the tensegrity model of the square twist type are shown in Fig. 4. Where red members are compressive struts, and blue members are tensile cables. To eliminate six rigid-body mechanisms, we impose six constraints on the central square, the same as the X-form model in Fig. 3. Eigenvalue decomposition of the partial tangent stiffness of this model reveals four mechanism modes, whose linear combination can form four folding motions corresponding to four types of the square twist.

3. Folding simulation via nonlinear analysis

The folding path is derived via incremental enforced



(a) Assembled prestress (b) Assembled tensegrity

Figure 4. Tensegrity modeling

displacement. This process is accompanied by large deformation and displacement. Therefore, a nonlinear analysis is necessary.

3.1 Enforced displacement

Suppose there are in total n degrees of freedom, n^f fixed degrees of freedom, and n^c enforced displacements. The equilibrium equation considering enforced displacement can be described as follows

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (3)$$

where \mathbf{K}_{ij} are the partial tangent stiffness and $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{n^f+n^c}$ are the reactive forces. $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{3n-n^f-n^c}$ are external loads applied to free nodes, which equal $\mathbf{0}$ in this study. And $\bar{\mathbf{d}}$ is the constrained displacement containing enforced displacements $\boldsymbol{\delta} \in \mathfrak{R}^{n^c}$ and the displacements of fixed nodes $\mathbf{0}$, i.e.

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

The displacements of free nodes $\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^{3n-n^f-n^c}$ can be derived as follows

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_{22}^+ (\mathbf{0} - \mathbf{K}_{21} \bar{\mathbf{d}}) \quad (5)$$

Here, in case of singularity of \mathbf{K}_{22} , pseudo-inverse \mathbf{K}_{22}^+ [8] is used instead of inverse \mathbf{K}_{22}^{-1} . Then the nodal coordinates $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{3n}$ are updated as follows

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (6)$$

3.2 Form finding

The nodal coordinate derived in Eq. (6) is merely a prediction that may not satisfy the equilibrium condition, considering that the tangent stiffness used in Eq. (3) is inaccurate in large deformation problems. We perform a form finding to

correct the equilibrium.

To do so, firstly, the unbalanced force is calculated by the force density equation [5] as follows

$$\mathbf{f} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_{21} \quad \mathbf{E}_{22})) \mathbf{X} \quad (7)$$

where \mathbf{E}_{ij} are partial force density matrices. Then the nodal displacement for equilibrium correction can be calculated as

$$\mathbf{d} = -\mathbf{K}_{22}^+ \mathbf{f} \quad (8)$$

where $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ is used. Finally, the nodal coordinates are recalculated as

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Eqs. (7-9) are repeated until the unbalanced force is close to zero.

3.3 Strain energy

For rigid fold, the strain energy of the tensegrity model remains unchanged during the folding process. However, the strain energy will change for non-rigid fold due to the extension and stretching of cables and struts. It is essential to observe the strain energy variation to check the rigidity.

We assume there are in total m members. The initial member length $\mathbf{L}_0 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ can be calculated using the member length $\mathbf{L}_p \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ after prestressing. \mathbf{L}_p are also the lengths of edges and diagonals of the crease pattern

$$\mathbf{L}_0^{-1} = \mathbf{L}_p^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{k}_0^{-1} \mathbf{S}_p) \quad (10)$$

where \mathbf{S}_p is the diagonal matrix of prestress and $\mathbf{k}_0 = \text{diag}(E_1 A_1, E_2 A_2, \dots, E_m A_m)$, here E_i and A_i represent the elastic modulus and cross-sectional area of i^{th} member, respectively. Then, the total strain energy can be obtained as

$$U = \frac{1}{2} \|\mathbf{k}_0 (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0)^2 \mathbf{L}_0^{-1}\|_1 \quad (11)$$

where \mathbf{L} are the member lengths after form finding.

4. Numerical examples

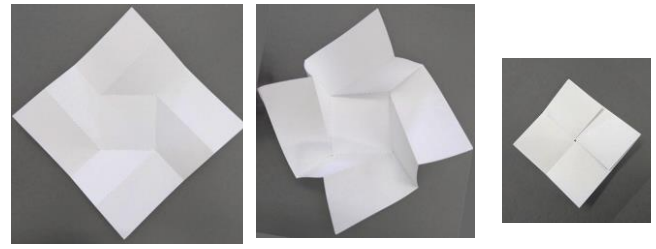
Before the folding simulation, we should determine the direction of enforced displacement. The ideal way is to find the mechanism corresponding to one of the four types as the direction of enforced displacement, which usually requests finding a particular linear combination of mechanism modes. However, it is not easy work, and non-rigid-foldable types may have no mechanism mode during the folding process. Since we

can learn the nodal positions of the folded state of the square twist from previous research, we can artificially assign the direction toward the final state. Sometimes, trial and error is required. In the following examples, Elastic moduli of cables and struts are $E_c = 1 \times 10^4$ and $E_s = 1 \times 10^9$ respectively. The cross-sectional area of each member is unit 1 and the prestress level a is 1×10^4 .

4.1 Example 1: type 1

For the type 1 square twist, as shown in Fig. 2, we find that its crease pattern is 90-degree rotationally symmetric. Therefore, we can assign the direction of enforced displacement that points from four corners to the center of the central square. The step size is $\delta = \sqrt{2}/100$. Yet, it should be noted that the model's initial state is perfectly planar, so in-plane enforced displacements will cause in-plane deformation but fold. We previously imposed a very small out-of-plane displacement on each corner to address this issue, which also helps distinguish it from other folding motions.

The folding path is shown in Fig. 5, where black arrows indicate the directions of enforced displacements. For reference, the practical fold of the type 1 is shown in Fig. 6, where the deformations of the paper panels can be observed. Correspondingly, out-of-plane displacements in planar tensegrities can be captured. The strain energy variation during the folding process is illustrated in Fig. 7. The variation of



(a) Unfolded (b) Folding (c) Folded

Figure 6. Practical fold of type 1

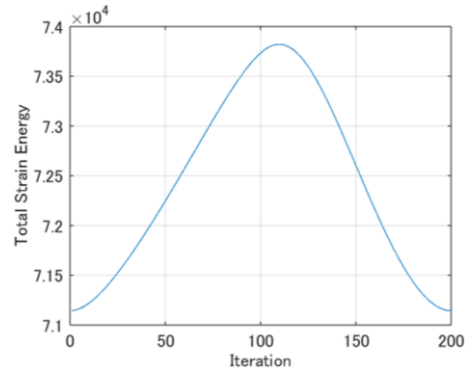


Figure 7. Strain energy variation of type 1

reactive forces of four enforced nodes are illustrated in Fig. 8. As illustrated in the figures, we find that the energy variation has two local minimums at the start and end of the folding where the reactive forces are zero and increasing. Therefore, they are in a state of stable equilibrium along the enforced direction. On the contrary, the energy variation reaches a local peak at the 110th

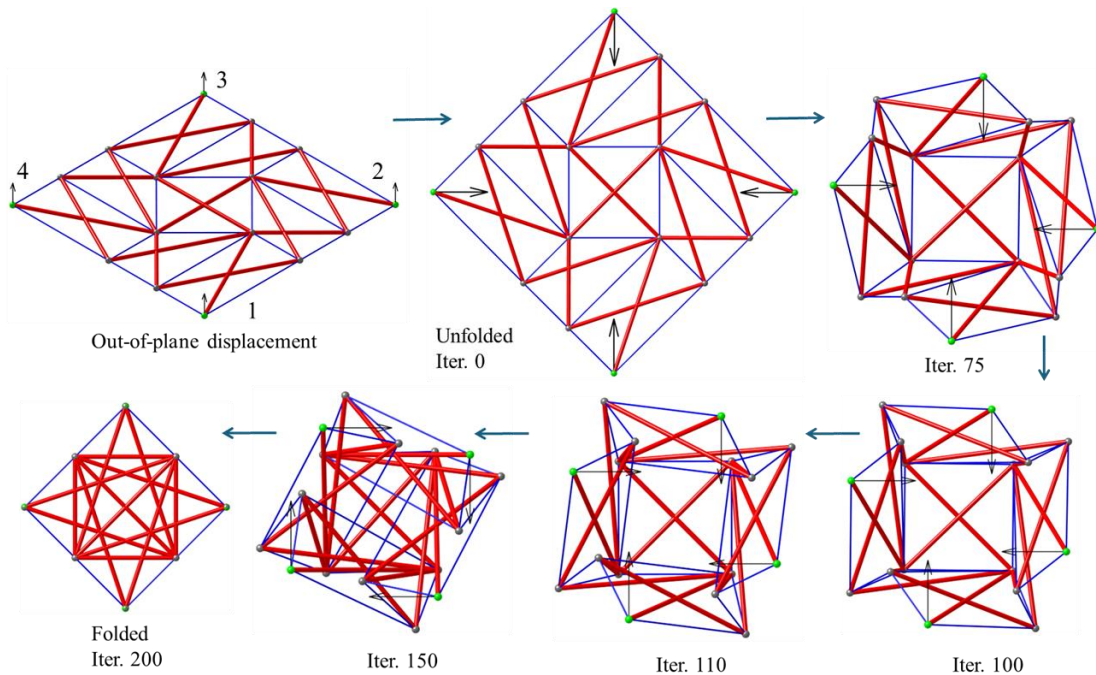


Figure 5. Folding simulation of type 1

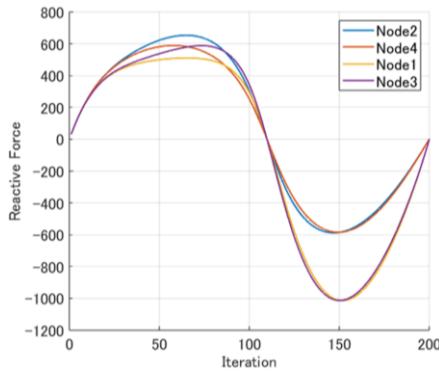


Figure 8. Reactive forces of enforced nodes iteration where the reactive forces are zero and decreasing. Therefore, it is in a state of unstable equilibrium along the enforced direction. These points can be interpreted regarding the practical folding of square twist origami. The two stable equilibrium points represent origami's unfolded and folded states, which are perfectly planar if neglecting the paper's thickness. Thus, any in-plane force cannot make the origami fold. The unstable equilibrium point represents a critical transition point for the origami. If the folding origami is released before this point, it returns to the unfolded state. However, if released after the equilibrium point, it automatically transitions to the folded state.

4.2 Example 2: type 2

In this example, we simulate the folding of type 2 as shown in Fig. 2, from which we know that the crease pattern is 180-degree rotationally symmetric. Therefore, we apply enforced displacement to two opposite corners of the unfolded paper. And we impose two opposite out-of-plane displacements to these two corners by previously learning the folding motion [7]. Other settings are the same as Example 1. The folding path is shown in Fig. 9. The total strain energy remains unchanged, as shown in Fig. 10. Therefore, there is no deformation in the papers; i.e., it is a rigid fold. The eigenvalues of partial tangent stiffness, as shown in Fig. 11, reveal one zero eigenvalue throughout the folding process. The number of mechanism modes of this

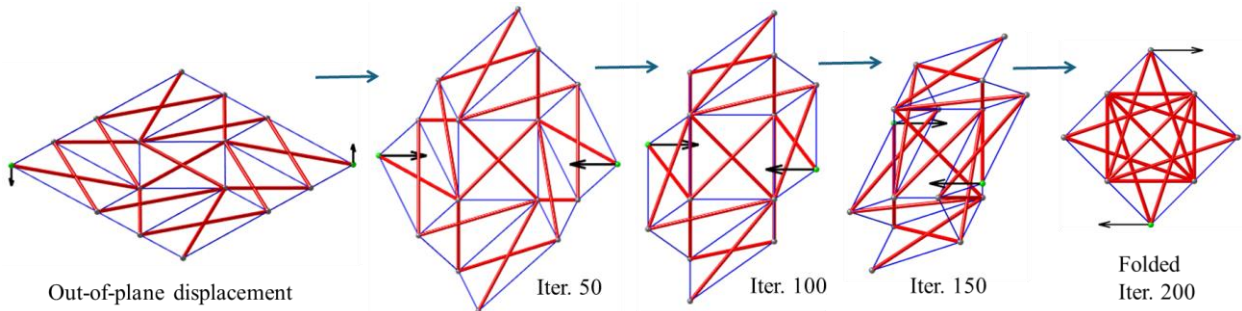


Figure 9. Folding simulation of type 2

origami changes from four to one as it folds to type 2.

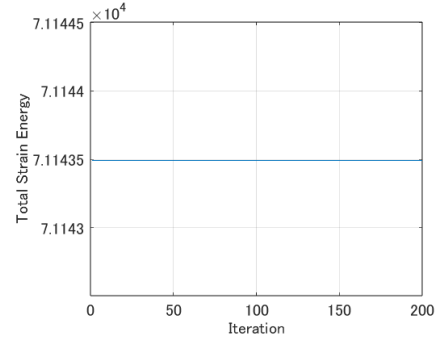


Figure 10. Strain energy variation of type 2

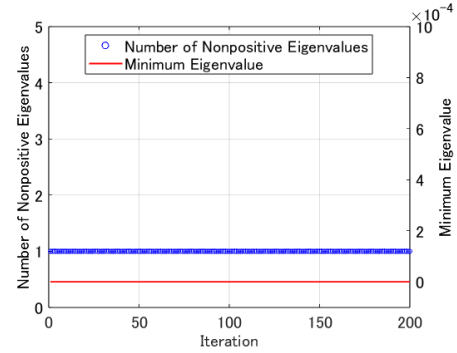


Figure 11. Eigenvalues of tangent stiffness of type 2

4.3 Example 3: modified type 1

Hull proposed the modified type 1 with a temporary diagonal crease to the central square of type 1 [6]. Hull et al. [6] built a mathematical model to prove it is rigid-foldable. The folding path using the proposed folding simulation method is shown in Fig. 12, where the folding step 1 contains 1st to 200th iterations and the folding step 2 contains 201st to 400th iterations. In step 2, we impose additional displacement constraints on nodes of the central axis. The strain energy remains unchanged during the folding process, as illustrated in Fig. 13, which easily confirms the rigidity. Still, the eigenvalues of partial tangent stiffness, as shown in Fig. 14, indicate that the origami has six mechanism modes at the initial state of modified type 1, two modes during folding step 1, and one mode during step 2 (if the threshold for defining zero eigenvalues is 5×10^{-3}).

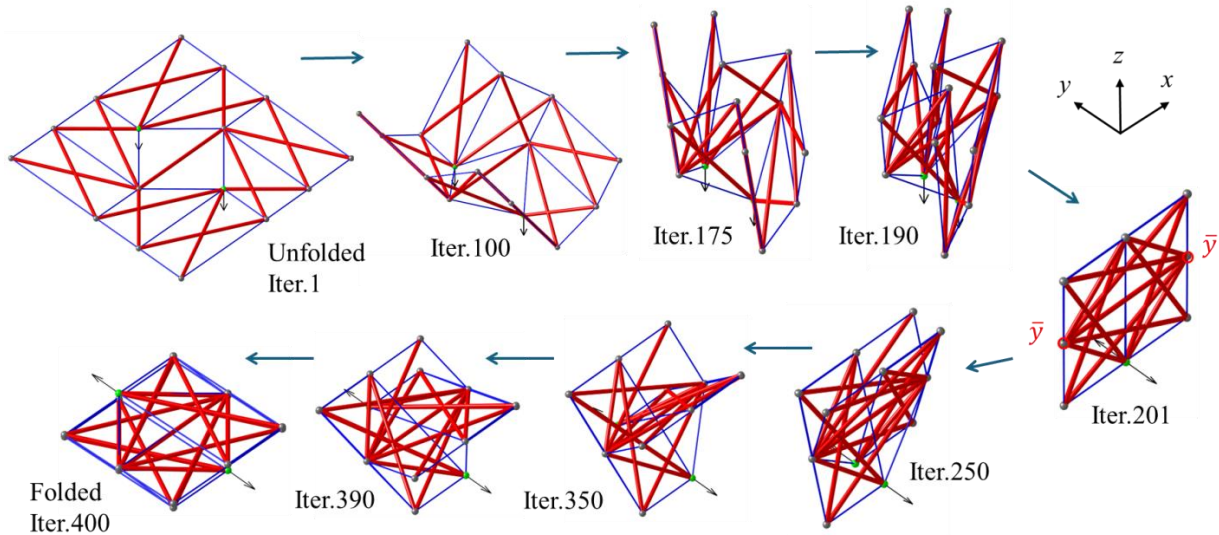


Figure 12. Folding simulation of modified type 1

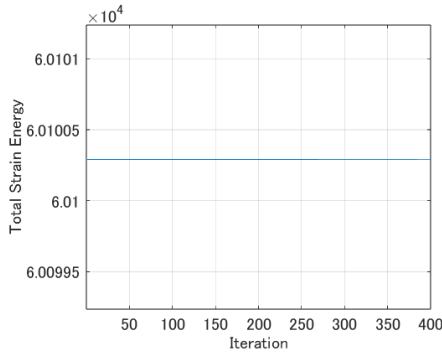


Figure 13. Strain energy variation of modified type 1

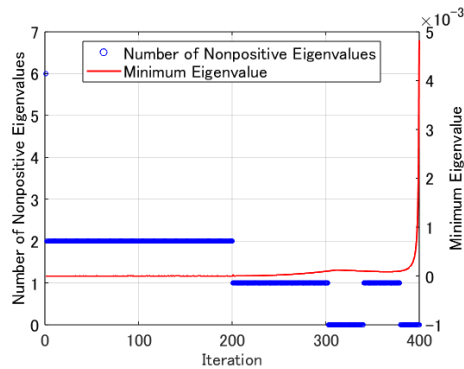


Figure 14. Eigenvalues of tangent stiffness of modified type 1

5. Conclusions

The proposed tensegrity modeling can eliminate redundant infinitesimal mechanisms. The proposed simulation method successfully simulates the folding of rigid and non-rigid square twist origami. Repeated forming findings ensure the strict equilibrium. Therefore, the strain energy variation of the origami model can easily check the rigidity. For rigid fold, the strain

energy remains unchanged. For non-rigid square twist origami, the strain energy variation reveals two stable equilibrium states, which correspond to the unfolded and flat-folded states of origami. The number of mechanism modes will change when the origami folds from the initial state to a particular rigid folding motion. Future work is to find the rigid-foldable mechanism through the linear combination of all mechanism modes, instead of enforced displacement, to direct the fold.

Reference

- [1] Huffman, "Curvature and Creases: A Primer on Paper," IEEE Transactions on Computers, vol. C-25, no. 10, pp. 1010-1019, 1976.
- [2] Tachi T. Simulation of rigid origami. *Origami*. 2009 Jan;4(08):175-87Tachi T., "Simulation of rigid origami," *Origami*, vol. 4, no. 08, pp. 175-187, 2009.
- [3] Schenk M. and Guest S.D., "Origami folding: A structural engineering approach," *Origami*, vol. 5, pp. 291-304, 2011.
- [4] Zhang T., Kawaguchi K.I., and Wu M., "A folding analysis method for origami based on the frame with kinematic indeterminacy," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 146, pp. 234-248, Oct. 2018.
- [5] Zhang J.Y. and Ohsaki M., "Stability conditions for tensegrity structures," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 11-12, pp. 3875-3886, Jun. 2007.
- [6] Hull T.C. and Urbanski M.T., "Rigid foldability of the augmented square twist," *arXiv preprint arXiv:1809.04899*, Sep. 2018.
- [7] Feng H., Peng R., Zang S., Ma J., and Chen Y., "Rigid foldability and mountain-valley crease assignments of square-twist origami pattern," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 152, Oct. 2020, Article 103947.
- [8] Ben-Israel A. and Greville T.N., "Generalized inverses: theory and applications," 2nd ed., Springer, Apr. 2006.

曲げ折り構造において初期曲げモーメントを考慮する方法

森本美羽¹⁾, 野村圭介²⁾

1)東海大学, 工学研究科建築土木工学専攻, 大学院生

2)東海大学建築都市学部建築学科, 講師, 博士(工学)

1. はじめに

著者らは, 1枚の平板に折りと曲げを混在させた構造を曲げ折り構造と呼んでいる。この構造の形態は, 曲げの方向を1方向に限定することで簡易に形作ることができると考えており, 例えば長方形の平板の短辺方向に曲げを, 長辺方向に折りを設けることで, 図1に示すような, 折板構造の各面に曲率を持たせた形態を実現できる。図1の形態においては, 各面を接合する折線は各面に対して3次元的に曲がった曲線であるため, 特定の面が面外に変形しようとする時, 折線を介して接合する面が, その変形に対して抵抗すると予想できる。これにより, 同様の形態を平面とした折板構造に比べて, 各面は面外の変形にしぶらく, また, 水平力に対しても変形しづらくなると考えられる。

なお, 図1の形態は曲げの方向が1方向であるため, 可展性を持つ。これにより, 1枚の平板に曲がった折線を設け, 強制的に曲げ変形させることで, 図1の形態を作ることができる。平板を局部的に曲げて形を作る場合, 初期曲げが部材に内包されるが, その影響は明らかになっていない。数値解析でこれを再現することは可能だが, 作られたモデルにさらに力を加えて解析することはできない。既報¹⁾では, 作成の過程で生じる初期曲げを考慮するために, 平板に強制変位を与えて目標の形状に変形させる形状解析と, 目標形状の応力解析を別に行い, 形状解析時の反力を反転して応力解析時に与える方法を提案した。しかし, 形状解析時の反力は, 仮定した材料・断面に対して不釣り合いに大きく, 強制変位の与え方に問題があったと考えられる。また, 実模型と比較しておらず, 解析結果の妥当性は検証されていない。

本研究では, 曲げ折り構造に初期曲げモーメントを考慮する解析方法として, 既報の手法を踏襲し, 実模型との比較により, 形状解析時の強制変位の与え方を検証した。なお, 図1の形態では3つの面の影響が相互に働くため, 強制変位の検証には相応しくないと考え, 図1中の水平面のみを取り出した形態(図2, 以降は座面モデルと呼ぶ)を対象とした。曲面の形状を変えて複数のモ

デルを作成し, 曲げの形態による影響も調査した。最後に, 図1の形態に対しても本手法を適用した結果と模型を比較し, 本手法の妥当性を検証した。

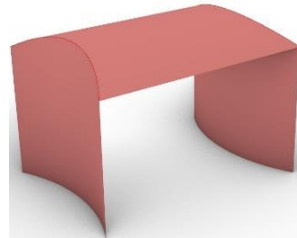


図1 曲げ折り構造

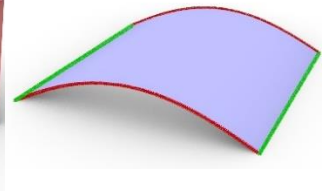


図2 座面モデル

2. 模型製作と測量方法

2.1 概要

図2のモデルを平板から作成する。赤線の境界辺は図1での折線の位置に相当し, この境界辺が固定になるように模型を製作することとした。固定辺は目標形状の曲線の形で作成した治具で, 平板部材を挟み込むことで再現した。既報²⁾でも同様の固定治具を作成しているが, 組立式としたことで微量なずれが生じていたと考えられる。製作精度に差が生まれないように, 計測基準点を設けた一体型の固定治具を3Dプリンターで作成した。模型の形状計測には Revopoint RANGE³⁾を用いた。照射した赤外線構造化光の反射をデュアルカメラで撮影して3D計測ができる。図3に各部の寸法を, 図4に作成した模型と形状計測の様子を示す。

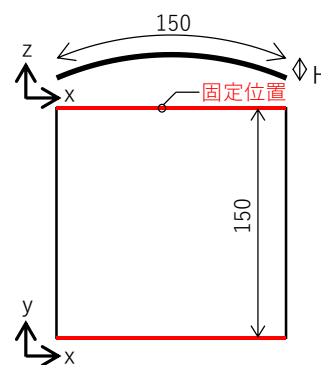


図3 模型寸法



図4 測量中の様子

2. 2 座面模型の製作方法

曲面の断面形状を変えた 7 種類の模型を作成した。1 つは円弧である。開角 $\theta=60^\circ$ 、弧長 $L=150\text{mm}$ とした。半径 r は(1)式で求めた。

$$r = \frac{360L}{2\pi\theta} \quad (1)$$

残りの 6 種類は図 5 に示す形状である。それぞれには名称を付しており、曲げが頂点に集中するように作成した R10A, そこからライズを 0.9~0.7 乗した R09A~R07A, そして, R10A と稜線位置を揃え, 同じ手順で 0.7 乗と 0.5 乗の指数とした R10B, R10C である。これらの断面形状は(2)~(4)式で求めた。

$$z = \frac{2H}{L}x \quad (2)$$

$$z = \alpha \left(\frac{2H}{L}x \right)^{0.7} \quad (3)$$

$$z = \beta \left(\frac{2H}{L}x \right)^{0.5} \quad (4)$$

ここに, z は高さ方向, x は稜線位置を 0 としたときのスパン方向の座標, H はライズ高さ, L はスパン長, α, β は R10A に対する各曲線のライズスパン比である。

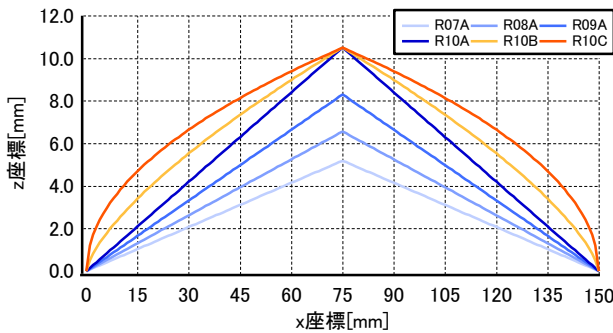


図 5 6 種類の目標断面

なお, 図 5 の形状の通りに平板を曲げると, 稜線の位置に折線ができてしまい, 模型で再現することは難しい。そこで, 図 5 の目標形状に近い形状で, より自然に曲げられる曲面形状を数値解析で求め, それを修正後の目標形状にすることとした。解析モデルの詳細は, 材料は模型と同様に厚さ 1mm の PVC ($E=3000\text{N/mm}^2$) を用い, 平板時の形状は $150 \times 150\text{mm}$, メッシュ間隔を 1mm の四角形要素で作成した。数値解析は Grasshopper のプラグイン Karamba3D⁴⁾の大変形解析を用いた。自然な目標形状を求めるために, 稜線から境界辺の間を 5 等分した位置の y 方向の辺の線上に位置するすべての節点に強制変位を与えて, 線形に補間した形状を修正後の目標形状と

した。図 6 に強制変形後の断面形状を示す。

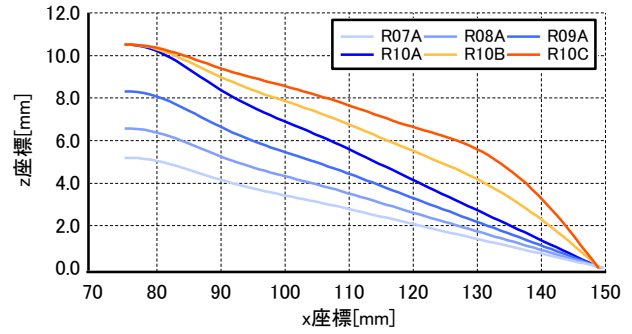


図 6 修正後の断面形状

模型は厚さ 1mm の PVC 平板で製作した。境界辺を曲がった目標形状 (円弧や図 6 の形状) になるように固定するために, 固定治具を 3D プリンターで製作した。目標形状の断面を持つ土台治具を製作し, その上に平板部材を置き, 上から拘束治具で挟み込むことで, 平板部材を強制的に曲げ, さらに土台と拘束治具をボルト留めし, 平板部材の変形を拘束した。なお, 挟み込む幅は 15mm としており, その分だけ平板部材を大きく切り出した ($150 \times 180\text{mm}$)。後述の図 9 に完成模型の例を示す。平板部材の横に位置する正方形の台は基準点のベースである。模型と解析結果を比較する際の位置合わせに用いた。

2. 3 3 つ折り模型の製作方法

本報の 4 章では, 図 1 に示すような 2 回折った曲げ折り構造に本手法を適用した結果を示している。そこで用いた模型について述べる。なお, この模型を 3 つ折り模型と呼ぶ。図 7 に各部寸法を示す。稜線での長さは, 脚部の面では 135mm, 水平の面では 150mm であり, 幅は全て 150mm である。目標曲面は開角 60° の円弧とした。曲げ折り構造の特徴として, この模型のように短辺方向に曲げ, 長辺方向に折ると, 水平の面では上に凸の曲面であるのに対し, 脚部の面は内側に凸の曲面となり, 凸の方向が反転する。脚部の端辺を固定としており, 模型での拘束方法は, 座面模型と同様に, 土台と拘束治具で挟み込み, ボルト留めで固定した。挟み込む幅も座面模型と同様に 15mm とした。面同士の接合は, ピン接合となるように, 折線の接合部に薄く柔らかい素材のテープを短辺方向に巻きつけて再現した。薄いテープに曲げ剛性は無いために面同士はピン接合となり, テープが剥がれないことで面同士が離れず, 変形は相互に依存する。

なお, この 3 つ折り模型を正しく製作するためには, 正しい折線の位置で平板部材を切り出す必要がある。この折線の位置は, 目標の断面形状である円弧を一方方向に

押し出してできる円筒状の曲面を、その押し出した方向と直交の向きに45°の角度で切断し、その切断線が折線となる。その後は、切断線を保ったまま曲面を平面展開し、その切断線で切り出すことで、正しい部材を製作した。図8に完成した模型を示す。面同士は離間しておらず、接合部分が機能していることがわかる。模型の塗装は測量のための処置であり、次節で詳細を述べる。

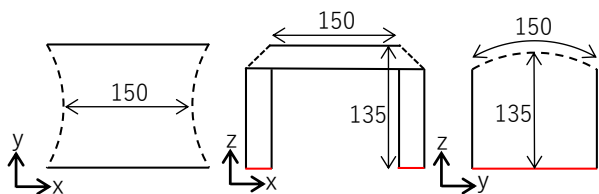


図7 3つ折り模型の寸法



図8 3つ折り模型

2. 4 測量方法と精度

模型の形状はRevopoint RANGEで計測した。計測の様子は前述の図4で示した。

RANGEは、本体から特殊な光が射出され、それを被写体が反射することで形状が計測される。そのため、PVCのように透明あるいは表面が滑らかで反射するものは測量に適さない。そこで、模型の表面をマット調なスプレーで塗装した。またRANGEでは、黒色の物体は光を反射しないために上手く測量されない。形状を計測したいPVC部分は白色で、計測したくない部分（例えば固定治具など）は黒色で塗装した。

模型製作の前後での挙動を把握するために、組み立てる前の平らな状態の平板部材に対して位置がわかるように計測点を定め、組み立て後に計測点の位置を測ることとした。図9あるいは図8で模型表面に配置されている赤点が計測点である。対称性を考慮し、4分割した領域を計測の対象とした。RANGEで計測すると、模型表面が約0.1mm間隔の点群データで出力され、各点に座標値と色のRGB値が記録される。これらの点から計測点を

探索するために、RGB値のR値が一定以上の点を抽出する。そして、相互距離が2.5mm以下（計測点の直径は2mm）の点をグループ化し、赤点内の点群の平均位置を計測点の位置とした。計測点は5mm間隔でグリッド状に配置した。なお、図8,9中の黒丸マーカーは凹凸が少なく特徴のない対象物の明確な計測位置となり、計測精度が上がる。図8,9で模型の横に位置する3つの赤点は基準点であり、模型と3Dモデルを比較する際の位置合わせに用いた。

RANGEは、照明環境、試験体との適正間隔、試験体の表面の反射率などが、計測結果の精度に大きな影響を与えるため、適切な条件を整える必要がある。本報では、室内照明、局所的なライトをつけ、撮影ブースに反射を防ぐための暗幕を取り付けた条件で統一して測量した。

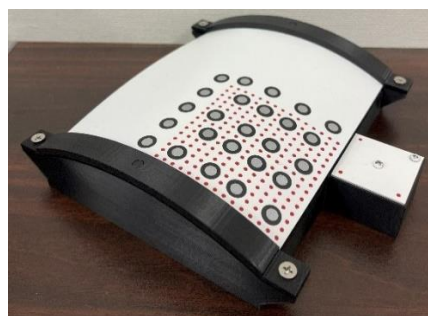


図9 計測点配置（赤点）

3. 初期曲げを考慮する方法

3. 1 解析手順

解析手順は以下の通りである。これにより、初期曲げによる影響を考慮した結果が得られる。

- ① 平板の解析モデルを目標形状になるまで強制的に変形させ、強制変位点における反力を求める。（以降は形状解析と呼ぶ）
- ② 変形後の形状で再モデル化する。
- ③ 変位を与えた辺に対して直行方向を拘束し、反力を反転して与え、さらに自重を加えて解析する。（以降は応力解析と呼ぶ）

手順①で平板が曲がるように強制変位を与えるが、その方向は、板を座屈させるように面内に与える方法と、面外に曲げる方法が考えられる。それぞれの方法を検討した。面内方向に押す方法では、円弧形状を対象に、面外方向に曲げる方法では図6で示した6種類の形状で検討した。なお、解析条件は2章2節と同様とした。

3. 2 面内方向に押す方法

面内方向タイプは、境界边上にあるすべての節点を内

側に向かって水平に変形させた。平板から円弧を作成するために必要な x 方向の変位量 Δx を、(1)式で求めた半径 r と弧長の稜線位置から境界辺までの距離 $L/2$ を用いて (5)式で算出した。

$$\Delta x = \frac{L}{2} - r \sin \frac{L}{2r} \quad (5)$$

この変位量で解析を行い、得られた応力解析の結果と模型の計測点を基準点で位置合わせし、重ね合わせると図 10 となった。解析が赤、模型が緑である。解析の結果、境界辺側が膨らみ、平板が開くように変形した。

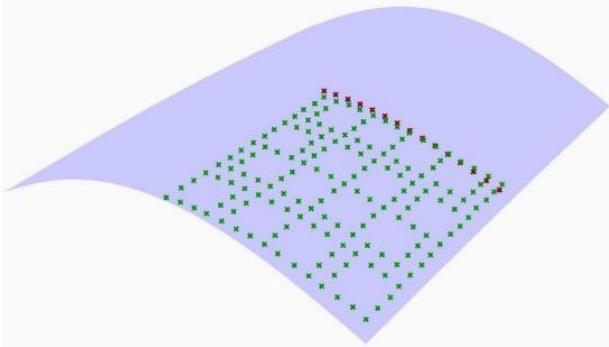


図 10 解析モデルと模型の比較

x 方向から見た図を図 11 に示す。縦軸は z 方向座標、横軸は x 方向座標であり、左端は稜線、右端は境界辺である。境界辺の変形が明確になるよう、稜線位置の x,z 座標を揃えている。図 11 より、模型は解析より上に位置し、境界辺に向かって差が大きくなり、解析は模型に比べて膨らみが足りていない。境界辺の端部を面内方向に押す方法では、目標形状の通りに変形していない。図 12 に模型と解析の誤差を示す。縦軸は誤差、横軸は x 方向の座標であり、左端は稜線、右端は境界辺である。誤差は距離で表しており、数値が正であれば模型の方が解析より上に位置する。境界辺に向かうにつれて誤差は増大し、最大で 5mm 程度と非常に大きな誤差となった。模型における境界辺付近の膨らみを解析では再現できていないことがわかる。

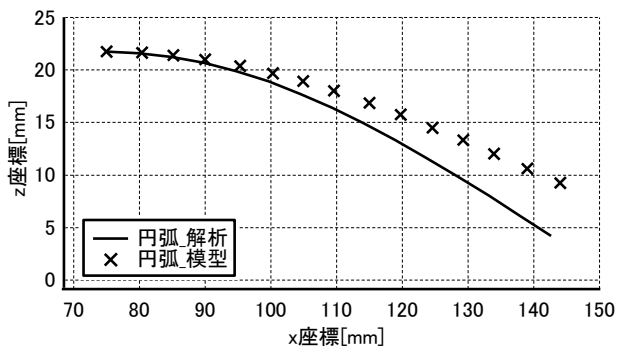


図 11 解析と模型の比較 (座面, 面内)

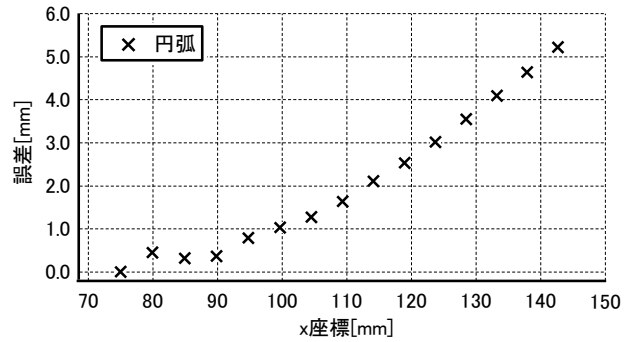


図 12 解析と模型の誤差 (座面, 面内)

3. 3 面外方向に押す方法

面外方向タイプは、稜線から境界辺の間を 5 等分した y 方向の線上に位置するすべての節点に z 方向の強制変位を与えた。対象は図 6 に示した 6 種類の断面形状である。ライズによる影響と断面形状の影響を調査した。

3. 3. 1 ライズによる影響

図 13 に R10A~R07A の比較結果を示す。ライズが低くなるほど解析と模型の差が小さくなった。図 14 に誤差を示す。ライズ変化の傾向として、ライズが高くなるほど境界辺での誤差は大きくなり、模型における境界辺付近の膨らみを解析が再現できていないことがわかる。平均誤差は R10A で 0.67mm, R09A で 0.46mm, R08A で 0.38mm, R07A で 0.21mm と、ライズが低くなるにつれて小さくなった。面外方向タイプは面内方向タイプに比べて、概ね目標形状通りに変形しているといえる。

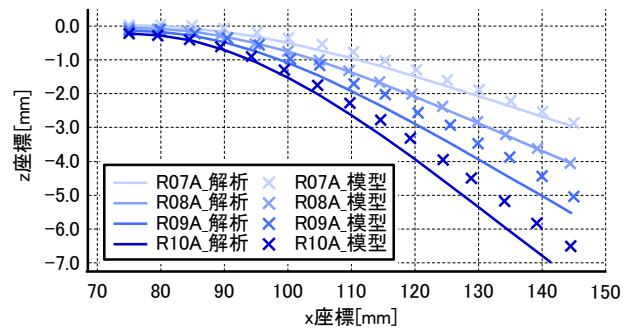


図 13 解析と模型の比較 (座面, 面外, ライズ差)

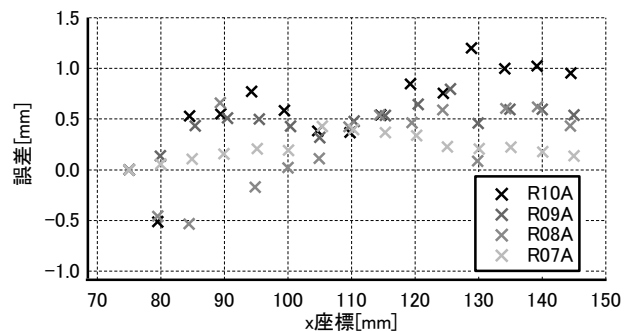


図 14 解析と模型の誤差 (座面, 面外, ライズ差)

なお模型製作後に、固定辺の稜線近傍で固定治具と平板の間に微かな隙間が確認された。拘束治具の拘束力が弱かったと考えられる。

3. 3. 2 形状による影響

図 15 に R10A,R10B,R10C の結果を示す。稜線近傍の曲率が大きい R10A から B, C と変わること、曲率の大きい位置が境界辺側に移動した断面形状である。ライズによる影響と同様に、解析は模型の変形形状を良く再現できている。図 16 に誤差を示す。平均誤差は R10A で 0.67mm, R10B で 0.34mm, R10C で 0.39mm であった。稜線と境界辺の中央付近の曲率が大きい R10B で誤差は小さい。稜線・境界辺付近の曲率が大きくなる位置では、模型との誤差が大きくなる傾向にあることがわかった。

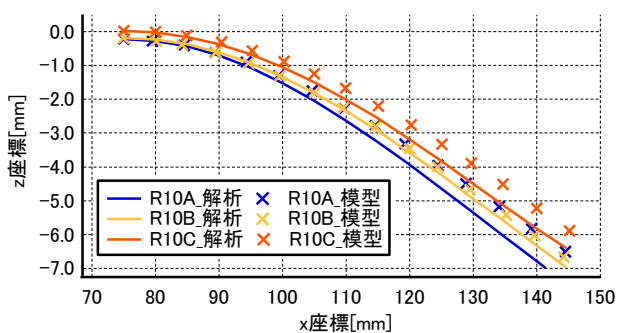


図 15 解析と模型の比較 (座面, 面外, 形状差)

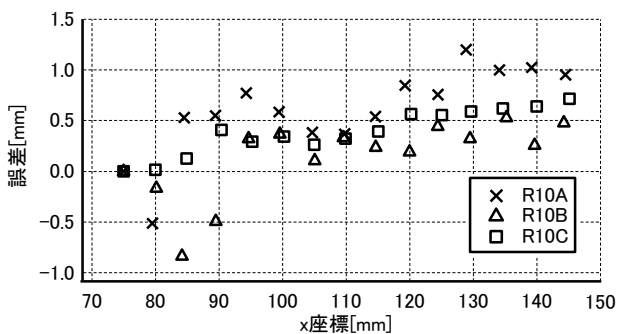


図 16 解析と模型の誤差 (座面, 面外, 形状差)

3. 4 まとめ

面内方向タイプにおいては、解析の変形不足により誤差が大きく、解析は模型を再現できていないと言える。面外方向タイプにおいては、強制変位が面外方向のみでも概ね目標形状の通りに変形しており、解析と模型の誤差は小さい。本手法の形状解析においては、面外に強制変形させる方法が妥当だと言える。ただし、ライズが高い、あるいは局所的に曲率が大きい目標断面の時に誤差が増加する傾向にある。なお、模型の拘束治具の拘束力不足による誤差があり、また、スキャン精度による誤差も見られたため、今後はこれらを改善する必要がある。

4. 曲げ折り構法への適用

最後に、曲げ折り構造に適用した例として、図 7,8 の 3 つ折り構造に本手法を適用し、模型と比較する。

解析方法は 3 章 1 節で述べた解析手順と同様であるが、この構造は 3 つの面で構成されているため、各面で形状解析を行い、それらを接合した後に、応力解析を行うこととした。各面を接合するため、形状解析後には目標形状と完全に一致した形状である必要がある。3 章で述べたように、面外方向に強制変形を与えて形状解析をすると概ね目標形状に近い形状となるが、完全には一致していない。完全に一致するように、面内と面外に同時に強制変位を与えたところ、非常に大きな反力となり、応力解析後の変形形状が現実的でない形状となった。

そこで形状解析では、2 段階に分けて解析を行うこととした。まず 1 段階目は、面外方向への強制変位を全節点与えて形状解析した。これによる反力は大きな値にならない。次に 2 段階目では、1 段階目の形状解析で得られた形状をもとに、その形状と目標形状との差分を面内方向のみに全節点与えて形状解析し、最後に 1 段階目と 2 段階目の解析で得た反力の合計を反転し、応力解析時に与える方法である。面外方向への強制変位量 Δz は(6)式で求めた。式中の x は稜線位置を 0 として各節点までの x 座標距離である。

$$\Delta z = r - r \cos \frac{x}{r} \quad (6)$$

応力解析の結果として、変形図を図 17 に示す。黒色の線は目標形状である。脚部・水平部ともに外側に膨らむ変形となり、さらに、脚部が外側に膨らむことで、水平部の境界辺上が押し上げられ、境界辺上が反りあがるような変形となった。

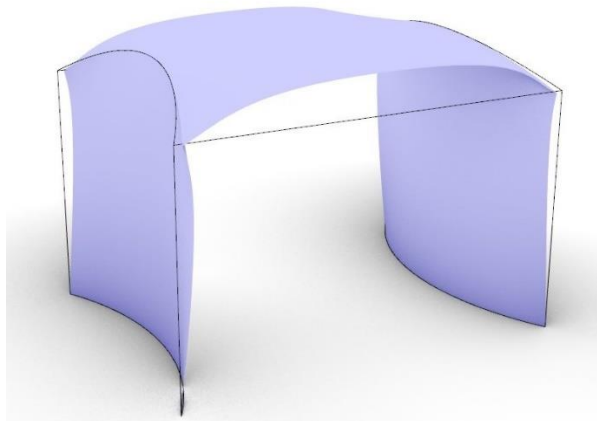


図 17 3 つ折りモデルの解析結果

図 18 は応力解析後の水平面部分における z 座標の等高線である。この図は計測領域のみを描いている。変形後の z 座標が最も小さい節点を 0 とし、そこからの各節点の座標で等高線を描いた。これを見ると、中央部分と境界辺部分に大きな差が無いことがわかる。

図 19 に模型と解析の比較結果を示す。水平面の中央列の計測点で比較しており、図中左端は境界辺、右端は稜線である。境界辺の変形が明確になるよう、稜線位置の x,z 座標を揃えている。模型の境界辺は下向きに変形しているのに対し、解析の境界辺は反りあがっていることがわかる。図 20 に誤差を示す。稜線付近での誤差は小さいが、境界辺での誤差が大きく、2mm 程度の誤差となった。

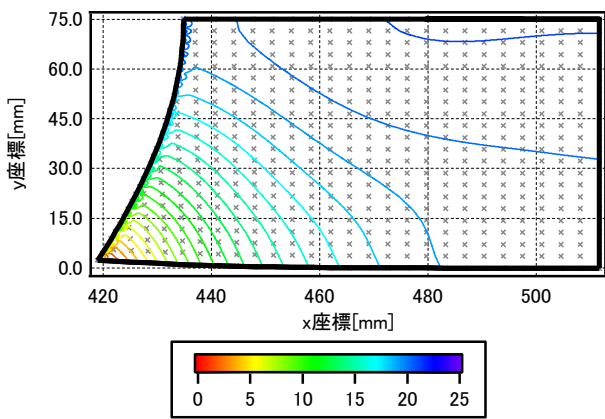


図 18 3つ折りモデルの変形形状

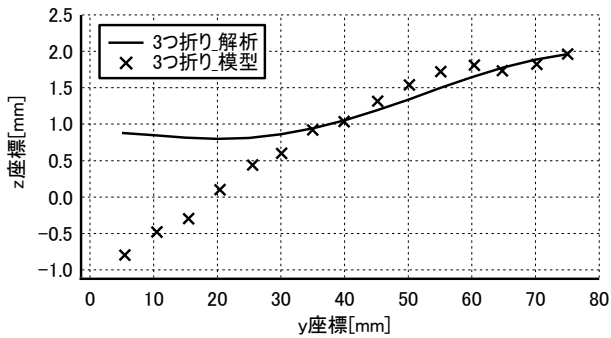


図 19 解析と模型の比較 (座面, 3つ折り)

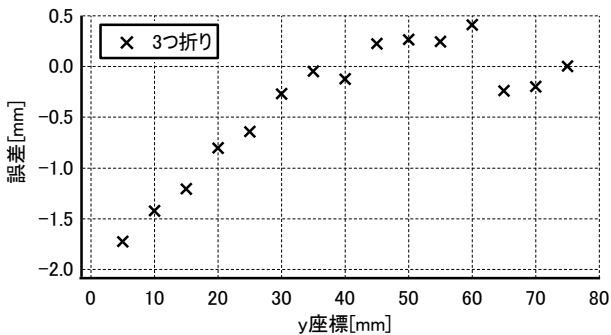


図 20 解析と模型の誤差 (座面, 3つ折り)

解析の変形が、模型と異なり、境界辺が反りあがった形状となった理由は、脚部の境界辺の膨らみが、模型より大きいことに起因している。脚部の境界辺が膨らむことで、拘束されていない水平面の境界辺が内側に押し込まれ、上に向かって膨らむように変形したと考えられる。脚部の境界辺が模型より膨らんでいたということは、応力解析時に用いた反転した反力が大きいことになり、形状解析での強制変位の与え方に再考の余地がある。

また、3つ折りの模型でも、座面模型と同様に、固定治具と平板の間に隙間があり、より拘束力が大きい治具を使用する必要がある。また、比較対象が水平面の中央の列のみであったため、脚部の変形を含めて比較する必要があると考える。

5. おわりに

様々な目標断面とした初期曲げを有する平板において、本解析手法による変形と模型の変形を比較し、本手法の妥当性と誤差が大きくなる傾向について調査した。座面モデルの面外方向タイプにおいては、本手法は妥当であるといえる。座面も3つ折しも比較対象の範囲、模型の固定方法の見直しが必要であると考え。また、誤差がばらついている部分があり、この理由はスキャン精度にあると考えられるため、精度を向上させる方法の検討も必要であると考え。

参考文献

- 1) 野村圭介：部材の初期曲げが曲げ折り構造の応力分布に与える影響，日本建築学会学術講演会梗概集，pp.1003-1004，2023.7
- 2) 森本美羽，野村圭介：曲げ折り構造の形状に初期曲げが与える影響，日本建築学会学術講演会梗概集，pp.739-740，2024.7
- 3) Revopoint:RANGE,(<https://www.revopoint3d.jp/pages/suport-download> 2024/10/16 参照)
- 4) Karamba3D : (<https://www.karamba3d.com>, 2024/10/16 参照)

3D スキャナーによる形状測定から曲げた平板の曲げモーメントを求める方法

五味雅翔¹⁾, 野村圭介²⁾

1)東海大学, 工学研究科建築土木工学専攻, 大学院生

2)東海大学建築都市学部建築学科, 講師, 博士(工学)

1. はじめに

諸岡による平板を用いて曲面構造を作成する方法¹⁾は、目標曲面を三角形平面で分割した後、各平面の形状で作成した平板部材を曲げながら重ね、重ねた平板部材同士をボルト等で固定し、それを繰り返すことで、平らな部材を使って曲面構造を作る方法である。部材となる平板が曲がりながら固定されるため、その部材には初期曲げモーメントが発生すると考えられる。この構造を実際の建築物に利用するためには、初期曲げモーメントを知る必要があると考える。

曲がった平板の初期曲げモーメントを求める方法として、既報^{2,3)}では曲げ形状を写真測量で測定し、その測定点を用いて、特定の位置における曲率を求め、その曲率から曲げモーメントを求める方法を提案した。既報では、平板を曲げる実験を行い、実測したひずみから求めた曲げモーメントと提案方法で求めた曲げモーメントを比較している。それらの誤差が概ね小さいことを確認したが、曲率を求める際に作成している補間曲面の精度に大きく依存していることが分かった。また、補間曲面は写真測量による測定点を基準としているため、その精度が大きく影響すると言える。安定して曲げモーメントを求めるためには、安定して精度の高い測量結果を得る方法が不可欠である。

既報で用いた写真測量で精度よく測定するためには、一つの模型に対して模型全体が写るように画角を考慮しながら撮影した数百枚の写真が必要であり、非常に手間がかかり、また高い練度が必要であった。これに対し本報では、3D スキャナーである Revopoint の RANGE⁵⁾で形状を測量した。これには、照射した赤外線構造化光の反射をデュアルカメラで撮影し、被写体から反射した構造化光の形状から、形状を推定する 3D 計測技術が用いられており、簡易(具体的には 200mm 程度の模型を数分で測量できる)で高分解能に測定することができた。これを用いて初期曲げモーメントが求められれば、既報の問題点を解決できる。

以上より本報では、3D スキャナーを用いて曲げた平板

の曲げモーメントを求める方法について検証した。既報と同様に、平板の曲げ実験を行い、平板上の特定の位置においてひずみを実測して求める曲げモーメントと、補間曲面上の曲率から求める曲げモーメントの比較を行い、本手法の精度を述べる。

2. 平板の曲げ実験

2. 1 実験概要

平板の曲げ実験は、形状測量とひずみ計測のしやすさを考慮して、図1に示すような、平板の試験体の両境界辺を押して面外に座屈変形させる実験を行うこととした。上を向いたコの字型の土台(図1中の黒い部材)に、薄い平板を嵌めこみ、座屈現象を再現した。この試験体に対し、ひずみ計測位置と方向を変えた2種類の実験を、座屈変形の大きさを変えながら実験を行った。



図1 座屈させた平板

2. 2 試験体

試験体には、平板時の寸法が 180×75mm で、厚さが 1mm の塩化ビニル板を用いた。この試験体が長辺の方向に面外座屈するように、コの字型の土台に嵌めこむが、座屈変形の大きさが変わるように3種類の土台を作成した。中央部が 6,12,18mm 程度の座屈変形となるように、土台のスパン長を調整した。なお、試験体の切り出しは CNC 加工機で行い、コの字型の土台は 3D プリンターで作成した。

ひずみの計測位置と向きを変え、2種類の実験を行った。1 つ目は主曲率の方向、つまり長辺方向のひずみを計測することとした。計測位置は、長辺方向を均等に 6 等分し、短辺方向の中央の線上との交点の 5 点とした。2 つ目は、主曲率とは異なる方向のひずみが計測できる

ようにした。計測位置は、対角線を引き、長辺方向の6等分線との交点とし、さらに、ひずみの計測方向は対角線の方向とした。以降は主曲率方向の計測を行った実験を実験A、対角線上を計測した実験を実験Bと呼ぶ。また、これらを正確な位置で測れるようにするため、試験体と同じサイズで、ひずみゲージを貼る位置だけ切り取られた塩ビ板をCNC加工機で製作し、ひずみゲージを貼る際には細心の注意を払って貼り付けた。

試験体とひずみ計測位置の寸法を図2に、ひずみゲージを貼った試験体を図3に示す。

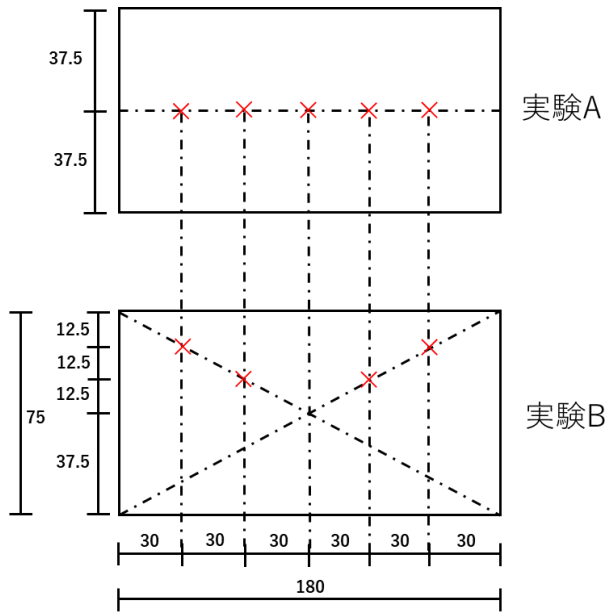
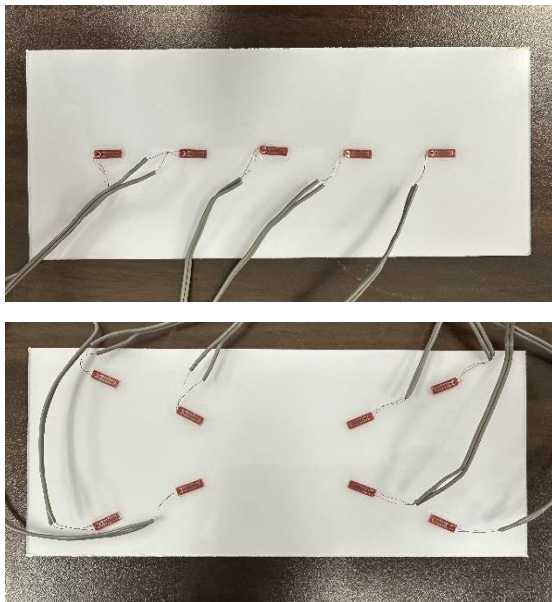


図2 ひずみ計測位置寸法



(a) 実験A (b) 実験B

図3 各実験のひずみ計測位置

2. 3 実測ひずみから求めた曲げモーメント

実測したひずみから曲げモーメントを求める方法について述べる。ひずみの計測は、試験体を平面上に置き、曲がっていない状態の計測値を0として計測を開始し、土台に嵌めこんだ後に、10秒に1度の間隔で5回分のひずみを計測した。ひずみゲージが敏感に反応するため、5回分の平均値を用いることとした。これを1セットとし、各ライズの試験体で5セットずつ計測した。図4に計測中の様子を示す。

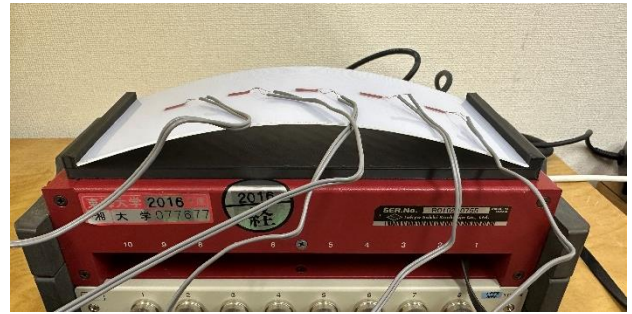


図4 ひずみ計測の様子

(1)式で計測ひずみから曲げモーメントを求めた。

$$M = \sigma \frac{Z}{b} = E \varepsilon \frac{h^2}{2} \quad (1)$$

ここに、 M は単位長さあたりの曲げモーメント、 σ は計測点の応力度、 Z は試験体全体での断面係数、 b は試験体の短辺長さ、 h は試験体厚さ、 E はヤング係数、 ε は計測ひずみである。

なお、試験体の材料定数は、既報で実施した塩ビ板の材料試験で求められた数値を用いる。ヤング係数 E は 3923.92N/mm^2 、ポアソン比は 0.39 とする。

2. 4 3D スキャナーによる形状計測

形状の測定には Revopoint RANGE⁵を用いた。この装置は、本体から射出された赤外線構造化光が被写体に反射し、被写体の形に添って反射した構造化光がゆがんだ形となり、その形状をデュアルカメラで計測し、形の推定がされる。このように、反射された構造化光が重要な意味を持つため、被写体に光沢があり構造化光以外の周囲の光を反射する、あるいは、透明で構造化光を反射しないような物体は形状測定が困難である。本実験で扱った塩ビ板は、どちらにも当てはまるため、計測ができるような工夫が必要であった。

適切な反射が為されるように、試験体をマット調な白色のスプレーで表面を薄く塗ることとした。また、試験体以外からの反射を防ぐために、暗幕で背景を覆い、試験体以外が黒色になるようにした。RANGE を用いるこ

とで試験体の表面が測定され、計測されたデータは無数の点群データ（相互の間隔は概ね0.1mm程度）として出力される。各点には座標値と色のRGB値が記録されている。本手法はこれらの点から補間曲線あるいは補間曲面を作るが、全ての点群を用いると処理に時間がかかるため、適当に粗い間隔の計測点を設けることとした。図5に定めた計測点の配置を示す。赤点が計測点である。対称性を考慮して半分だけに配置した。また、黒色枠に銀色で塗りつぶされた円は計測精度を上げるためのマーカーである。

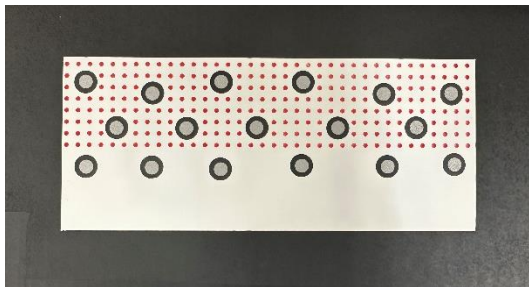


図5 計測点の配置（図中の赤点）

模型表面に計測点を正確に配置するために、試験体と同じ寸法で、計測点の位置に孔を開けた薄板を用意し、それを試験体に重ねて万力で締め、薄板の上から赤色のスプレーを吹き付け、試験体の表面に赤い計測点を塗布した。なお、計測点は5mm間隔でグリッド状に配置し、薄板の孔径を2mmとすることで、直径2mmの計測点を設けた。

RANGEで計測された無数の点群から計測点を探索するために、RGB値のR値が一定以上の点を抽出した。そして、図6に示すように、相互距離が2.5mm以下の点をグループ化し、赤点内の点群の平均位置を抽出した。

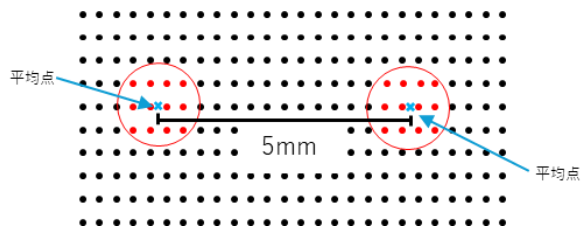


図6 点群から計測点の抽出

RANGEは、周囲の環境がスキャン精度に大きな影響を及ぼすため、適切な環境条件で計測を行う必要がある。各試験体でのスキャン環境を同一にして精度差が表れないようにした。本報では、1か所に指向性のあるライトを設け、撮影ブースに反射を避けるための暗幕を取り付けた条件で計測を行った。



図7 3D スキャンの様子

3. 形状測定から推定曲げモーメントを求める方法

3. 1 概要

3Dスキャンで得られた計測点をもとに補間曲線・補間曲面を作成し、その曲線・曲面上の曲率 κ から(2)式⁴⁾を使って曲げモーメントを求めることとした。

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad (2)$$

ここに、 κ_x は曲げモーメント M_x 方向の曲率、 κ_y は直交する方向の曲率、 E はヤング係数(=3923.92N/mm²)、 h は板厚(=1mm)、 ν はポアソン比(=0.39)である。

本報では2種類の補間方法を用いることとした。計測点の中から代表の一行を取り出し、取り出した点を通るような補間曲線を作成する方法と、全ての計測点を通るような滑らかな補間曲面を作成する方法である。次節以降で各補間方法の結果を述べる。

3. 2 曲線を用いた場合

計測点のうち、平板の曲げ方向の特定の一行を取り出し、それらを補間点としてRhino⁶⁾内のプラグインツールGrasshopper⁷⁾のInterpolate Curveですべての補間点を通る3次曲線を描いた(図8)。この補間曲線のひずみゲージ位置の曲率を求めた。ひずみゲージ位置は試験体を曲げる前の平らな状態で決めており、補間曲線上では曲線長さでその位置を求めた。実験Aの結果として、実測ひずみから求めた曲げモーメントと曲率から求めた曲げモーメントを比較し、図9に示す。

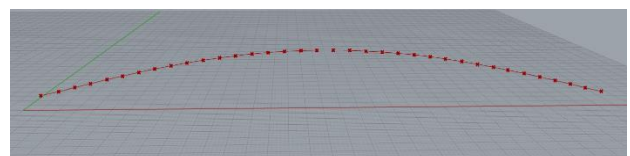


図8 補間点と補間曲線

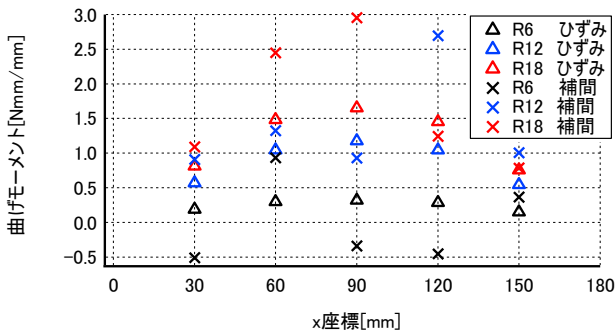


図9 補間曲線で求めた曲げモーメント (実験A)

縦軸は曲げモーメント、横軸は計測位置であり、実測ひずみの場合は△印、補間曲線の場合は×印で示した。なお、ライズ6mmで曲げた試験体をR6と呼び、ライズ12mmと18mmをR12とR18と呼ぶ。本実験は、平板の端部をピン支持して面外に座屈させているため、曲げモーメントは山なりに推移するはずである。ひずみから求めた曲げモーメントは予想通りに推移しているが、補間曲線から求めた曲げモーメントはそのようになっていない。この原因を確認するため、曲率の分布を調査した。

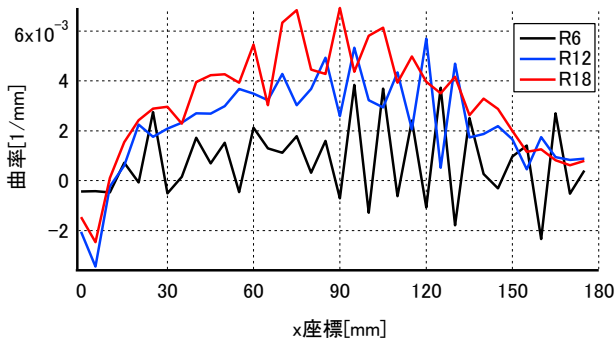


図10 補間曲線の曲率分布 (実験A)

図10に補間曲線から1mm間隔で求めた曲率分布を示す。滑らかに変化しておらず、スキャン時の微細なずれでも曲率に与える影響が大きいと考えた。そこで、スキャンを5回行い、その平均座標で補間曲線を作成することとした。計測点の順番はスキャンの度に変わるため(図11)、Excelのsort機能で並び替え、平均値を求めることとした。

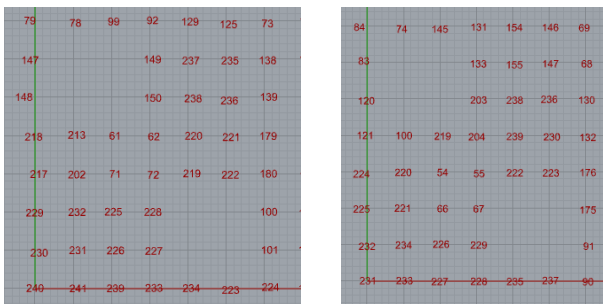


図11 スキャンの度に変わる節点番号

なお、5回のスキャン結果から1つのデータを基準として、残りの4つのデータを、各計測点の誤差の二乗和が最小となるように移動させてから平均値を求めた。平均座標から求めた曲げモーメント値を図12に示し、図13に曲率分布を示す。

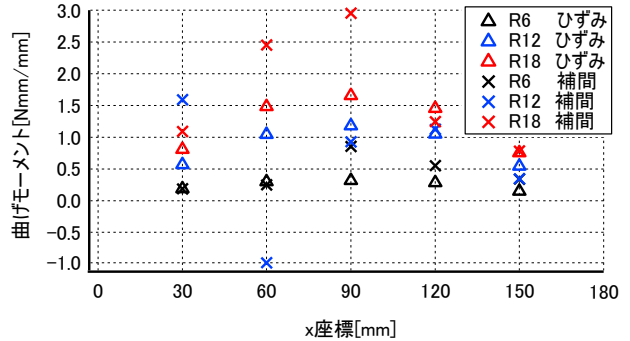


図12 補間曲線で求めた曲げモーメント (実験A, 平均座標)

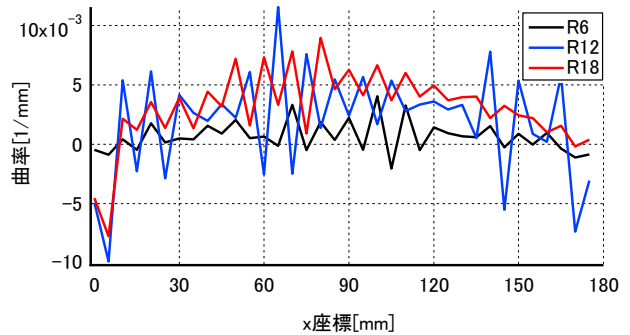


図13 補間曲線の曲率分布 (実験A, 平均座標)

平均化することで差は小さくなったが、まだ誤差が大きく、滑らかな結果を得ることができていない。補間を曲線で行うと、スキャン精度によって得られる座標値の微細なずれに大きな誤差が出るのがわかった。補間する条件を、補間点をすべて通る曲線から、すべての点を通るような曲面に変えて同じ実験を行う。

3.3 曲面を用いた場合

全計測点の平均座標を補間点として、Grasshopper⁷⁾のpatchを用いて補間曲面(図14)を描いた。補間曲面上のひずみゲージ位置で曲率を求め、さらに曲げモーメントを求めた。実験A,Bの結果を述べる。

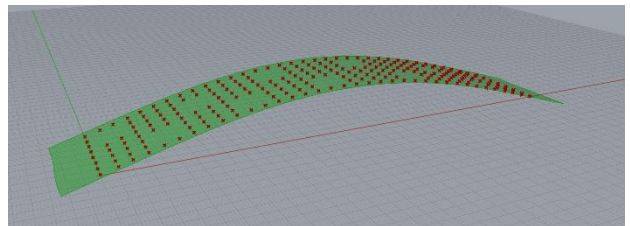
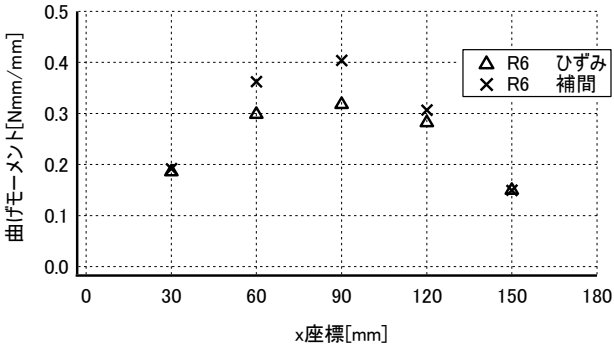


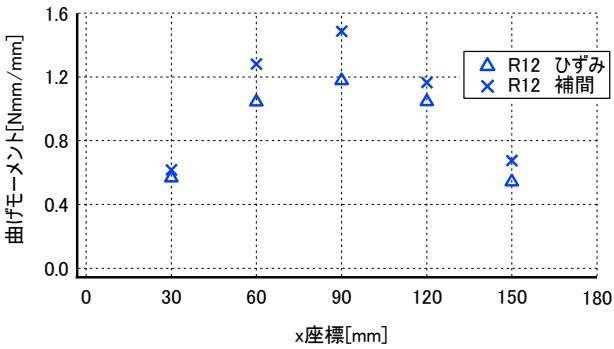
図14 補間曲面

(1) 実験 A

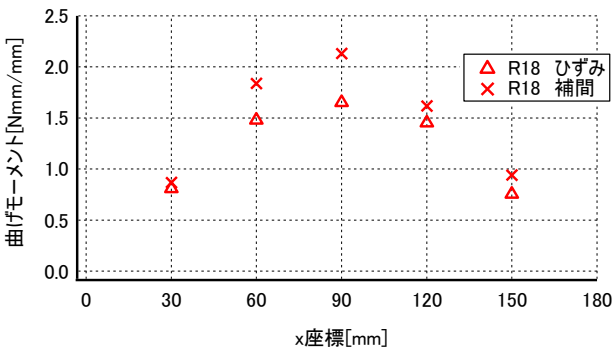
補間曲面から求めた曲げモーメントをひずみから求めた曲げモーメントと比較し、図 15 に示す。なお、すべてのライズの試験体において、得られた補間曲面の主曲率の向きは長辺方向 (κ_x) であった。短辺方向 (κ_y) の主



(a) ライズ 6mm



(b) ライズ 12mm



(c) ライズ 18mm

図 15 補間曲面で求めた曲げモーメント (実験 A)

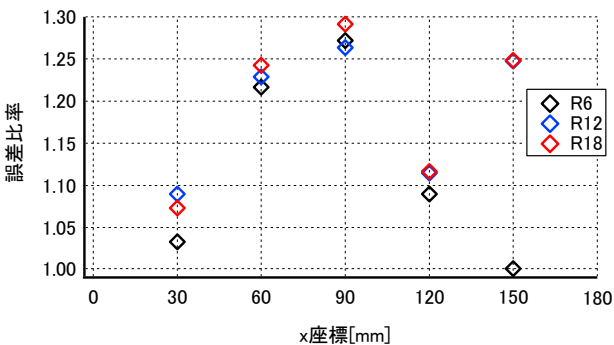


図 16 実験 A の誤差比率 (補間/ひずみ)

曲率は完全に 0 ではなかったが、微小であり、結果の曲げモーメントに影響は無いといえる。誤差比率を図 16 に示す。ひずみから求めたものより補間曲面から求めたものの方が大きい値となった。補間曲面の曲げモーメントは、分布の形はひずみの場合と概ね近い形であるが、その誤差は最大で 30%程度と大きい。右端部を除けば、ライズが変わっても誤差の大きさが同程度であり、中央とその左隣の位置での誤差が大きくなる傾向にあった。

(2) 実験 B

求める曲げモーメントの向きは対角線方向である。補間曲面から得た主曲率 (κ_x, κ_y) を座標変換し、上記の方向の曲率を求めた。座標変換は(3)式を用いた。

$$\kappa_x = \kappa_x \cos^2 \theta + 2\kappa_{xy} \sin \theta \cos \theta + \kappa_y \sin^2 \theta \quad (3)$$

ここに、 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ は x, y, ねじり方向の曲率、 κ_x は x 軸から角度 θ 回転した座標軸 X 方向の曲率である。

補間曲線から得られた主曲率を κ_x, κ_y に与え、主曲率を用いるためねじり方向の曲率 κ_{xy} は 0 とし、さらに、変換角度 θ は対角線の角度 (図 17) として、対角線方向の曲率を求めた。

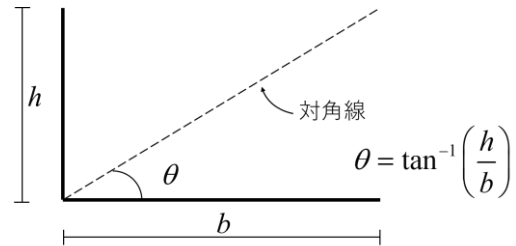
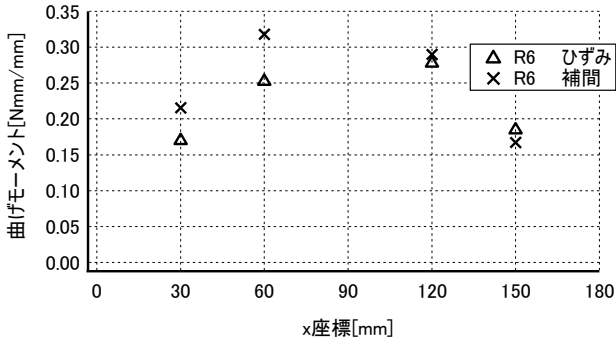


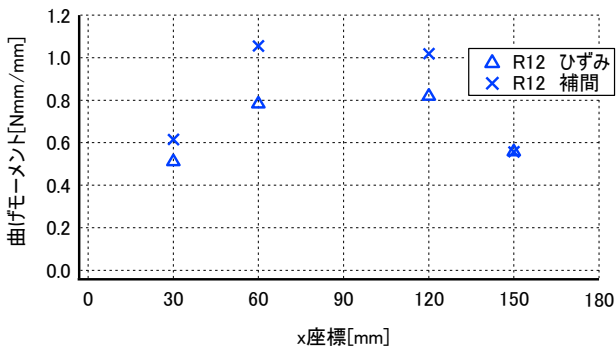
図 17 座標軸の回転

実験 B の結果を図 18 に、誤差比率を図 19 に示す。実験 A と同様に、補間曲面の曲げモーメントはひずみから求めた曲げモーメントより大きい値となった。最大誤差は 45%程度である。またライズに関わらず、左側に位置する点で誤差が大きくなる傾向にあり、これは実験 A でも同様の傾向があった。考えられる原因として、模型の形状をスキャンする際に、平板部材の左端部を土台の角に押し付け、その後、右端部を押し込んで土台に嵌めこんでいた。これは全ての試験体で同様の順序であった。このことは、右側端部の面外変形を拘束しながら座屈させたことになり、これによって平板の座屈変形は左側に偏って大きくなり、左側の曲げモーメントの方が大きくなったと考えられる。また、実験 A, B ともにひずみによる曲げモーメントが小さく評価されている可能性がある。ひずみゲージは、プラスチックなどの低弾性材料に

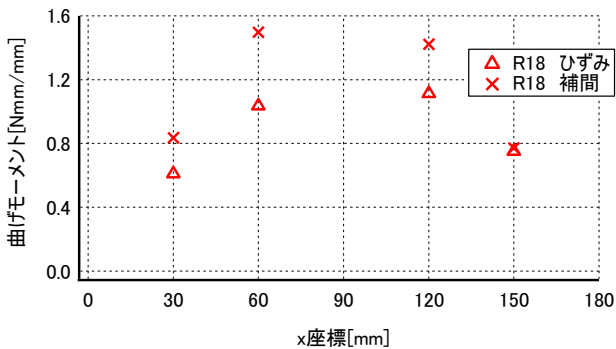
ひずみゲージを接着するとゲージ接着部の応力分布を乱し、ゲージ率が小さくなることがある⁸⁾。すべての実験結果で小さい値として得られた原因の一部として考えられる。ひずみを実測する方法や、ゲージ率の補正などは再検討する必要がある。



(a) ライズ 6mm



(b) ライズ 12mm



(c) ライズ 18mm

図 18 補間曲面で求めた曲げモーメント (実験 B)

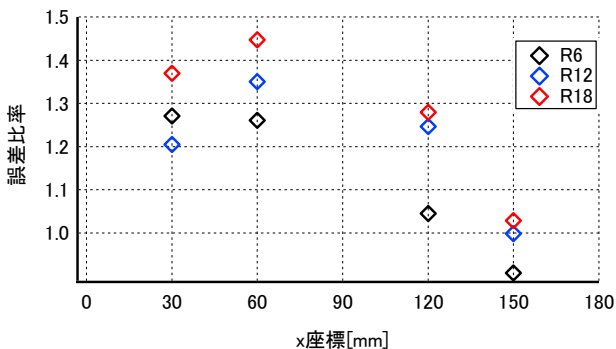


図 19 実験 B の誤差比率 (補間/ひずみ)

4. おわりに

曲げた平板を、3D スキャンを用いて簡易的に形状測定し、曲げモーメントを推定する方法において、平板上の特定の位置においてひずみを実測して求める曲げモーメントと、補間曲面上の曲率から求める曲げモーメントの比較を行った。3D スキャンのデータから精度の良い曲率を得るためには、複数回のスキャンデータから平均した座標を用い、そのすべてを通るような曲面を描く必要があることがわかった。補間曲面の精度は 3D スキャンの精度に強く依存していることがわかる。3D スキャンの精度向上が今後の課題である。

3D スキャンにより、平板の変形後の形状がわかるということは有限要素法解析で節点の変位が求められた状況と同じである。そのため、この変位を全体座標系での変位と捉え、要素剛性行列に代入することで要素内の応力が求められると考える。この方法の適用が今後の適用である。

参考文献

- 1) 諸岡繁洋: 平板とボルトによる曲面形状, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, pp.751-752, 2008.9
- 2) 野村圭介: 2方向の曲がる平板の曲げ形状による曲げモーメントの算出, 日本建築学会学術講演概要集, p p.743-744, 2019.7
- 3) 渡邊駿太, 野村圭介, 諸岡繁洋: 平板とボルトからなる曲面構造における初期曲げモーメントの算定, 日本建築学会学術講演概要集, pp.719-720, 2020.9
- 4) 半谷裕彦: 平板の基礎理論, 彰国社, pp.129-131
- 5) Revopoint:RevoScan(<https://www.revopoint3d.jp/pages/support-download>, 2024/2/5 参照)
- 6) 3DCAD ソフト Rhinoceros(<https://www.rhino3d.co.jp/2024/10/11> 参照)
- 7) Rhinoceros プラグインツール Grasshopper(<https://www.grasshopper3d.com/photo,2024/10/11> 参照)
- 8) ひずみゲージ, 測定器(https://tml.jp/productindex/strain_gauge.html,2024/10/11 参照)

すなわち、14 となっている。

$$r0x = \frac{n_{fx} - 1}{n_{fx}} \cdot \frac{n_x}{n_x - 1}$$

Z (3)

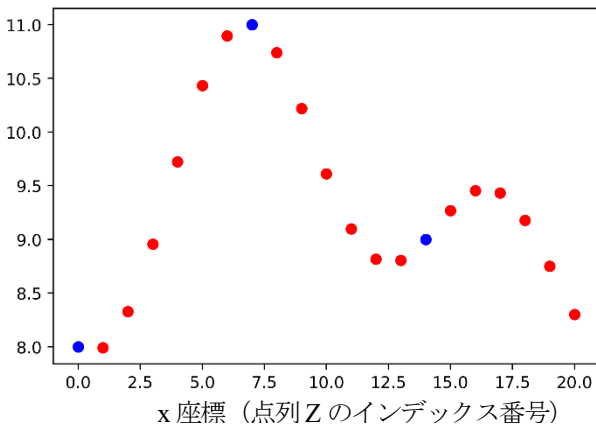


図2 式(1)と式(2)により得られた21個の点列(赤丸)と制御点(青丸)

もし、三つの制御点を点列全体の中央の点と両端の点としたいならば、次式のように、逆変換に対して、波長を $1/r0x$ 倍に拡大する必要がある。

$$Z_K = \frac{1}{n_{fx}} \sum_{l=0}^{n_x-1} Z_l e^{2\pi j(r0x \cdot l \cdot K / n_x)} \quad (K=0, \dots, n_x-1) \quad (4)$$

先述の問題に、式(1)と式(4)を適用すれば、以下のような点列が得られる。

$Z = [8.0, 7.957, 8.0840, 8.378, 8.812, 9.333, 9.876, 10.370, 10.749, 10.967, 11.0, 10.852, 10.555, 10.160, 9.731, 9.333, 9.022, 8.832, 8.778, 8.846, 9.0]$

図3(A)は、この点列を図示したものである。

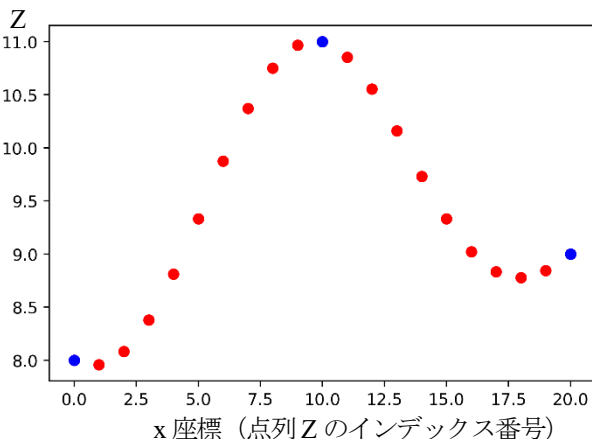


図3(A) 式(1)と式(4)により得られた21個の点列(赤丸)と制御点(青丸)

ユーザーから見て、図3(A)の曲線形状(特に、制御点での勾配)が気に入らない場合もあり得る。このような場合には、制御点座標に虚数部を追加し、複素数とすると、制御点の実数部を通り、曲線勾配の異なる曲線形状を得ることができる。たとえば、制御点の高さ座標を $Z = [8.0-1.0j, 11.0+0.0j, 9.0+1.0j]$ と指定して、式(1)と式(4)を適用すれば、以下のような点列が得られる。

$Z = [8.0, 8.246, 8.588, 9.003, 9.457, 9.911, 10.323, 10.659, 10.891, 11.004, 11.0, 10.890, 10.696, 10.449, 10.178, 9.911, 9.667, 9.457, 9.283, 9.135, 9.0]$

図3(B)は、この点列を図示したものである。

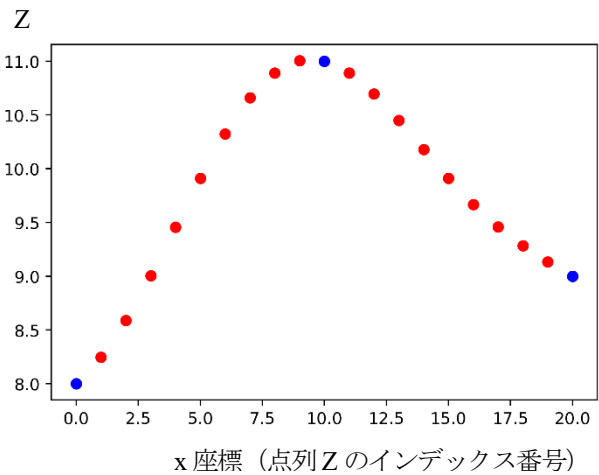


図3(B) 制御点座標に虚数部を追加した時の21個の点列の例(赤丸)と制御点(青丸)

制御点座標の虚数部が曲線形状の勾配に与える影響や数学的解釈については、文献2)に記述している。

文献4)によれば、NURBS 曲線 $C(u)$ は、次式で表せる区分有理多項式関数である。

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i \quad (5)$$

ここで、

$$R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad (6)$$

ここで、

P_i : 制御点、 w_i : 重み係数、 $N_{i,p}(u)$: ノットベクトル u で定義された p 次の基底関数

図5は、式(5)と式(6)により生成された21個の点列(赤丸)と制御点(青丸)である。計算には、文献3)のライブラリが用いられている。与えられた制御点は、 $[8.0, 11.0,$

9.0]で先述の例と同じである。曲線デグリーは、2、
重み係数は、すべて1.0、ノットベクトルは、[0,0,0,1,1,
1]である。得られた21個の点列C=[8.0, 8.288, 8.550, 8.788,
9.0, 9.188, 9.350, 9.487, 9.600, 9.688, 9.750, 9.788, 9.800, 9.788,
9.750, 9.688, 9.600, 9.488, 9.350, 9.188, 9.0]で、両端の制御
点を通るが、中間の制御点は通らない曲線となっている。

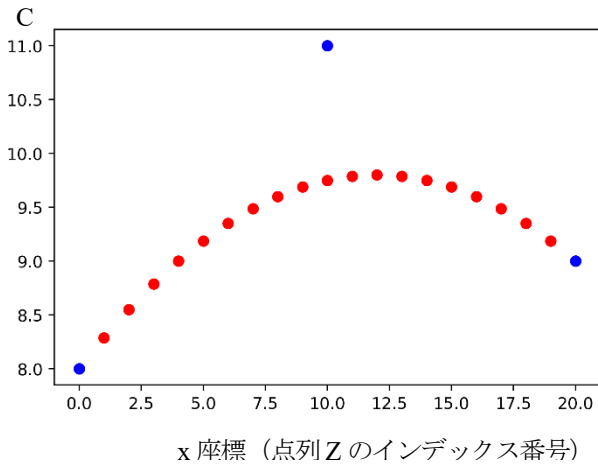


図4 NURBSによる21個の点列の例(赤丸)と制御点(青丸)

4 二次元点列(曲面)でのDFTとNURBSの比較

図5から図7は、DFTにより生成された20×20グリッドのXY平面上の高さ座標の点列(赤丸)を示している。制御点の数は、X方向nfx=3、Y方向nfy=3で合計9点であり、制御点の高さ座標は、0以上15以下の疑似乱数から生成されている。図8から図10もDFTにより生成された点列を示している。与えた条件は、nfx=4, nfy=4であること以外は、図5から図7と同じである。図5から図10はいずれも、離散フーリエ変換において、X軸方向 Y軸方向の最後の制御点位置がグリッドの終端になるように、補正係数 r0x, r0y による次式¹⁾が用いられた。

$$Z_{KL} = \frac{1}{n_{fx} \cdot n_{fy}} \cdot \sum_{I=0}^{n_x-1} \sum_{J=0}^{n_y-1} z_{IJ} e^{2\pi j(r_{0x} \cdot I \cdot \frac{K}{n_x} + r_{0y} \cdot J \cdot \frac{L}{n_y})}$$

(K=0,...,n_x-1, L=0,...,n_y-1)

(7)

$$r_{0x} = \frac{n_{fx} - 1}{n_{fx}} \cdot \frac{n_x}{n_x - 1}$$

(8)

$$r_{0y} = \frac{n_{fy} - 1}{n_{fy}} \cdot \frac{n_y}{n_y - 1}$$

(9)

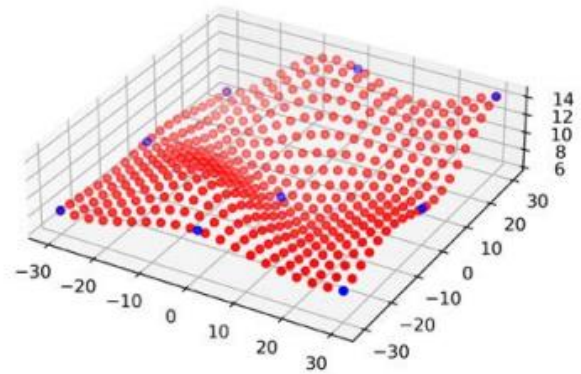


図5 DFTによる点列(nfx=3, nfy=3, 乱数列#1)¹⁾

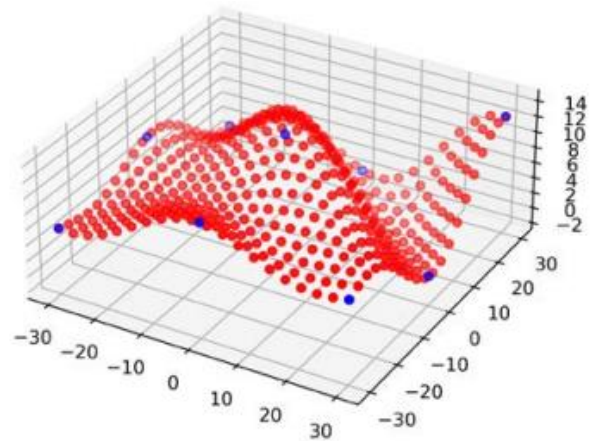


図6 DFTによる点列(nfx=3, nfy=3, 乱数列#2)¹⁾

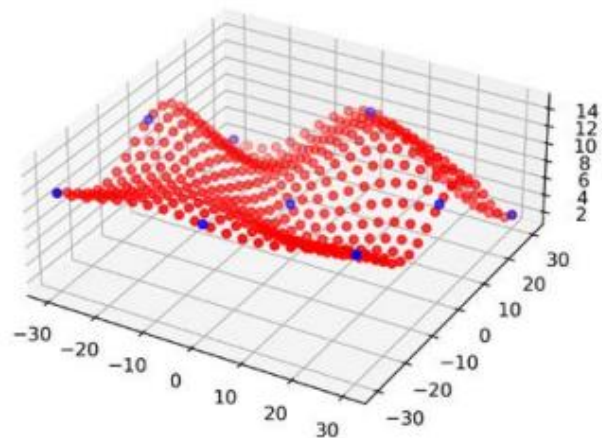


図7 DFTによる点列(nfx=3, nfy=3, 乱数列#3)¹⁾

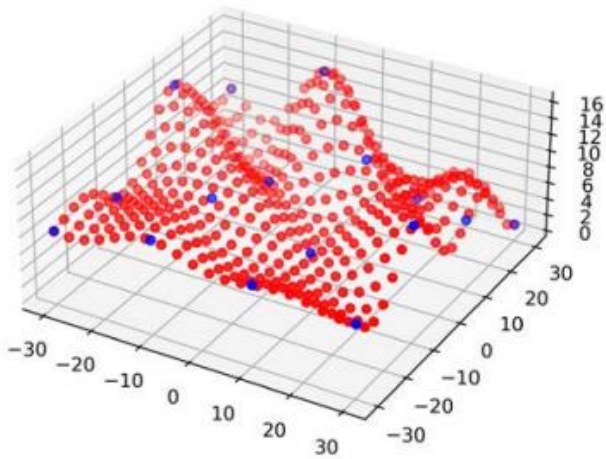


図8 DFTによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#1)¹⁾

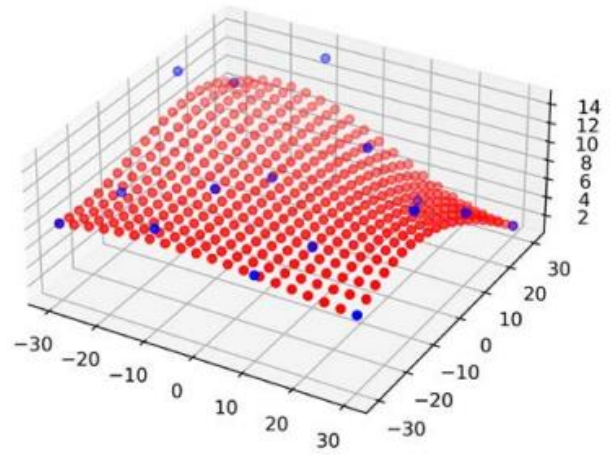


図11 NURBSによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#1)¹⁾

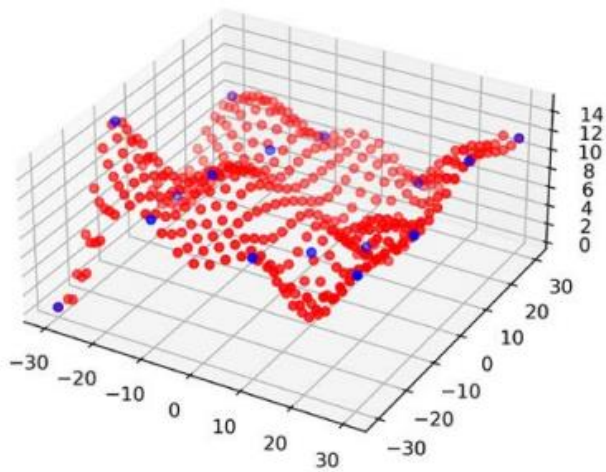


図9 DFTによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#2)¹⁾

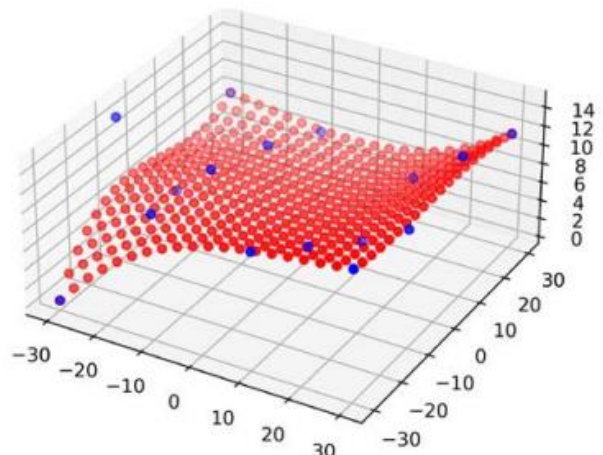


図12 NURBSによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#2)¹⁾

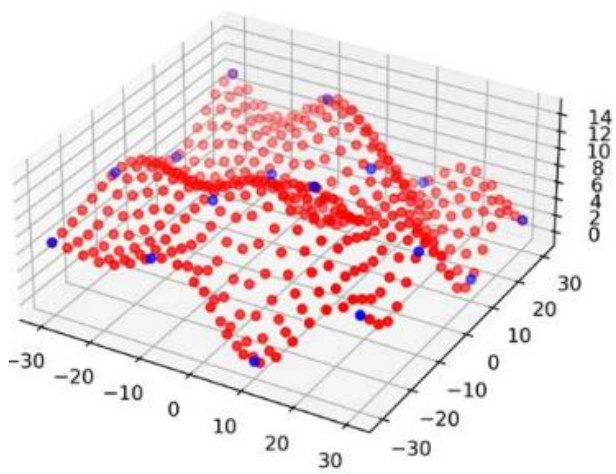


図10 DFTによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#3)¹⁾

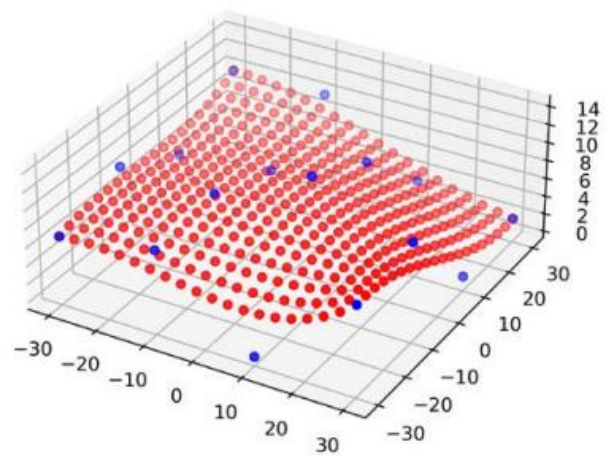


図13 NURBSによる点列(nfx=4, nfy=4, 乱数列#3)¹⁾

図 11 から図 13 は、NURBS による点列を示している。制御点の数は、X 方向 $nfx=4$ 、Y 方向 $nfy=4$ で合計 16 点であり、図 8 から図 10 の DFT によるものと同じ疑似乱数列で生成された。X 方向、Y 方向とも、NURBS の次数は 3、ノットベクトルは、 $[0,0,0,0,1,1,1,1]$ である。重み係数はすべて、1.0 である。図 8 から図 10 の DFT と図 11 から図 13 の NURBS の点列による曲面を比較すると、DFT は、NURBS よりも大きな曲率の曲面が生成される傾向にあることがわかる。

5 DFT と NURBS の二次元点列による自由曲面シェルの構造性能の比較

図 17 から図 20 は、図 5 から図 13 をはじめとする DFT と NURBS による二次元点列に基づき作成した自由曲面コンクリートシェルのすべての節点の平均鉛直たわみをグラフ化している。そのたわみは、FEM 解析ソフトウェア LISA8.0 により得られた。点列を節点とし、4 節点シェル要素が適用されている、コンクリート材料を想定し、ヤング率 20000(MPa)、ポアソン比 0.2、密度 2400(kg/m³) とした。X=-30(m) と X=30(m) の端の節点がすべての方向で固定されている。シェル厚は 300(mm)、荷重条件は、コンクリートの自重である。図 17 の水平軸は、節点の Z 座標の平均値、図 18 の水平軸は、節点の Z 座標の標準偏差、図 19 の水平軸は、シェル曲面のガウス曲率の最大値、図 20 の水平軸は、シェル曲面のガウス曲率の最小値をとっている。このガウス曲率は、離散節点座標の Rhinoceros 上での NURBS 関数へのフィッティングの後、Rhinoceros 上で計算された。これらの図から、DFT によるシェル曲面は、NURBS によるシェル曲面よりも小さ

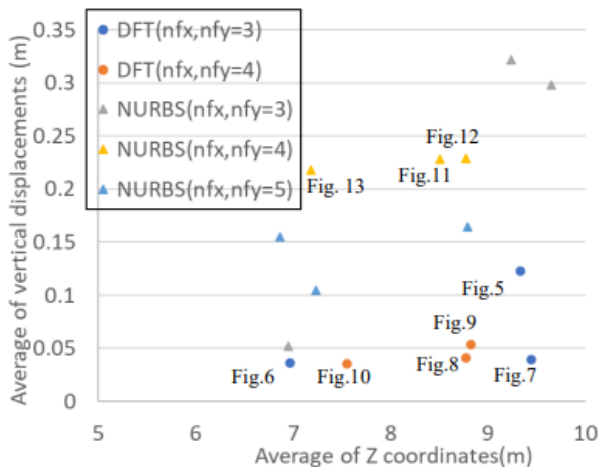


図 17 シェル節点の Z 座標の平均値と鉛直たわみの平均値の関係¹⁾

な鉛直たわみを与えているようである。ただし、両方とも、制御点数が多くなるほど、ガウス曲率が高くなり、それに伴い、鉛直たわみが小さくなっている。

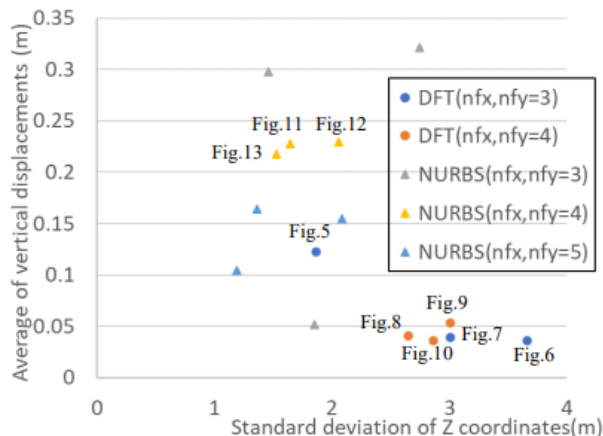


図 17 シェル節点の Z 座標の標準偏差と鉛直たわみの平均値の関係¹⁾

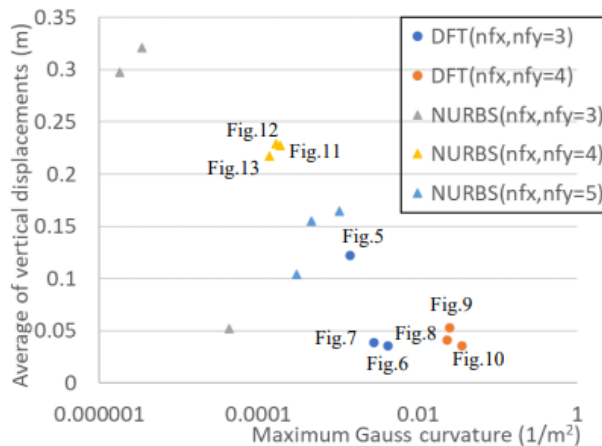


図 17 シェル曲面のガウス曲率最大値と鉛直たわみの平均値の関係¹⁾

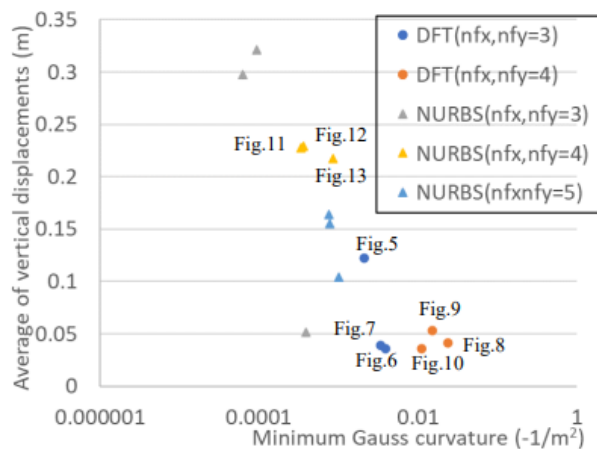


図 17 シェル曲面のガウス曲率最小値と鉛直たわみの平均値の関係¹⁾

6 まとめ

本論文では、離散フーリエ変換 (DFT) を使用した自由曲面シェルの初期形態創生技術 1)の概要を提示した。この方法を用いて、一次元点列といくつかの2次元点列による自由曲面シェルの例示を行い、NURBS による方法との比較から、形態的特徴と構造性能の考察を行った。得られた知見を以下に示す。

(1) NURBS 曲面は、中間の制御点とその曲面はある程度の距離が生じる。

(2) NURBS とは対照的に、DFT は、きわめて単純な計算過程で、すべての制御点を通る曲面を生成する。

(3) DFT は、極めてシンプルなパラメータ設定で、高曲率の表現力ある曲面を生成できる。

(4) DFT、NURBS とも、制御点の数が増えると、ガウス曲率が高くなり、それに伴い、自重下での鉛直たわみは減少する。

NURBS を用いた自由曲面シェルの最適化による形態創生は、すでに、文献 5)6)に見られる。今後は、DFT を用いた自由曲面シェルの最適化による形態創生問題も扱う予定である。

謝辞：本研究を進めるにあたり、鹿児島大学名教授本間俊雄先生と准教授横須賀洋平先生に貴重なご助言をいただきました。この場を借りて、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) K. Sawada : An Initial-Morphogenesis Technique of Free-Form Shell Roofing Based on a Fourier Transform. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 64(3), 199-210, 2023
- 2) K. Sawada : An Improved Interpolator Based on a Discrete Fourier Transform For Design Curve Generation. Available at SSRN 4801288.
- 3) O. R. Bingol and A. Krishnamurthy : NURBS-Python: An open-source object oriented NURBS modeling framework in Python, *SoftwareX*, Vol.9, Pages 85-94, January–June,2019 (DOI: 10.1016/j.softx.2018.12.005)
- 4) S. Mohan, S. H. Kweon, D. M. Lee, and S. H. Yang : Parametric NURBS curve interpolators: a review, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 9(2), 84-92, 2008
- 5) Y. Okita and T. Honma : Structural Morphogenesis for Asymmetric Free-Form Grid Shell Using NURBS with Manipulation of Decent Solutions Search, *Proceedings of IASS Annual Symposia, IASS 2016 Tokyo Symposium: Spatial Structures in the 21st Century – Form Finding & Optimization*, pp.1-9(9)
- 6) T. Kimura and H. Ohmori : Computational Morphogenesis of Free Form Shell, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 49, No. 3 December n. 159, pp. 175-180(6), 2008
- 7) W. C. James and J. W. Tukey : An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.* 19: 297-301, 1965 (DOI: 10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1)
- 8) J. O. Smith, “Mathematics of the discrete Fourier transform (DFT): with audio applications,” CCRMA, Stanford, July 2002
- 9) <https://lisafea.com/> (Final access on Oct.11, 2024)

竹稈の形態と力学的性質の関係に関する研究

永井拓生¹⁾

1) 滋賀県立大学環境科学研究院, 講師, 博士 (環境科学), nagai.t@ses.usp.ac.jp

1 序論

世界的な脱炭素化への指向や建設産業の持続化目標を背景に、竹の建築構造利用が注目を集めている。また、発展途上国を中心に世界人口は今世紀後半にピークを迎えると予測されており、今後の膨大な建設需要の一端を担う潜在力のある材料として、温暖地域を中心に広い範囲に植生する竹に対する期待は大きい。

2004年以降、竹構造物の設計のためのISOの策定が進められており、2019年に公開されたISO 22157¹⁾は、竹の物性値を得るための統一手法が示されている。これ以前にも各地の竹材について力学的特性値を実験・報告されてきた例は数多く存在するが、力学試験の方法や試料の管理方法等も様々で「アドホック」²⁾だと悲観しうる状況にあることは否めず、今後は統一的な方法により、国際的に竹の物性値を整理していく必要がある。

本研究では、竹構造の普及を目標とし、日本産竹の稈形態と力学的特性の関係について調査する。幾何学的特性として、竹稈の節の位置、稈直径・稈壁厚の稈軸に沿った変化を確認する。また、材料の物性値としては、比重、繊維平行方向圧縮強度、せん断強度、および、繊維直交方向曲げ強度・弾性率の分布を調査する。竹が繊維方向においては非常に優秀な力学的性能を持つことは広く知られているが、一方、繊維直交方向の強度や剛性は、繊維平行方向に比べ非常に小さく脆弱である²⁻⁴⁾。また、例えば、竹稈の曲げ破壊や、接合部の破壊は繊維直交方向の破壊が容易となって生じると考えられるため⁵⁾、竹を構造的に利用するにあたっては弱軸方向の力学的特性を把握することは極めて重要であるが、繊維直交方向の物性に関する研究は多くない⁴⁻⁶⁾。

本研究では竹稈の形態と力学的特性の関係について大まかな傾向を考察することを目的とする。また、竹稈において、繊維直交方向の弱点が節配置や稈形態の幾何学的操作によっていかに補われているのか、竹の植物構造としての生存戦略・最適設計の観点からも考察する。なお、本稿では竹稈の幾何学的特性と力学的特性の数理的な定式化までは行わず、さらに実験や試料の数を増やすこととあわせ、将来の課題とする。

2 材料

国内の竹林資源の分布と総量は、約15万haの竹林面積のうち約99%をモウソウチク (*Phyllostachys edulis*) とマダケ (*Phyllostachys bambusoides*) が占めており、その内訳は約3:1である⁷⁾。ハチク (*Phyllostachys nigra*) は局所的に多く植生する地域もあるが、国内の全竹林面積においては約0.4%に過ぎない。したがって、モウソウチクとマダケは、我国の竹林資源の利用という視点においてまず注目すべき竹種であると言える。

本研究で調査対象とする竹種は日本産のモウソウチクとマダケの2種類であり、いずれも滋賀県近江八幡市内の竹林 (35.15' N, 136.09' E) で採取したものである。この竹林ではモウソウチク林とマダケ林が隣接している。試料とする竹は竹齢3年以上のものとし、竹齢は竹稈表面の色等をもとに目視により判別した。また、胸高さの稈直径として、60~80 mm, 80~100 mm, 100 mm以上の3種類の区分を設け、各区分のサンプル数がおおよそ同程度になるように採取を行った。

竹の伐採の手順は、まず、竹稈の根際付近の地上に表出した不定根の直上を鋸で切断する。次に、根際から上部に向かって第一枝より上部において、根際から見ればじめて稈直径が30 mm以下となる位置まで採取する (これを最小の採取寸法とし、さらに上部まで採取する場合もある)。伐採後、雨に直接晒されない風通しのよい半屋外の保管場所にて自然乾燥させ、その後、各種の測定や加工作業、力学試験を行う。

表1に本研究で用いた竹の伐採年月と力学試験の実施年月を示す。伐採後の自然乾燥期間は4~26か月の間である。また、一部の試料に関してはホウ砂+ホウ酸水溶液による保護処理^{8,9)}を行っている。

なお、本稿で示す実験結果の一部は著者の過去に報告と同一の内容¹⁰⁾も含まれている。

表1 試料の伐採年月と試験年月

Process	Date (upper: month, lower: year)											
	7	3	4	6	7	4	9	9	9	10	10	10
Harvesting	2021	2022	2022	2022	2033	2023	2022	2022	2021	2022		
Testing	7	9	12	5	6	8	9	10	11	12		
Storage months	12	6	8	11	11	4	12	13	26	14		

*1: Treated, *2: Harvested in Uwajima-city, Ehime

3 竹稈の形態の幾何学的特性

3.1 測定方法

図1に竹稈形態の計測方法を示す。地表面上に出する不定根の直上の節の番号をNode index; $N=1$ と定義し、そこから末口に向かって $N=2, N=3, \dots, N=i, \dots$ と表す。次に、 $N=1$ と $N=2$ に挟まれた節間を Internode index; $In=1$ とし、同様に末口に向かって $In=2, In=3, \dots, In=j, \dots$ と表す。竹稈の稈軸に沿った座標 x は、 $N1$ を原点とし元口から上方に向かう方向を正とする。また、元口から末口に向かって最初に枝が生える節の Node index を $N=Nb$ と表す。

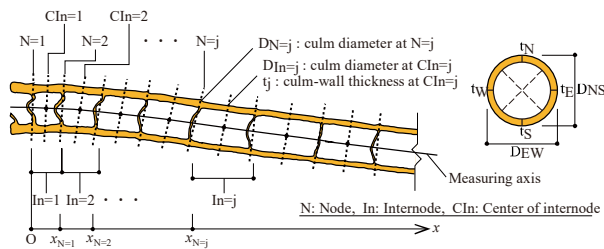


図1 竹稈の各寸法の測定位置と定義

竹稈上で測定する寸法は、節における稈直径 D_N 、節間中央における D_{In} と稈壁厚 t 、およびそれらの測定位置の座標 x である。また、節間中央の座標はとなりあう節座標の平均値とする。竹稈の曲がりや捻じれは計測せず、節間の長さは竹稈の1周に亘るおおよそ平均的な長さを採用する(図1の Measuring axis)。これらの測定は、測定範囲内にある全ての節および節間において行う。稈直径は、テープメジャーを用いて周径を計測し、円周率で除して求める。また、稈壁厚の測定はノギスを用いて行い、周径を4等分するN・S・E・Wの4点のうち2点における計測値の平均値として求める。

3.2 測定結果

図2に節間番号 In と各寸法値の関係を示す。本稿では座標 x と各寸法値の関数は割愛する。また、稈壁厚を単に D と表す場合、 D_{In} を指すものとする。

まず、モウソウチクとマダケでは竹稈の外形態に明らかな違いがあることが見て取れる。両竹種とも、節間長さ L_{In} (図2a) は根際付近でもっとも小さく、中間で最

大になり、また末口側で小さくなるという傾向は共通するものの、モウソウチクの根際付近の L_{In} はマダケのそれよりもおよそ半分程度とかなり節の間隔が小さい。

稈直径 D (同図b) は、モウソウチクでは根際付近で非常に大きく、根際から上方に向かって急速に減少するのに対し、マダケでは根際からしばらくは変化がゆるやかで、ほぼ一定の領域が存在する。大雑把には、モウソウチクは負のガウス曲率を持つラップ形、マダケは正のガウス曲率を持つ紡錘形に分類できる。稈壁厚 t (同図c) については、両竹種とも似た傾向を示しており、根際付近では上方に向かって急速に減少し、その後は変化が緩くなり、かつ直線的になる。また、モウソウチクの t は多くの試験体にわたってマダケのそれよりも大きい。

同図d~gは各計測値を基準化した結果であり、竹稈形態の幾何学的特徴がより明確に理解できる。節間長をその節間の稈壁厚で除した細長比 L_{In}/D (同図d) は、根際から頂部に向かって単調的に増大することが分かる。すなわち、節間は上部に向かって単調に細長くなる。 L_{In}/D の値は、頂部付近では両竹種とも10~16程度であるが、根際ではモウソウチクのそれは1以下であり、マダケに比べかなり短い間隔で節が存在する。

D/D_1 (同図e) は節間の稈直径を節間1の稈直径で除した比であり、 $In=1$ で1となる。同図bと比べ個体差によるばらつきがかなり小さくなり、前述したモウソウチクとマダケの稈形状の特徴の違いがより明確に表れている。Inoue et al.⁷⁾は、竹稈の形態は竹種と根際の稈直径の大きさが支配的な説明因子であると述べているが、根際の稈直径 (D_1) は竹稈全体の形態の特徴を一般化する意味で重要な指標になりうる。

同図fの t/D_1 は稈壁厚を根際直径で除した値である。両竹種ともに根際では0.12~0.18程度(平均値約0.13)で、上方に向かって急速に小さくなる。また、 $In=10\sim 20$ あたりの中間高さにおいては、モウソウチクのほうがマダケよりも大きい。同図gの t/D は稈壁厚をその節間の稈直径で除した幅厚比である。モウソウチクの t/D はマダケのそれよりも全高にわたって大きく、モウソウチクでは平均値は約0.1、マダケでは約0.08である。両種

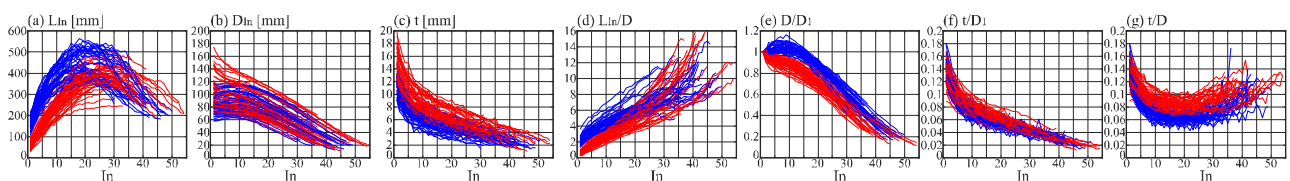


図2 節間番号 In と竹稈の各寸法値の関係 (—Madake —Moso)

においても、 t/D は根際で最大、中間で最小値となり、上方部では再び大きくなることは共通している。

図3は稈直径 D と各寸法値の関係を示している。 L_{in}/D (同図a)は4~16の範囲では D に対し単調減少の傾向があるが、それ以下では乱れており、前述のように根際付近で急激に L_{in}/D が小さくなる。

同図bは D と t の関係を表しており、 D が大きくなるにつれてしばらくは明瞭な比例的関係が見られる。しかし、根際付近では幅厚比が局所的に大きくなるため、各個体のグラフの右端がスパイク状に立ち上がっている。同図cの縦軸は t/D で、同図bの傾きに相当する。 t/D は稈長の間で横ばいとなり最小となるが、これに対応するのは根際からの稈壁厚の減少がゆるやかになるところで、 $In=5\sim20$ 程度の位置である。特に、マダケでは同範囲の稈直径の変化も比較的小さい箇所であり(図2b)、構造用部材としては使用しやすい箇所である。

なお、本研究では竹稈の稈軸に沿った不整(曲がり・ねじれ)については定量的な測定を行っていないが、モウソウチクに比べマダケのほうが比較的湾曲した箇所やその大きさも小さく直線的である。

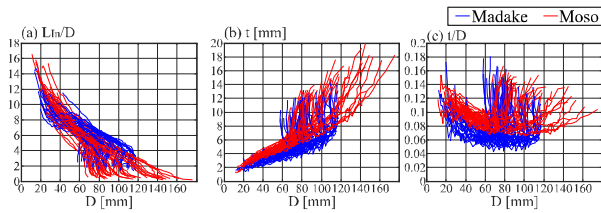


図3 稈直径 D と竹稈の各寸法値の関係

3.3 植生地域による比較

竹稈形態の規模や幾何学的特性には植生地域の違いによって差があることが予想される。しかし、個々の竹稈形態の幾何学的特性については比較的多くの研究が存在するものの¹¹⁾、測定方法が統一されていないことや、サンプル数が少ないなど、先行研究との比較が難しい。一方、Inoue et al.⁷⁾が提案する形状に関する指標 TIFF (Taper index based on form factor) は、竹稈の根際から頂部にわたる「先細り具合」を少ないパラメータで定量的に評価するという点で特筆すべき指標である。そこで、本研究の対象である滋賀県産竹の稈形態の TIFF を算出し、Inoue et al.の調査結果と比較してみる。

TIFFの定式化においては、竹稈の稈軸に沿った座標 z と稈半径 r の間に下記の関係を保定する。

$$r(z)^2 = az^b \quad (1)$$

ここで、 a, b は正の定数で、 z は竹稈の頂部を原点とし、地面に向かう方向を正とする座標である(前述の x とは逆向きである)。 a は z 軸上の任意の点の半径を指定すれば決まる。また、 b はForm exponent (FE)と呼ばれ、以下の2種類の定数から求められる。

$$\lambda_i = \frac{v}{\pi d_i^2 h / 4} \quad (2)$$

$$\kappa_i = \frac{s}{\pi d_i h} \quad (3)$$

これら2つはForm factorと呼ばれ、 λ_i は稈の体積に、 κ_i は表面積に関する定数である。また、 v, s, h はそれぞれ竹稈の外形の体積、表面積、全高である。Form factorの添え字 i は稈軸方向における相対位置を表し、 $i=0$ は竹稈頂部($z=0$)、 $i=1$ は根際位置($z=h$)である。また、これらのForm factorは下記のような平方根則で関係づけられる。

$$\lambda_i = k\sqrt{\kappa_i} \quad (4)$$

$$k = \sqrt{\frac{s}{4\pi v h}} \quad (5)$$

したがって、竹稈の形状が式(1)で表されれば、定数 k は b を用い以下のように求められる。

$$k = \frac{2\sqrt{b+1}}{b+2} \quad (6)$$

上式の通り、 k は i を含んでおらず、竹稈上の相対位置によらない定数である。以下、 k をTIFFと称する。TIFFはFE(b)に比べ変動係数が小さく、竹種の形態的特徴がより有意に検出しやすいとされている⁷⁾。

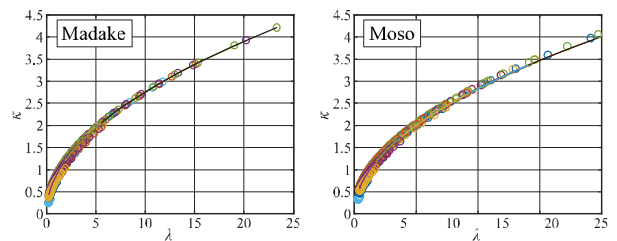


図4 本研究で用いた滋賀県産竹のForm factor

Inoue et al.⁷⁾は九州産のモウソウチク、マダケについて TIFF を算出しており、それぞれ0.873、0.897である。本研究で使用した竹についてForm factor (λ_i , κ_i)を求めた結果を図4に示す。また、同図の実線は式(4)であり、 k には上記の値を用いている。また、同図から分かるように滋賀県産竹のForm factorは九州産竹の平方根則曲線

によく整合しており、決定係数は両竹種とも 0.9 以上となっている。すなわち、TIFF の観点からは、先行研究と本研究の竹の外形はよく似ており、幾何学的に高い相似性が認められる。したがって、本研究で用いた試料という極めて限定的な比較ではあるものの、竹稈の外形に産地による差は認められないと言えよう。

4 竹の力学的特性値

4.1 力学試験の方法

図 5 に力学試験の試験体の採取・作成方法を示す。竹稈の全長にわたる力学的特性値の分布を調査するため、竹稈を均等長さの segment (区間) に分割し、各区間から試験体 (節なし) を採取し力学試験を行う。区間の長さ L_s は、採取した竹稈の第 1 枝節 Nb より下部の長さを 3 等分した長さとし、根際から Nb までを区間 1~3 に分割する。また、Nb より上の竹稈についても同様に L_s の長さで分割し、元口側から区間 4, 5, ... と定める。以上の方法で、採取した竹稈を均等な長さの区間に分割する。

力学試験は、まず竹稈の曲げ試験から行う。この試験は微小変形領域の繊維平行方向の曲げヤング係数を求めるのが目的であり、試験体に弾性比例限以上の応力や損傷を生じないように行う。試験方法は既報¹²⁾を参照されたい。その後、竹稈を区間に分割し、各区間のおおよそ中央付近から竹稈を輪切りした試験体 (節なし) を採取し、その区間の代表する試験体とする。

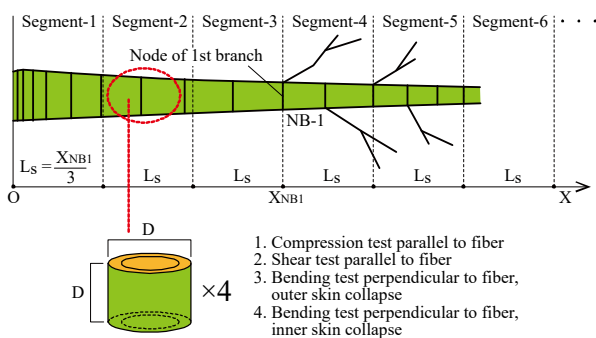


図 5 力学試験体の種類と採取方法

調査する力学的特性値は、 $E_{m,0}$: 竹稈の繊維平行方向のヤング係数 (本稿では E_b と表記する場合もある)、 $f_{c,0}$: 繊維平行方向の圧縮強度 (節なし)、 f_v : せん断強度 (節なし)、 $f_{m,90}$: 繊維直交方向曲げ応力度 ($f_{m,90,out}$: 外皮引張曲げ強度、 $f_{m,90,in}$: 内皮引張曲げ強度)、 $E_{m,90}$: 繊維直交方向曲げヤング係数である。

調査対象の力学的特性値としてこれらの項目を選択

した理由は以下の通りである。まず、いずれの試験も試験体サイズが小さくかつ同じ寸法 (試験体長さ L ≡ 稈直径 D) であるため、1 つの竹稈から多くの試験体を得ることができる。次に、 $f_{c,0}$ は比重や引張強度、曲げ強度と相関が大きく^{2,11)}、竹稈の全高にわたる繊維平行方向の物性値の変化を把握するのに有用である。また、 f_v と $f_{m,90}$ は稈壁の繊維に直交する面の強度であり、竹稈の各種の崩壊モードがこれらの応力に起因する 경우가多く、設計において決定的となる場合が多い。例えば、著者ら⁹⁾は、丸竹稈の曲げ破壊は、竹稈の曲げに伴って生じる Brazier 効果 (断面の扁平化) によって、稈壁外表面の繊維直交方向の曲げ破壊が要因となることを確認しており、 $f_{m,90}$ は丸竹稈を曲げ部材として用いるにあたっては特に重要な物性値だと考えられる。

本研究の力学試験の方法は基本的には ISO 22157¹¹⁾に従うが、繊維直交方向曲げ試験 (Edge bearing test) については、同 ISO の方法ではなく、著者らが考案した試験体にあらかじめ曲げヒンジを設けたヒンジ付き繊維直交方向曲げ試験⁹⁾により行う。

各種の力学試験を行った後、試験体の含水率 MC と全乾比重 ρ_0 を計測する。これらの計測についても、同様に ISO 22157 に従った方法で行う。

表 2 各試験体の含水率 MC の平均値 [%] と変動係数 CV

Storage period	Madake		Moso	
	Mean	CV [%]	Mean	CV [%]
4~11 months	18.5	38.5	17.9	57.5
12~14 months	14.2	51.6	16.6	38.5
26 months	9.7	32.7	10.1	3.8
Bamboo pole bending test				
2~11 months	33.9	47.2	28.7	66.6
12~14 months	19.1	48.5	14.8	40.3
25 months	12.2	12.7	9.5	4.4

4.2 力学試験の結果

表 2 は試験体の MC の平均値と変動係数をまとめたものである。自然乾燥期間を 3 つに分け平均値および変動係数 (CV) を示しており、下段は竹稈曲げ試験体、上段がそれ以外の試験体である。小片試験体は試験後に試験体をまるごと乾燥し MC を計測するが、竹稈曲げ試験では 1.6 m 程度の長さの試験体から小片を抽出して MC を計測する。したがって、後者は必ずしも試験体の全長に亘る MC を代表する値とは言えず、ばらつきが大きくなる傾向がある。曲げ試験の試験体では乾燥期間 1 年以内のものは MC の平均値は 10~29% であるが、その他の試

験体においてはMCの平均値は10~18%程度である。

図6にMCと各特性値の関係を示す。全体的にMCが小さくなるほど強度・剛性のいずれも上昇する傾向にある。また、試験体のMCは10%前後に多くの試料が集中すると同時に、その範囲では特性値のばらつきも大きくなっている。同図gに示すように、曲げ試験体はその他の試験体に比べMCのばらつきの範囲が大きい。これは、曲げ試験の試験体サイズ(約1.6m)に対しMC測定に用いた試料が比較的小片であるためと考えられる。

図7に全乾比重 ρ_0 と各特性値の関係を示す。また、図7~9中の直線はモウソウチク、マダケの最小二乗近似による回帰直線、Rma, Rmoは図の縦・横軸のパラメータ間の相関係数(絶対値)である。 ρ_0 と各特性値には明らかな正の相関があり、なかでも $f_{c,0}$ は最も相関係数が大きく、比例関係が明瞭に認められる。その他の特性値はややばらつきが大きい。特に、 $E_{m,0}$ については、MCと同様に比重を測定した試料が試験体サイズに対し相対的に小片であることが影響している。また、繊維直交方向の特性値(c~f)についても、 $f_{c,0}$ と比べばらつきは大きいものの、同様に正の相関が確認できる。

図8に節間番号Inと各特性値の関係を示す。曲げ試験

体は全長1.6m前後の竹稈を用いて行うため、試験体に複数の節間を含むため、同図には含まれていない。同図gはInと比重 ρ_0 の関係であり、竹稈の根際から上部にかけて比重が大きくなるのが分かる。この傾向はモウソウチク、マダケに限らず多くの竹種に共通する性質として知られており^{2,11)}、竹稈の上部ほど単位断面積あたりの特性値が優秀になる理由である。ただし、図8に比べ散布図のばらつきが大きく、力学的特性値の説明変数としては、 ρ_0 のほうが優秀と考えられる。

図9に節間の稈直径Dと各特性値の関係を示す。稈直径は根際から上部にかけて小さくなるので、基本的には各特性値とは負の相関を持つ。同図gの横軸 D_{av} は曲げ試験体の両端の平均値である。両竹種ともに、 D_{av} と $E_{m,0}$ の間には特に明瞭に直線的な負の相関が確認でき、相関係数も大きい。その他の特性値はややばらつきが大きくなるが、繊維直交方向の内皮引張曲げ強度 $f_{m,90,in}$ はややばらつきが小さく、相関係数も $E_{m,0}$ に次いで大きい。

竹の強度や剛性が元口から末口に向かって増大する性質は、南米でもっとも一般的な構造材であるGuaduaをはじめ、多くの竹種においても確認できる特徴である。この理由は、竹稈の断面積における維管束の密度が頂部

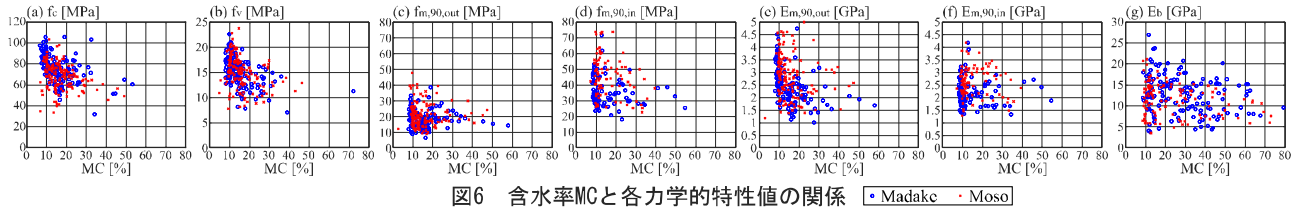


図6 含水率MCと各力学的特性値の関係 (● Madake ● Moso)

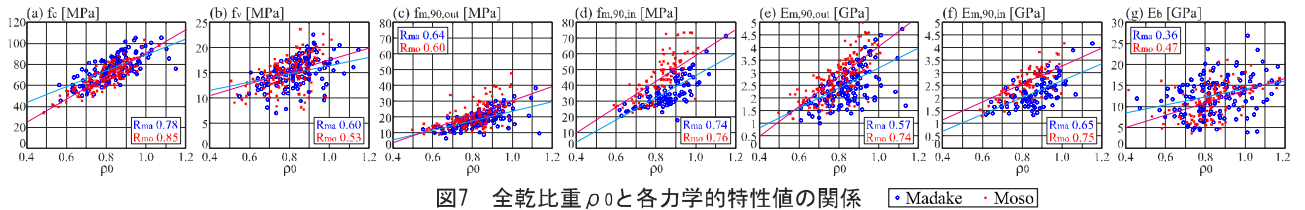


図7 全乾比重 ρ_0 と各力学的特性値の関係 (● Madake ● Moso)

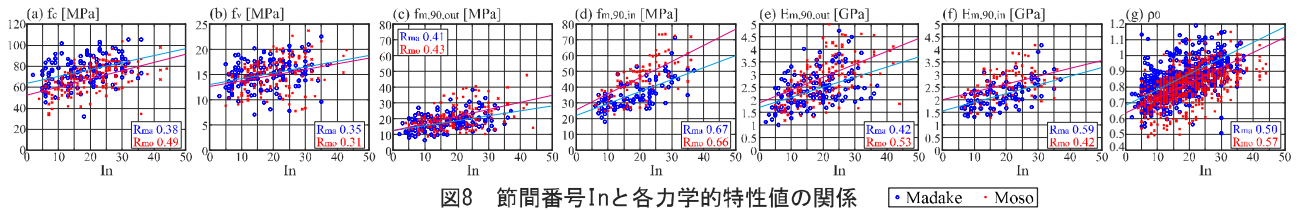


図8 節間番号Inと各力学的特性値の関係 (● Madake ● Moso)

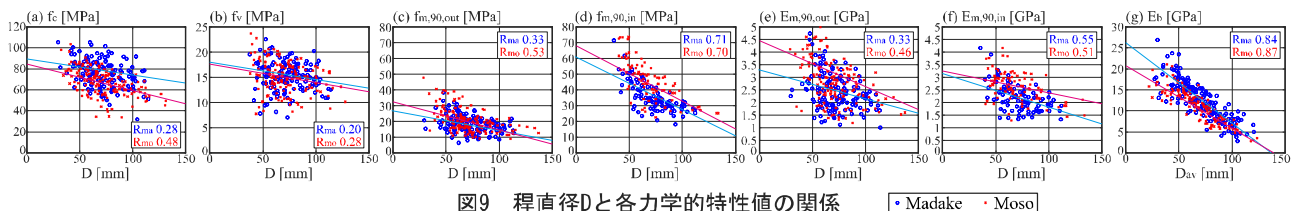


図9 稈直径Dと各力学的特性値の関係 (● Madake ● Moso)

に向かって増大するためである²¹⁾。このため、維管束密度に依存する物性（例えば繊維平行方向の強度やヤング係数）については、一般的に根際から上部に向かって性能が優秀になることが知られている。一方、本稿で見てきたように、繊維直交方向の特性値についても同様の傾向があることは、繊維平行方向・直交方向の特性がお互い補完関係にあることを示している。

表3に全試験体の平均値を示す。モウソウチクとマダケでもっとも差が顕著なのは $f_{m,90,in}$ であるが、それ以外の特性値の差は最大でも2割以下となっている。両者の竹稈の構造的な違いは、主に稈形態の幾何学的特性によるものと捉えることができる。ただし、これまでに見てきたように、竹の力学的特性値は竹稈部位や稈直径により異なるため、本質的にはそれらをパラメータとして分類したうえで比較すべきであり、同表の比較は大雑把な傾向を示すものに過ぎない。竹構造の工学的な設計方法を確立するうえでは、竹稈の幾何学的特性を考慮した力学的性能の定式化が必要である。

表3 竹の力学的特性値の平均値

Mechanical properties	Unit	Madake	Moso
$f_{c,0}$	[MPa]	75.4	67.7
f_v	[MPa]	15.3	15.0
$f_{m,90,out}$	[MPa]	17.8	20.2
$f_{m,90,in}$	[MPa]	34.8	44.8
$E_{m,90,out}$	[GPa]	2.35	2.80
$E_{m,90,in}$	[GPa]	2.14	2.58
$E_{m,0}$	[GPa]	12.50	11.30

5 結論

本稿では、国産のモウソウチク、マダケの竹稈形態と力学的性質を調査し、それらの関係について基礎的な考察を示した。両竹種の竹稈の外形態には特に顕著な違いが認められた。両竹種とも稈の中間高さから頂部に向かい稈直径が直線的に減少するのは共通しているが、下部においては、モウソウチクでは根際から上部に向かい稈直径が急速に減少するのに対し、マダケでは根際の付近は稈直径の変化が小さい。また、稈壁厚はモウソウチクのほうが平均的に大きいですが、稈軸に沿った変化は両者とも類似した形態となっている。

力学的特性値としては、繊維平行方向の曲げヤング係数、圧縮強度、せん断強度、繊維直交方向曲げ強度・曲げヤング係数を調査した。いずれの特性値も竹稈の根際から上部に向かい上昇する傾向があり、同時に稈直径と

負の相関が確認された。特に、比重と圧縮強度の間には明瞭な正の比例的関係、稈直径と繊維平行方向曲げヤング係数の間に明瞭な負の比例的関係が確認された。

本稿で示したように、竹の力学的特性値は竹稈の部位や稈直径等のパラメータに大きく影響を受けるため、両者の関係を体系的に整理しておくことは、竹構造の構造設計法を確立するうえで必要不可欠である。今後は、試料数を拡大し統計的定式化を図るとともに、設計に必要な耐力や剛性の定式化を進めていきたい。

謝辞 本研究の成果の一部は、2022・2023年度前田記念工学財団研究助成、科研費(21H0037:新学術領域研究(研究領域提案型)、植物構造オブト)および21K14292の補助を受けたものである。また、藤田あみり氏(滋賀県立大学卒業生)を始めとした研究室の学生より多大な協力を得た。ここに記し心からの謝意を表す。

参考文献

- 1) ISO 22157, Bamboo structures – *Determination of physical and mechanical properties of bamboo culms* –, 2019.
- 2) K. Harries, L. Molari : Mechanical characterisation of bamboo for construction: the state - of - practice and future prospects, *RILEM Technical Letters* (2023) 8: 150 - 157.
- 3) Harries A. K. and Sharma B. (eds.): *Nonconventional and Vernacular Construction Materials: Characterisation, Properties and Applications*, Woodhead Publishing, 2019. 11.
- 4) Akinbade A. Y. : Mechanical and Morphological Characterization of Full-Culm Bamboo, Doctoral thesis, Swanson school of engineering, University of Pittsburgh, 2020. 3.
- 5) 永井拓生, 沖恵輔, 長野容平, 木原湧 : 丸竹稈の曲げ破壊メカニズムおよび曲げ強度に関する基礎的考察 竹稈壁に生じる曲げ応力の Brazier 効果理論・数値解析・実験による比較検証, 構造工学論文集, vol. 69B, 日本建築学会, pp. 119-128, 2023. 4.
- 6) Sharma B., Harries K. A., and Ghavami K. : Methods of determining transverse mechanical properties of full-culm bamboo, *Construction and Building Materials*, vol. 38, pp.627-637, Jan. 2013.
- 7) A. Inoue, M. Sato, and H. Shima: A new taper index based on form-factor: application to three bamboo species (*Phyllostachys* spp.), *European Journal of Forest Research*, vol. 140, pp. 1533-1542, 2021.
- 8) Kaminski, S., Lawrence, A., Trujillo, D. & King, C. (2016b) Technical Note Series: Structural use of bamboo – Part 2: Durability and Preservation, *The Structural Engineer*, 94 (10), pp. 38-43.
- 9) W. Liese and S. Kumar, Bamboo Preservation Compendium, *Centre for Indian Bamboo Resource and Technology*, 2003.
- 10) Nagai. T. : Preliminary study on relationship between culm morphology and mechanical characteristics of Japanese bamboo, *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2023 Integration of Design and Fabrication*, July 2023, pp. 277-287, 2023. 7.
- 11) Amada S., Muneoka T., Nagase Y., Ichikawa Y., Kirigai A. and Zhifei Y. : The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials, *J. Compos. Mat.*, vol. 30, no. 7, pp. 800-819, 1996.
- 12) Nagai T. and Oki K.: Study on the formulation of compression strength for full-culm bamboo columns - comparison of buckling tests and linear buckling analyses on small-scale specimens, *AIJ Journal of Technology and Design*, vol. 30, no. 74, pp. 83-87, Feb. 2024.

変数射影法と'揃える'条件によるグリッドシェルの形状決定

三木優彰¹⁾, Toby Mitchell²⁾

1)東京大学総合文化研究科広域科学専攻, 助教, 博士(工学), masaakim@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2)Thornton Tomasetti, Project Engineer, PhD, toby.mitchell@som.com

1 はじめに

この論文ではまず、SIGGRAPH ASIA 2022に採択された論文[8]とSIGGRAPH 2024に採択された論文[9]で述べたシェル構造の形状決定手法について完結にまとめます。提案した手法を用いると引張り圧縮混合型シェルの形状決定を正しく行えるとともに、共役応力ネットワークでありかつ共役曲率ネットワークであるような特別なグリッド-2重共役グリッド-の存在を保証することができます。2重共役グリッドは軸力のみで釣り合うグリッドシェルの直線部材の配置を与えると同時に四角形平坦パネルで曲面を分割可能な特別なグリッドで、グリッドシェルの設計などに有効です。最後にSchaefer-Gurtin 応力関数を用いた新しいアイデアについて述べます。この新しいアイデアを有効化することで、[9]で述べた手法では計算に失敗する複雑な境界形状を持つ例題も安定して解けるようになります(図1)。

1.1 シェルの鉛直方向の釣り合い

発散が零となるような応力テンソル S^{ij} が当たられたときシェルの鉛直方向の釣り合いは

$$S^{ij} H_{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \bar{\rho}, \quad (1)$$

と書ける。 $z(\theta^1, \theta^2)$ がシェルの各点の高さを表しているとき、 $H_{ij} = \bar{\nabla}_{ij} z$ である(つまり曲率)。右辺は単位面積当たりの自重である。発散が0となるような応力テンソルはAiryの応力関数を ϕ として $S^{ij} = \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} \bar{\nabla}_{kl} \phi$ と与えられる(ϵ^{ij} はpermutationテンソル)。この微分方程式は右辺の非線形項はともかく基本的に双線形型である。双線形連立方程式の解法としてVarPro(変数射影法)が既に確立している[2, 3, 6]。これは本来微分方程式の解法として開発されたものではないが[8]で著者等により双線形型微分方程式を安定的に解けることが報告された。また、2つの未知関数 (z, ϕ) に対して条件が1本なので広大な解空間が存在し、よほど性質の悪い条件を付加しない限り解の存在は常に期待して

よい。そのため釣り合い式が双曲型となる引張り圧縮混合型についてもあっさり解けてしまう。

1.2 揃える条件

著者等が揃える条件と呼んでいるのは次式で与えられる微分方程式である。

$$H_{ij} \bar{E}^{jk} h_{kl} = \text{sym}, \quad (2)$$

h_{ij} は応力テンソルを90度回転させたもので $h_{ij} = \bar{\nabla}_{ij} \phi$ である。 \bar{E}^{ij} は 2×2 の半正定値対称行列で各点ごとに異なる値をとる。釣り合い式と揃える条件を連立して解くと重力に対して面内応力のみで釣り合いかつ、2重共役グリッドが存在するような特別な曲面形状が得られる。本方程式も双線形型なので、釣り合い式と共に連立してVarProにより安定的に解くことができる。

しかし、2つの未知関数 (z, ϕ) に対して条件が2本となってしまうので解空間は狭いかもはや存在せず、[9]で著者等は単純な形状しか解けず、複雑な境界形状の場合失敗することがあると断っている。

そこで以下ではSchaefer-Gurtin応力関数を導入することにより新しい自由度を追加し、解空間を拡張することを考える。これは全く新しいアイデアであり、不正確な事項や検証が十分でない事項を含む可能性があることに注意されたい。

1.3 帽子のつば

Airyの応力関数は領域内部の釣り合いを保証するだけなので、境界における釣り合いは保証されず、通常は支持境界とする必要がある。そうではなく自由境界としたい場合、Airyの応力関数が平らな平面に滑らかに接するようにするとうまくいくことが指摘されてきた[4, 1, 7]。また、Airyの応力関数が平らな平面に接続するがその接続が滑らかでなく、境界において'折り目'が生じる場合、その折り目の角度を境界に流れる軸力と考え、水平方向の釣り合いが自動的に満たされることも指摘されてきた。このような境界を本

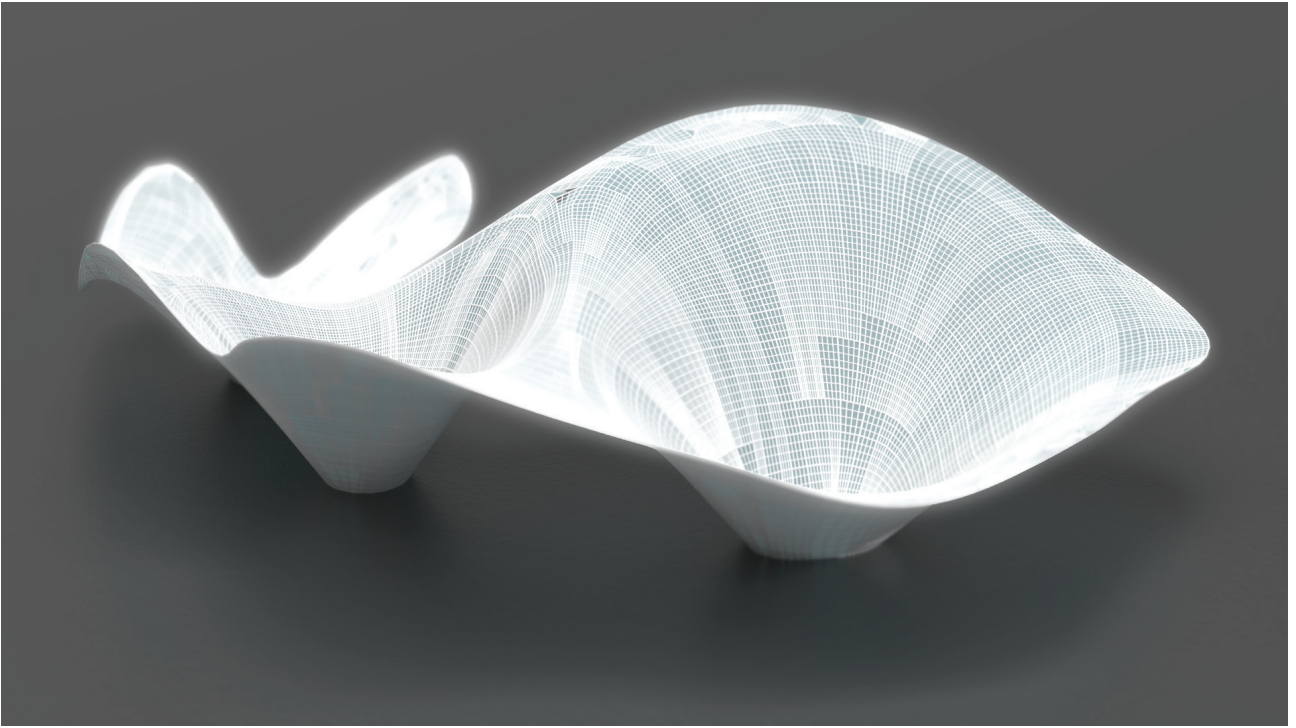


図1 提案手法による形状決定と2重共役グリッドの可視化。境界形状がスタンフォード・バニーになっている。[9]で述べた手法では失敗してしまうような複雑な境界形状をもつ問題も安定して解ける。

研究では補強境界と呼ぶ。自由境界は補強境界の折り目の角度がゼロである特別な場合である。

我々が本研究で帽子のつばと呼んでいるのはこのAiryの応力関数が境界において接続している平らな平面のことである。図2 (a)と (b) はAiryの応力関数と帽子のつばの関係を自由境界の場合と補強境界の場合について表したものである。

1.4 連続性の条件

我々の方法は曲面を複数のNURBS曲面で表わす。図3を見るとわかるように、応力テンソルは区分的にC2連続でありさえすれば境界においては不連続性をもつことができる。各NURBS曲面の境界において3つある応力成分のうち、境界力として隣の曲面に接続するのは2つのみためである。これは、応力関数を表すNURBS曲面同士はG1連続性を保ったまま接続すればよい（隣あう曲面の間に折り目が見えなければよい）ということの意味する。

以上の議論から応力関数のG1連続性を次のような2つの応力成分の連続性に置き換えても全く同じことである。

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla}_{tt}\phi]^{SRF1} &= [\bar{\nabla}_{tt}\phi]^{SRF2} \quad \text{and} \\ [\bar{\nabla}_{tn}\phi]^{SRF1} &= [\bar{\nabla}_{tn}\phi]^{SRF2}. \end{aligned} \quad (3)$$

t, n は境界に並行/垂直な方向である。2つのアプローチに全く違いはないが、後者を用いると、Schaefer-Gurtin 応力関数を導入したときに顕著な違いが生じる。

2 新しいアイデア

2.1 Schaefer-Gurtin 応力関数

Airyの応力関数では表現できない発散が零な応力場をSchaefer-Gurtin応力関数[10, 5]を用いると作ることができる。2つの関数 ξ と η が調和関数であるとする。すなわち

$$(\bar{\nabla}_{ij}\xi)\bar{g}^{ij} = 0 \quad \text{and} \quad (\bar{\nabla}_{ij}\eta)\bar{g}^{ij} = 0, \quad (4)$$

であるとき (\bar{g}^{ij} は計量テンソルの逆行列)、以下の手順で発散が零であるような応力テンソル場が得られる。

$$\mathbf{b}_i = \partial_i \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \partial_i \xi \\ \partial_i \eta \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$b_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j \quad (6)$$

$$q_{ij} = b_{ij} + b_{ji} - (b_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\bar{g}_{ij}. \quad (7)$$

テンソルには通常上添字の成分と下添字の成分があり、応力テンソルには通常上添字の成分を用いる。実は q_{ij}

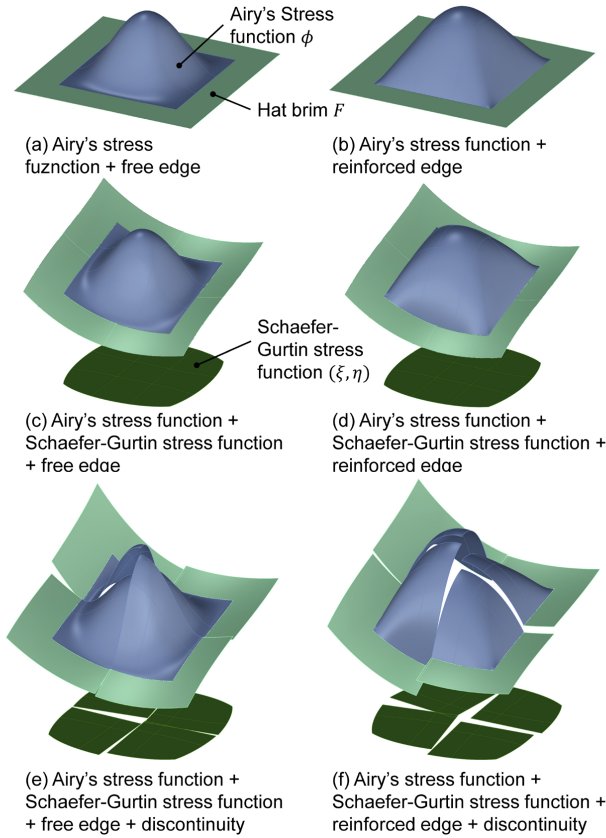


図2 Airyの応力関数と帽子のつば。(a) (b): Airyの応力関数を単独で用いた場合自由境界と補強境界のいずれも帽子のつばは平坦である。(c) (d): Schaefer-Gurtin応力関数を追加すると帽子のつばは曲がる。その曲率はSchaefer-Gurtin応力関数が生成する境界力を打ち消す。(e)(f)Schaefer-Gurtin応力関数を追加するとAiryの応力関数は区分的に滑らかでありさえすればよく、NURBSパッチ間に不連続性を許すことができる。

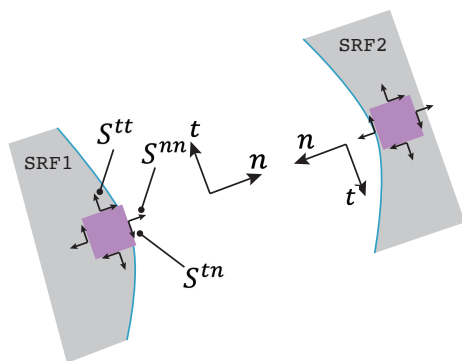


図3 2つのNURBSパッチの接続するところでは、応力テンソルの成分のうち S^{nn} と S^{tn} の2つのみ連続であればよく、 S^{tt} は不連続性が許される。

は特別なテンソルで上添字成分を次のように計算することができる。

$$Q^{11} = -\frac{1}{g}q_{22}, \quad Q^{12} = \frac{1}{g}q_{12}, \quad \text{and} \quad Q^{22} = -\frac{1}{g}q_{11}. \quad (8)$$

これらを用いて釣り合い式と揃える条件の応力テンソルを次のように置き換えるとAiryの応力関数にSchaefer-Gurtin応力関数を重ねることができる。

$$\begin{aligned} S^{ij} &\rightarrow S^{ij} + Q^{ij} \\ h_{ij} &\rightarrow h_{ij} + q_{ij}. \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 帽子のつば

帽子のつばをAiryの応力関数と同じように実数値関数 F で表す。Schaefer-Gurtin応力関数を導入すると折り目の角度が測れなくなり補強境界と自由境界の美しい関係が失われてしまう。これでは面白くないので補強境界を取り戻すことを考える。そのためには帽子のつばの曲率を次のように選ばばよい。

$$\bar{\nabla}_{tn} F = -q_{tn} \quad \text{and} \quad \bar{\nabla}_{tt} F = -q_{tt} \quad (10)$$

要するにSchaefer-Gurtin応力関数が生む境界力を打ち消すようにAiryの応力関数を延長したのである。このようにすることで、再び、Airyの応力関数と帽子のつばの間の角度を測ることで境界に流れる軸力を計算することができる。この軸力を考慮すると水平方向の釣り合いが自動的に満たされる。(図2 (c)と (d))

2.3 補強境界の鉛直方向の釣り合い

補強境界の水平方向の釣り合いは自動的に満たされるが、鉛直方向の釣り合いは自動的に満たされないため釣り合いの条件を追加する必要がある。これは

$$\bar{\nabla}_{tt} z - \bar{\Gamma}_{tt}^n \partial_n z = 0 \quad (11)$$

と書け、驚くべきことに軸力の具体的な大きさを含まない。詳細は割愛する。

2.4 連続性の条件

著者はSchaefer-Gurtin応力関数の本質は、それがAiryの応力関数に、任意の'切れ目'に沿った不連続性を許すことにあると考える。実際1.4節での議論を踏まえれば、Schaefer-Gurtin応力関数を重ねたとき、NURBS

曲面間では応力テンソルが連続、つまり

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla}_{tt}\phi + q_{tt}]^{\text{SRF1}} &= [\bar{\nabla}_{tt}\phi + q_{tt}]^{\text{SRF2}} \quad \text{and} \\ [\bar{\nabla}_{tn}\phi + q_{tn}]^{\text{SRF1}} &= [\bar{\nabla}_{tn}\phi + q_{tn}]^{\text{SRF2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

でありさえばよく、3つある応力関数がそれぞれ独立に連続である必要はない。図2 (e) と(f) は不連続性を許したときAiryの応力関数とSchaefer-Gurtin 応力関数がどのように変化するかを示したものである。

3 結果

数値計算結果を図4と図5に示す。ピンクと青の曲面がそれぞれ形状決定結果のシェル(z)と応力関数(ϕ)である。最右部に示した青いグリッドは2重共役グリッドである。黄色の曲面はシェルのリカバリーと呼んでいるもので、著者等はシェルとシェルのリカバリーがよく一致することを解の条件と主張している。リカバリーに失敗した場合は厳密解が存在しない問題の最小二乗解が得られたにすぎないと考えられ、一方でリカバリーに成功した場合は厳密解の最小二乗近似が得られたものと解釈するのである。図4(a)-(d)はSchaefer-Gurtin応力関数がない場合とある場合の自由境界、補強境界の結果であるが、すべてリカバリーに失敗している。図5(e)はSchaefer-Gurtin応力関数を重ねさらに不連続性を許し、自由境界を用いた場合の結果であるがやはりリカバリーに失敗している。しかし図5(e)に示すように境界を補強境界にするとシェルとリカバリーがとてもよく一致した。このことから本論文で述べたすべてのアイデアを同時に有効化すると解空間がよく拡張され、厳密解の最小二乗近似が得られたものと考えられる。

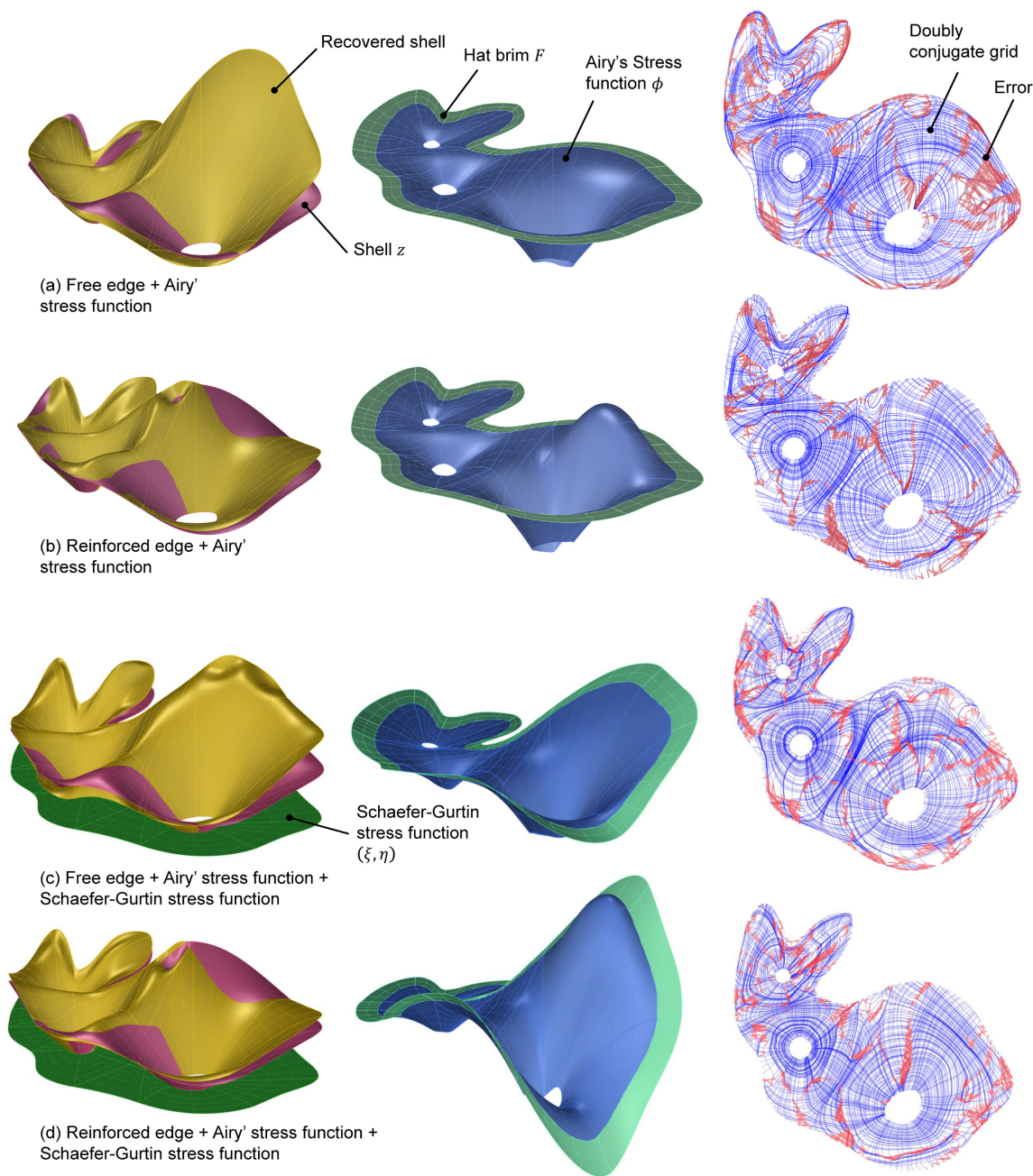
4 結論

本論文では、[7]で議論された補強境界を再び導入した。自由境界か補強境界かに関わらず、Airyの応力関数の境界を超えて拡張される部分、つまり帽子のつばは一貫して平坦である。次に、Schaefer-Gurtin応力関数を導入し、帽子のつばの曲率がSchaefer-Gurtin応力関数によって生じる境界力を打ち消すように帽子のつばを意図的に曲げるで、補強境界に関する議論が引き続き有効であることを指摘した。また、この新しい応力関数が重ねられる場合、NURBS曲面間の不連続性を許容できることを指摘した。これらすべてのアイデ

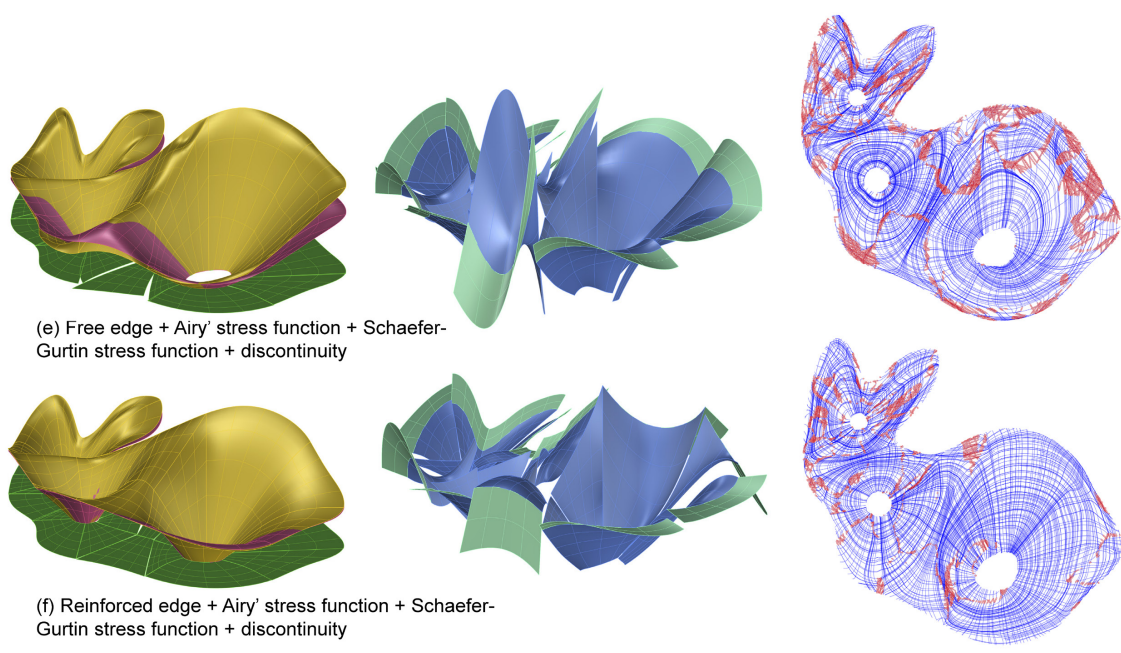
アを有効化することで境界形状がスタンフォード・バニーのシルエットのトレースとなっているような複雑な問題でも、解が正しく存在し、その最小二乗近似が計算により得られることを示した。

参考文献

- 1) P. Csonka. *Theory and practice of membrane shells*. VDI Verlag, Düsseldorf, Germany, 1987.
- 2) L. Eldén and S. Ahmadi-Asl. Solving bilinear tensor least squares problems and application to hammerstein identification. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 26(2):e2226, 2019.
- 3) G. H. Golub and V. Pereyra. The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate. *SIAM Journal on numerical analysis*, 10(2):413–432, 1973.
- 4) A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical elasticity*. Oxford University Press, London, 1968.
- 5) M. E. Gurtin. A generalization of the beltrami stress functions in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13:321–329, 1963.
- 6) J. H. Hong, C. Zach, and A. Fitzgibbon. Revisiting the variable projection method for separable nonlinear least squares problems. In *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 5939–5947, 2017.
- 7) M. Miki, T. Igarashi, and P. Block. Parametric self-supporting surfaces via direct computation of airy stress functions. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(4):1–12, jul 2015.
- 8) M. Miki and T. Mitchell. Interactive exploration of tension-compression mixed shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(6), nov 2022.
- 9) M. Miki and T. Mitchell. Alignment conditions for nurbs-based design of grid shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 43(3), jul 2024.
- 10) H. Schaefer. Die spannungsfunktionen des dreidimensionalen kontinuums und des elastischen körpers. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 33(10-11):356–362, 1953.



⊠4 Results with no discontinuities allowed. (a) is the same method presented in [9]. Pink surface: shell z . Blue surface: Airy' stress function ϕ . Yellow surface: a recovered shell that should overlay well with the shell z if the problem is not overconstrained. The recovered shells do not overlay well with the shell z in all four approaches.



☒5 Results with discontinuities allowed. While the recovery test still fails in (e), the recovered shell overlays very well in (f).

ヨシムラパターンユニットからなる平坦折り可能なトラス状折紙構造

早川 健太郎¹⁾, 大崎 純²⁾

1)日本大学生産工学部創生デザイン学科, 助手, 博士(工学), hayakawa.kentaro@nihon-u.ac.jp

2)京都大学大学院工学研究科建築学専攻, 教授, 博士(工学), ohsaki@archi.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

狭義の「折紙」は、穴や切り目の無い平坦な紙状の素材を折ることで2次元や3次元の形状を作ることである。一方、折紙工学では「折り」に特徴づけられる構造をそのトポロジーに関わらず、広く「折紙構造」と呼ぶことも多い^{1,2)}。代表例として、折紙チューブ^{3,4)}や折紙ハニカム^{5,6)}、格子状の折紙構造⁷⁾が挙げられ、エネルギー吸収機構やサンドイッチパネルのコア材、メタ材料などへの応用が提案されている。

折紙の工学的応用では「剛体折り」や「平坦折り」がしばしば重要視される。剛体折り可能な折紙は、面を変形させずに折線の回転のみで全体形状を変化させられるため、繰り返し変形可能な可動・展開構造へ応用される。一方、平坦折り可能な折紙は、厚みを無視すると全ての面が同一平面上にある状態に折り畳み、平坦状態で製造・運搬可能な施工性、可搬性の高い構造物を実現できる。加えて、実構造ではパネルの厚みを無視できないため、厚みを持つパネルで折り変形可能な構造物のさまざまな構成法が提案されている⁸⁾。

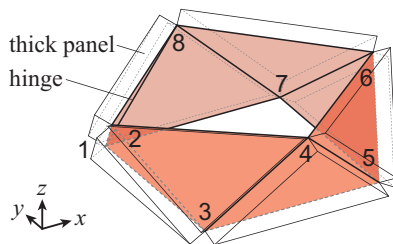


図1: ユニット形状とヒンジが配置される面の頂点番号

本研究では、図1に示すユニットを図2のように環状に接続したトラス状折紙構造を提案する。ユニットは著者らが提案した剛体折りかつ平坦折り可能な格子状折紙構造^{9,10)}の構成要素で、図1で強調した内側面に着目すると、8個の直角二等辺三角形を8本のヒンジ（折線）で接続したヨシムラパターンをもつ。パネル厚はユニット内側の三角形面を外向き法線方向に同じ量だけオフセットして与えられる。提案するトラス

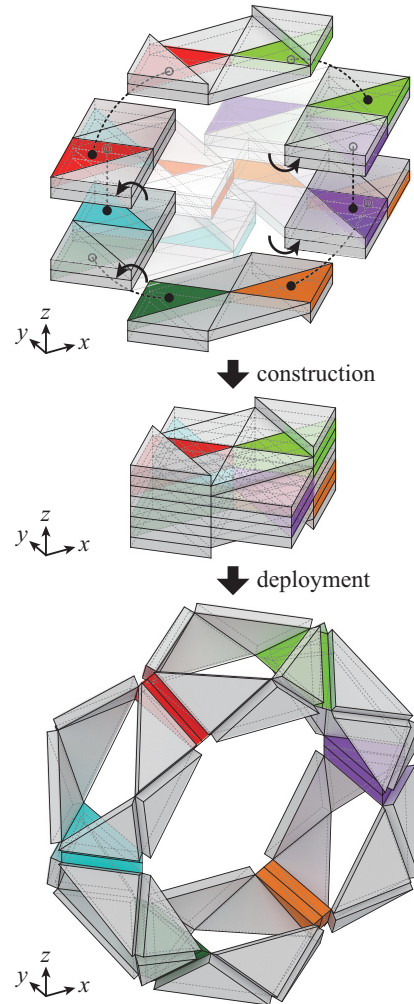


図2: パネル厚を考慮したユニットの接続方法と平坦折り状態, 展開状態

状構造は同一のパネル厚をもつ4以上の偶数個のユニットからなり、図2のように、上下端は六角形に、中間は六角形からさらに二つ折りして長方形に平坦折りしたユニットを層状に重ねて接続して構成できる。本稿では、任意のユニット数からなるトラス状折紙構造の内側面の頂点座標を示し、基本的な性質について例示する。さらに、ユニット数が6かつパネル厚を無視したトラス状折紙構造をトラスとしてモデル化し、図2下段の展開状態から中段の平坦折り状態への折り畳み経路の例を数値計算で示し、部材変形を評価する。

2 展開時のユニット座標

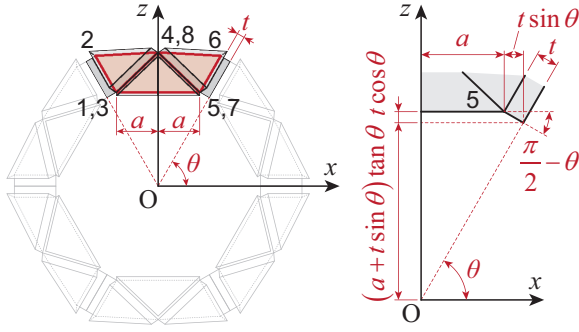


図3: 頂部ユニットの頂点位置

N 個のユニットからなるトーラス状折紙構造を図2, 3のように y 軸まわりに回転対称になるよう展開したときのユニット内側面の頂点座標を示す。 $\theta = \pi(N-2)/2N$ とおき, ユニット内側面の直角二等辺三角形の斜辺の長さを $2a$, パネルの厚さを t として,

$$z_0 = (a + t \sin \theta) \tan \theta + t \cos \theta = a \tan \theta + \frac{t}{\cos \theta} \quad (1)$$

とおく。このとき, 図1, 3に頂点番号を示す頂部のユニットの頂点1, 3, 5, 7の座標を以下のように定める。

$$\begin{aligned} &1(-a, a, z_0), \quad 3(-a, -a, z_0) \\ &5(a, -a, z_0), \quad 7(a, a, z_0) \end{aligned} \quad (2)$$

また, 文献^{9,10})より,

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left(\left((\sqrt{2} - 1) \cot \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (3)$$

として, 頂点2, 4, 6, 8の座標を以下のように定める。

$$\begin{aligned} &2(-a(1 + \cos \theta), 0, z_0 + a \sin \theta) \\ &4(0, -a(1 + \cos \phi), z_0 + a \sin \phi) \\ &6(a(1 + \cos \theta), 0, z_0 + a \sin \theta) \\ &8(0, a(1 + \cos \phi), z_0 + a \sin \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

以上のようにして得られる頂部ユニットを y 軸まわりに角度 $2\pi/N$ ずつ回転させて全ユニットの内側面の頂点座標を得る。2以上の任意の整数 N で有意なユニット形状を与える θ と ϕ が与えられるが, 有限のパネル厚で図2のような xy 平面投影形状が正方形の平坦折り状態を実現可能なのは N が4以上の偶数の場合に限られる。

3 さまざまな平坦折り状態

N を4以上の偶数とすると, 図2のように上下の六角形に平坦折りされたユニットの間に中間層として長方形に平坦折りされた $N-2$ 個のユニットを2個ずつ重ねて N ユニットのトーラス状折紙構造を構成できる。中間層のユニットは六角形に平坦折りしたユニットを図2の矢印のように構造の内側に折線がくるよう二つ折りして得られる。 $N=6$ の場合に接続されるパネルは図中に点線と着色で示すとおりである。 $N=4$ の場合, 図2の上から2層目の長方形に平坦折りされた2ユニットのみを上下端のユニットの間に配置する。また, 最下層のユニットは最上層のユニットを xy 平面に関して反転し, z 軸まわりに $\pi/2$ 回転して配置される。一方, $N \geq 8$ の場合, 上下の六角形に平坦折りされたユニットの間で図2の上から2層目と3層目を交互に繰り返す。よって, 上下端のユニットは, N が4の倍数の場合, 図4(a), (b)のように xy 平面投影形状が z 軸まわりに $\pi/2$ 回転した状態, それ以外の場合, 図2, 4(c)のように xy 平面投影形状が同一の状態に配置される。なお, 平坦折り状態と展開状態の間の折り畳み・展開過程での剛体折りは保証されず, 面の変形が必要な場合がある。

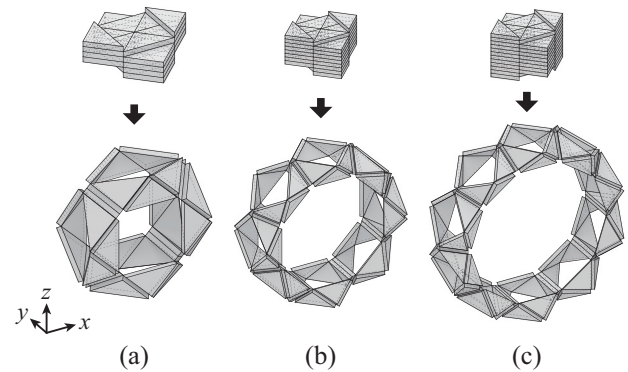


図4: (a) 4ユニット, (b) 8ユニット, (c) 10ユニットのトーラス状折紙構造

提案構造は図2に示したものの以外にもさまざまな平坦折り状態を持ち得る。パネル厚を考慮しないで得られる平坦折り状態の中には, 有限のパネル厚のもとではパネルの干渉で全てのパネルが平行な平坦折り状態にならない場合が存在する。有限のパネル厚で構成される6ユニットトーラス状折紙構造のパネル間に隙間ができず全パネルが平行になる平坦折り状態の例を図5に示す。図5(a)は平坦折りされたユニットが4層に重なっている一方, (b)は2層に重なっている。

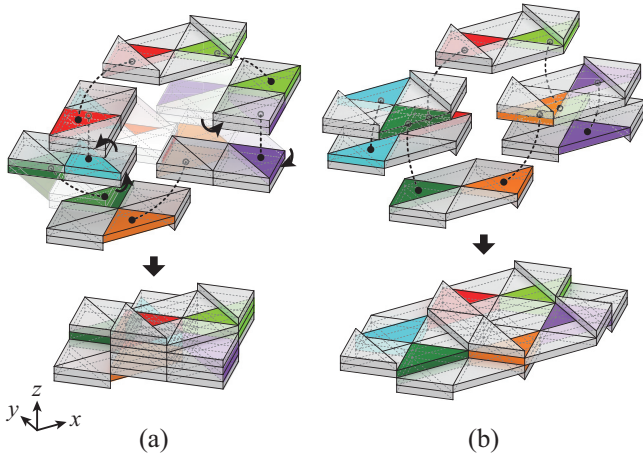


図5: 全パネルが平行になる平坦折り状態の例

4 トラスモデルの微小変形メカニズム

本節では、パネルの厚みを無視($t = 0$)し、自己交差を許容してパネルの接触によるメカニズムの拘束は考慮しない。このとき、辺と折線に沿って部材を配置し、頂点でピン接合したトラスモデルで折紙構造をモデル化する。図6の $N = 6$ の場合のように、隣接ユニットを接続するパネルを共通の節点と部材で表すと、節点数は $5N$ 、部材数は $13N$ である。よって、不静定次数が0のとき、剛体変位を除いた微小変形メカニズムの自由度は $3 \times 5N - 13N - 6 = 2N - 6$ である。本節ではさらに、 $N = 4, 6, 8, 10$ の場合の2節で座標が定義される展開状態と xy 平面投影形状が正方形の平坦折り状態の1次の微小変形メカニズムの自由度をトラスモデルの適合行列より求める。ここで、節点 i の位置ベクトルを $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ ($i = 1, \dots, 5N$)とおく。また、トラスモデルの適合行列を $\Gamma \in \mathbb{R}^{13N \times 15N}$ とし、 (j, k) 成分を $\Gamma_{j,k}$ とおく。部材 j ($j = 1, \dots, 13N$)の端部節点が i_1, i_2 ($i_1 < i_2$)のとき、 $\Gamma_{j,k}$ は以下ようになる¹¹⁾。

$$\Gamma_{j,k} = \begin{cases} x_{i_1} - x_{i_2} & (k = 3i_1 - 2) \\ y_{i_1} - y_{i_2} & (k = 3i_1 - 1) \\ z_{i_1} - z_{i_2} & (k = 3i_1) \\ x_{i_2} - x_{i_1} & (k = 3i_2 - 2) \\ y_{i_2} - y_{i_1} & (k = 3i_2 - 1) \\ z_{i_2} - z_{i_1} & (k = 3i_2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5)$$

Γ のランクを r 、不静定次数、不安定次数をそれぞれ s 、 f とおくと、 $s = 13N - r$ 、 $f = 15N - r$ である¹¹⁾。

$a = 1, N = 4, 6, 8, 10$ の場合の展開状態、平坦折り状態での適合行列のランク、不静定次数、不安定次数をそれぞれ表1に示す。ただし、不安定次数は6自由度の剛体変位を含む。表1に示すように、2節で座標が定義される展開状態では不静定次数が0、不安定次数から6を引いた1次の微小変形メカニズムの自由度は $2N - 6$ である。一方、平坦折り状態では不静定次数が0より大きく、表1では $s = 3N + 3$ 、 $f = 5N + 3$ が成り立っている。

表1: トラスモデルの不静定次数、不安定次数

N	State	r	s	f
4	Flat-folded	37	15	23
4	Deployed	52	0	8
6	Flat-folded	57	21	33
6	Deployed	78	0	12
8	Flat-folded	77	27	43
8	Deployed	104	0	16
10	Flat-folded	97	33	53
10	Deployed	130	0	20

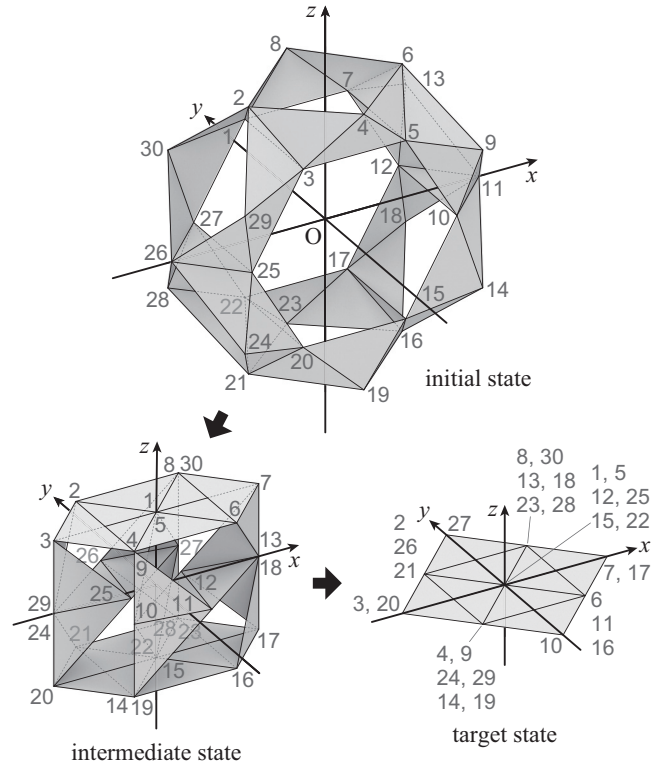


図6: 経路探索の初期折り状態、中間折り状態、目標平坦折り状態と節点番号

5 展開状態から平坦折り状態への折り経路

前節と同様、 $N = 6, a = 1$ の場合にパネル厚を無視した折紙構造をトラスモデルで表し、図2のような展開状態から平坦折り状態への折り畳み経路探索を行う。無数に存在する展開状態から平坦折り状態への経路のうち、自己交差を極力回避するために、図6に示すような中間折り状態を経由して平坦折りする経路を求める。節点 i の現在の位置ベクトルを $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ 、目標折り状態での位置ベクトルを $\bar{\mathbf{p}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)^T$ ($i = 1, \dots, 30$)とおく。 $\bar{\mathbf{p}}_i$ は、図6の展開状態から中間折り状態への折り畳みでは中間折り状態、中間折り状態から平坦折り状態への折り畳みでは平坦折り状態での位置ベクトルとする。このとき、目標折り状態との節点位置の誤差を以下の関数 F で評価する。

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} \{u_i(x_i - \bar{x}_i)^2 + v_i(y_i - \bar{y}_i)^2 + w_i(z_i - \bar{z}_i)^2\} \quad (6)$$

ここで、 u_i, v_i, w_i はそれぞれ重み係数であり、中間折り状態、最終平坦折り状態への折り畳み経路の探索にはそれぞれ表2, 3の値を用いる。

表 2: 中間折り状態への折り畳み時の式(6)の重み係数

Node indices	u_i	v_i	w_i
1, 4, 5, 8, 15, 19, 22, 23	10.0	10.0	2.0
3, 7, 17, 20	1.0	1.0	1.0
10, 27	5.0	5.0	0.0
others	1.0	1.0	0.0

表 3: 平坦折り状態への折り畳み時の式(6)の重み係数

Node indices	u_i	v_i	w_i
1-9, 14-17, 19-23, 28, 30	1.0	1.0	5.0
11, 12, 25, 26	5.0	5.0	0.0
10, 13, 18, 24, 27, 29	5.0	10.0	0.0

一方、部材 j ($j = 1, \dots, 78$)の端部節点が i_1, i_2 のとき、部材の初期長を l_j として構造全体での部材変形を以下の関数 G で評価する。

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{78} (\|\mathbf{p}_{i_1} - \mathbf{p}_{i_2}\| - l_j)^2 \quad (7)$$

また、自己交差を極力避けるため、表4に示すように節

点を5つのグループに分け、グループ k ($k = 1, \dots, 4$)の節点の最小の z 座標がグループ $k+1$ の節点の最大の z 座標以上になるようにする。このとき、グループ k と $k+1$ の間の z 座標の誤差を以下の関数 H_k で評価する。

$$H_k = \max\left(0, \max_{i \in I_{k+1}} z_i - \min_{i \in I_k} z_i\right) \quad (k = 1, \dots, 4) \quad (8)$$

ここで、 I_k ($k = 1, \dots, 5$)はグループ k に含まれる節点番号の集合である。

表 4: 節点グループ

Group index	Node indices
Group 1	2, 4, 6, 8
Group 2	1, 3, 5, 7, 9, 13, 29, 30
Group 3	10, 11, 12, 25, 26, 27
Group 4	14, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 28
Group 5	16, 19, 21, 23

経路探索では、 xy 平面に関する対称性および z 軸まわりの 180° 回転対称性を考慮して、節点1-4, 9-13の x, y 座標と節点1-4, 9, 13の z 座標を独立変数とする。 xy 平面上の節点10-12, 25-27の z 座標は常に0とし、上記の独立変数以外の節点座標は折紙構造の対称性から定める。このとき、独立な節点座標をまとめたベクトルを $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{24}$ 、ペナルティ係数を c, d として、 \mathbf{X} を設計変数とする以下の最適化問題を節点座標の範囲を逐次更新しながら繰り返し解き、折り畳み経路を探索する。

$$\begin{aligned} \min. \quad & E(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}) + cG(\mathbf{X}) + d \sqrt{\sum_{k=1}^4 H_k^2(\mathbf{X})} \\ \text{s.t.} \quad & x_i^{(n-1)} - 0.01 \leq x_i(\mathbf{X}) \leq x_i^{(n-1)} + 0.01 \\ & y_i^{(n-1)} - 0.01 \leq y_i(\mathbf{X}) \leq y_i^{(n-1)} + 0.01 \\ & z_i^{(n-1)} - 0.01 \leq z_i(\mathbf{X}) \leq z_i^{(n-1)} + 0.01 \end{aligned} \quad (9)$$

$x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, z_i^{(n)}$ は経路探索の n ステップ目($n \geq 1$)の解における節点座標である。ただし、 $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)}$ を初期状態での節点座標とする。図7に経路探索のフローチャートを示す。 $F^{(n-1)}$ を経路探索の $n-1$ ステップ目の解での関数 F の値 ($F^{(0)}$ は初期状態での値)として、 H_k の最大値が 10^{-5} 未満かつ F の値が $0.9999F^{(n-1)}$ 未満のときに、最適化問題(9)の収束解を経路探索の n ステップ目の解とする。経路探索の各ステップでの c, d の初期

値はそれぞれ 10^7 , 10^4 とし, H_k の最大値が 10^{-5} 以上のときは d を10倍, F の値が $0.9999F^{(n-1)}$ 以上のときは c を0.7倍する。ただし, c の下限値は 10^{-3} とし, $c \leq 10^{-3}$ のときは最適化問題(9)の求解における収束条件を厳しくして F を減少させる解を探索する。目標折り状態(図6の中間折り状態または最終平坦折り状態)には以下の D の値が 10^{-3} 未満になった際に達したものとみなす。

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} \{(x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2 + (z_i - \bar{z}_i)^2\} \quad (10)$$

本稿では図6に示す中間折り状態を経由して平坦折り状態に至る経路を探索するため, 初期展開状態から中間折り状態への経路探索(前半)と中間折り状態から最終平坦折り状態への経路探索(後半)の2回, 図7の流れを繰り返す。経路探索後半の初期状態は前半に $D < 10^{-3}$ となった解とし, 探索前半から後半にかけてステップ数 n はリセットせずに全体を通してカウントする。

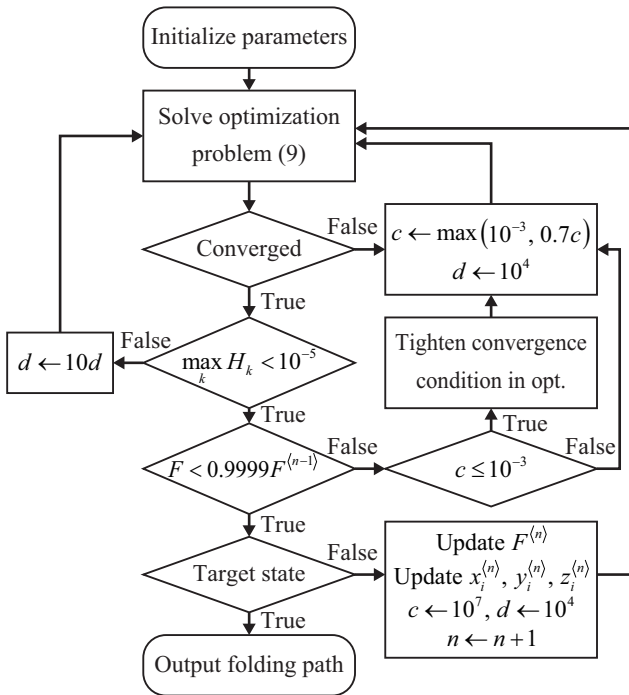


図7: 経路探索のフローチャート

図8, 9, 10にそれぞれ折り畳み経路探索の過程におけるモデルの形状, 関数 F , D の値の推移, 各ステップでの最大・最小部材ひずみを示す。トラスモデルを用いているため面は本来存在しないが, 図8では折り状態を把握しやすくするために面を表示している。また, 辺の色は部材ひずみを表しており, 図8, 10において引張を

正(赤), 圧縮を負(青)としている。図9に示すように, 中間折り状態と最終平坦折り状態を精度よく達成しており, 指定した折り状態を通る変形経路が得られている。最大・最小部材ひずみの初期状態から中間折り状態の間での最大値と最小値はそれぞれ 4.79×10^{-3} , -6.95×10^{-3} , 中間折り状態から平坦折り状態の間ではそれぞれ 2.53×10^{-2} , -5.56×10^{-2} であった。図10のように, 中間折り状態から平坦折り状態の間の経路解析で部材ひずみの絶対値が大きくなっており, この間の経路は特に剛体折り経路ではないことが分かる。図8のステップ640の折り状態付近で, 中間折り状態では xy 平面と非平行な部材のひずみが特に大きくなっており, z 軸と平行な部材の圧縮ひずみと斜め方向の部材の引張ひずみの絶対値が大きくなっている。

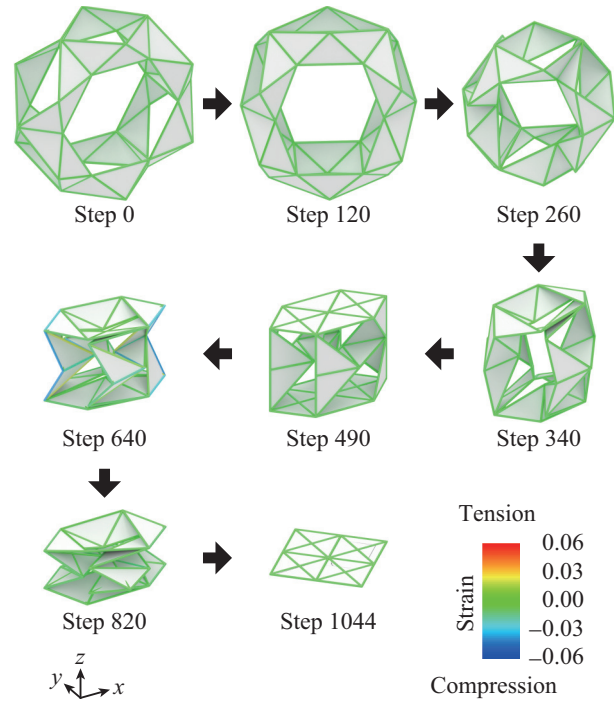


図8: 折り畳み経路と部材ひずみ

6 まとめ

本稿では, 8個の直角二等辺三角形パネルからなるヨシムラパターンをもつユニットを環状に接続したトラス状折紙構造の幾何学的な構成法を提案し, パネル厚を無視した場合の微小変形メカニズムの解析, 折り畳み経路の探索を行った。提案構造は厚みのあるパネルで構成した場合にも平坦折り可能であり, トラス状の折り状態から平面投影形状が正方形のコンパクト

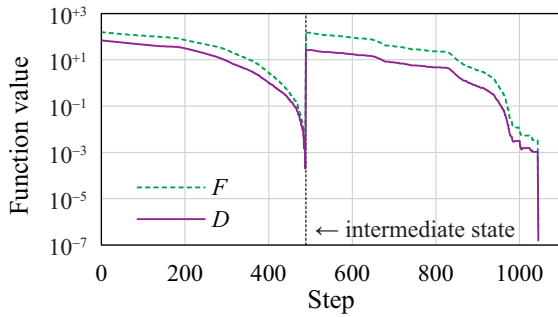


図9: 経路探索各ステップでの関数 F , D の値 (対数軸)

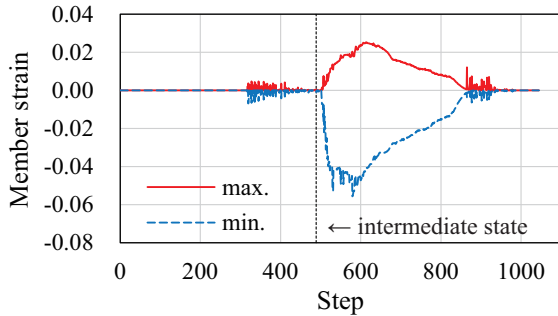


図10: 経路探索各ステップでの最大・最小部材ひずみ

な状態に折り畳めるほか、様々な平坦折り状態が存在し得る。パネルの干渉を無視した場合、回転対称性をもつように展開した場合の1次の微小変形メカニズムの自由度はユニット数の2倍から6を引いたものである。一方、平坦折り状態では不静定次数の増加にともないメカニズムの自由度も増加するが、自由度は依然ユニット数に比例する。また、6ユニットの場合に展開状態から平坦折り状態へ移行する折り畳み経路をトラスモデルを用いて探索した。得られた経路は部材ひずみが微小ではなく、剛体折りではないことを確認した。

謝辞: 本研究はJPSP科研費JP23K19160およびJST CREST JPMJCR1911の助成を得た。

参考文献

- 1) M. Meloni, J. Cai, Q. Zhang, D.S.H. Lee, M. Li, R. Ma, T.E. Parashkevov, and J. Feng: Engineering origami: A comprehensive review of recent applications, design methods, and tools, *Adv. Sci.*, Vol. 8, article 2000636, 2021
- 2) D. Misseroni, P.P. Pratapa, K. Liu, B. Kresling, Y. Chen, C. Daraio, and G.H. Paulino: Origami

- engineering, *Nat. Rev. Method. Prime.*, Vol. 4, article 40, 2024
- 3) E.T. Filipov, T. Tachi, and G.H. Paulino: Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and metamaterials, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol. 112, No. 40, pp. 12321–12326, 2015
- 4) Y. Chen, W.W. Lv, J. Li, and Z. You: An Extended Family of Rigidly Foldable Origami Tubes, *J. Mech. Robot*, Vol. 9, No. 2, article 021002, 2017
- 5) K. Saito, S. Pellegrino, and T. Nojima: Manufacture of arbitrary cross-section composite honeycomb cores based on origami techniques, *J. Mech. Des.*, Vol. 136, No. 5, article 051011, 2014
- 6) R. Ma, M. Li, Y. Xu, M. Meloni, J. Feng, and J. Cai, Geometry design and in-plane compression performance of novel origami honeycomb material, *Thin-Walled Struct.*, Vol. 181, article 110111, 2022
- 7) A. Adachi, S. Nishimoto, H. Totsuka, K. Warisaya, A. Tokolo and T. Tachi : Origami cellular material switching between single and multiple DOF modes, in *Proc. SOSME*.
- 8) R.J. Lang, K.A. Tolman, E.B. Crampton, S.P. Magleby, and L.L. Howell: A review of thickness accommodation techniques in origami-inspired engineering, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 70, pp. 010805-1–010805-20, 2018
- 9) K. Hayakawa and M. Ohsaki : Origami-based flat foldable structure with non-flat singular point of rigid folding mechanism, in *Proc. IASS 2024*.
- 10) K. Hayakawa and M. Ohsaki : Rigid- and flat-foldable grid origami structure exhibiting bifurcation of mechanism in non-flat state, *Int. J. Solids Struct.*, under review.
- 11) K. Hayakawa, T. Ohba, and M. Ohsaki : Analytical and numerical investigation of second-order infinitesimal mechanism in rigid origami, *Mech. Mach. Theo.*, Vol. 194, paper 105572, 2024

Active bending が作用する複合張力構造の形状解析 -導入張力による解形状の比較-

中村真子¹⁾, 横須賀洋平²⁾

1)鹿児島大学大学院理工学研究科工学専攻, 大学院生, k1320143@kadai.jp

2)鹿児島大学大学院理工学研究科工学専攻, 准教授, 博士(情報科学), yokosuka@ae.kagoshima-u.ac.jp

1 はじめに

膜構造、ケーブル構造等の張力構造は、膜やケーブルに初期張力を導入することによって幾何剛性を付加させ安定した形態を得る。その際に圧縮応力が作用しない初期形状を求める形状解析が必要であり多くの手法が提案されている^{1,2)}。変位仮定有限要素法は初期状態が安定形態を維持した構造モデルの解析を想定している。張力構造は張力を導入しなければ無応力で不安定な状態であり、安定した構造剛性を確保するために張力を導入し、安定形態を得る。導入張力を記述する Green ひずみは本来全体座標系で定義されるため、座標値を未知量とした定式化がより自然なものとする。

座標仮定有限要素法³⁾は張力構造の形状解析の一解法であり、座標値を直接未知量とする有限要素技術である。本手法は座標変換を不要とし簡便な定式化で記述され、形状解析から応力変形解析に至る移行が容易という特徴がある。

複合張力構造の形状決定問題として、梁要素に Active bending を導入した Bending-active 構造が知られている⁴⁾。膜やケーブルの張力や施工時の一時的な外力による自己釣合い形状による軽量の構造物が実現可能である。また、張力構造の形状決定において釣合い状態を得るためにケーブルへの導入張力の違いによる安定形状を把握することは重要である。

本稿では三次元空間の座標仮定有限要素法による梁要素の離散化定式化を導入し、Active bending を導入した梁・膜・トラス・ケーブル要素による複合張力構造の形状決定問題に応用し複合張力構造の形状解析を行う。はじめに座標仮定有限要素法の梁要素の定式化を示し、次に解析の流れについて示す。そして導入張力の違いによる複合張力構造の形状解析と応力変形解析を行い、張力と総ひずみエネルギーの解空間と応力図を求め、初期張力の違いによる解形状の傾向を考察する。

2 座標仮定有限要素法

2.1 基本式

仮想仕事の原理より、応力とひずみを変形後の位置ベクトル \mathbf{X} で表現した仮想仕事式は次式で得られる。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X})^T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}) d\Omega - \delta \mathbf{X}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\gamma}$: ひずみベクトル、 $\delta \boldsymbol{\gamma}$: ひずみ増分、 \mathbf{X} : 変形後の直行直線座標ベクトル、 $\delta \mathbf{X}$: 変位増分、 $\boldsymbol{\tau}$: 応力ベクトル、 \mathbf{f} : 荷重モードベクトル、 $\boldsymbol{\lambda}$: 荷重パラメータ、 Ω : 解析領域である。ひずみ-座標関係は、次の Green ひずみを採用する。

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_j} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{ij} \right) \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2)$$

ただし、 x_i : 変形前の直交直線座標の座標成分、 X_i : 変形後の直交直線座標の座標成分、 δ_{ij} : Kronecker の Delta である。ここで、式(2)と変形後の座標 \mathbf{X} の関係及びひずみ増分 $\delta \boldsymbol{\gamma}$ と座標増分 $\delta \mathbf{X}$ の関係は次式のように表現する。

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{C}, \quad \delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}^*(\mathbf{X})\delta \mathbf{X} \quad (3a,b)$$

ここで、 \mathbf{B} : ひずみ-座標値関係行列、 \mathbf{B}^* : ひずみ増分-座標値増分関係行列、 \mathbf{C} : 定数ベクトルである。

式(3)を式(1)に導入し $\delta \mathbf{X}$ の任意性より次の平衡方程式が得られる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^*(\mathbf{X})^T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}) d\Omega - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4)$$

式(4)を解くための接線剛性行列 \mathbf{K}_T は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{K}_T(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_G(\mathbf{X}) + \mathbf{K}_S(\mathbf{X}) \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{K}_G : 幾何剛性行列、 \mathbf{K}_S : 線形+大変位剛性行列であり、それぞれ以下のように定義される。

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{B}^{*T}}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\tau} d\Omega \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{*T} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{X}} d\Omega \quad (7)$$

2.2 梁要素の定式化

梁要素の定式化は、ANC(Absolute Nodal Coordinate)法の補間関数を参考とする。局所座標系 (x, y, z) 、全体座標系 (X, Y, Z) として変形後の梁内部における位置座標ベクトル $\mathbf{r}(x, y, z)$ を次式で表す⁵⁻⁷⁾。

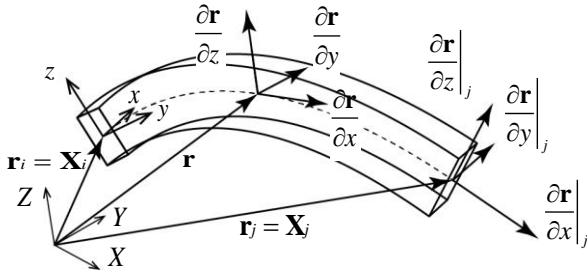


図1 三次元梁要素

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{S}(x, y, z)\mathbf{X} = [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{S} : 形状関数、 \mathbf{X} : 節点座標ベクトルである。
Bernoulli-Euler 梁の仮定による形状関数 \mathbf{S} を次式で表す。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{S}} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8]$

$$\xi = x/L, \eta = y/L, \zeta = z/L$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 & S_2 &= L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \\ S_3 &= L(1 - \xi)\eta & S_4 &= L(1 - \xi)\zeta \\ S_5 &= -2\xi^3 + 3\xi^2 & S_6 &= L(\xi^3 - \xi^2) \\ S_7 &= L\xi\eta & S_8 &= L\xi\zeta \end{aligned}$$

ここで、 L : 初期状態の梁長さ、 x : 材軸方向の局所座標、 y, z : 材軸方向に垂直な方向の局所座標である。

ξ, η, ζ は正規化及び無次元化座標である。

i 端、 j 端の節点座標値 $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$ 及び i 端、 j 端の基底ベクトルは次式で表す。

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{X}_i = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T, \mathbf{r}_j = \mathbf{X}_j = [X_j \ Y_j \ Z_j]^T \quad (10a-h)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}_i &= \left[\frac{\partial r_x}{\partial x}_i \ \frac{\partial r_y}{\partial x}_i \ \frac{\partial r_z}{\partial x}_i \right]^T, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}_j = \left[\frac{\partial r_x}{\partial x}_j \ \frac{\partial r_y}{\partial x}_j \ \frac{\partial r_z}{\partial x}_j \right]^T \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}_i &= \left[\frac{\partial r_x}{\partial y}_i \ \frac{\partial r_y}{\partial y}_i \ \frac{\partial r_z}{\partial y}_i \right]^T, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}_j = \left[\frac{\partial r_x}{\partial y}_j \ \frac{\partial r_y}{\partial y}_j \ \frac{\partial r_z}{\partial y}_j \right]^T \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}_i &= \left[\frac{\partial r_x}{\partial z}_i \ \frac{\partial r_y}{\partial z}_i \ \frac{\partial r_z}{\partial z}_i \right]^T, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}_j = \left[\frac{\partial r_x}{\partial z}_j \ \frac{\partial r_y}{\partial z}_j \ \frac{\partial r_z}{\partial z}_j \right]^T \end{aligned}$$

各要素の一般化節点座標ベクトル \mathbf{X} を次式で表す。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_i & \frac{\partial r_x}{\partial x}_i & \frac{\partial r_x}{\partial y}_i & \frac{\partial r_x}{\partial z}_i & X_j & \frac{\partial r_x}{\partial x}_j & \frac{\partial r_x}{\partial y}_j & \frac{\partial r_x}{\partial z}_j \\ Y_i & \frac{\partial r_y}{\partial x}_i & \frac{\partial r_y}{\partial y}_i & \frac{\partial r_y}{\partial z}_i & Y_j & \frac{\partial r_y}{\partial x}_j & \frac{\partial r_y}{\partial y}_j & \frac{\partial r_y}{\partial z}_j \\ Z_i & \frac{\partial r_z}{\partial x}_i & \frac{\partial r_z}{\partial y}_i & \frac{\partial r_z}{\partial z}_i & Z_j & \frac{\partial r_z}{\partial x}_j & \frac{\partial r_z}{\partial y}_j & \frac{\partial r_z}{\partial z}_j \end{bmatrix} \quad (11)$$

次に梁の中立軸の軸ひずみ γ_x と曲率 κ_y, κ_z を定義する。
梁の中立軸の基底ベクトルを次式で表す。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}(x,0,0)}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}(x,0,0)}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{r}(x,0,0)}{\partial z} \quad (12a-c)$$

軸ひずみ γ_x は Green-Lagrange ひずみを採用し、次式で表す。

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - 1 \right) \quad (13)$$

曲率 κ_y, κ_z を次式で表す。

$$\kappa_y = -\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}, \kappa_z = \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} \quad (14a,b)$$

ひずみ-座標と曲率-座標の関係式は次式となる。

$$\gamma_x = \frac{1}{2L^2} \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\kappa_y = -\frac{1}{2L^3} \mathbf{X}^T \mathbf{H}_y \mathbf{X}, \kappa_z = \frac{1}{2L^3} \mathbf{X}^T \mathbf{H}_z \mathbf{X} \quad (16,17)$$

$\mathbf{G}, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z$ は参考文献⁸⁾⁹⁾を参照する。軸力と曲げによる仮想仕事の式を次式で表す。

$$\int_V \delta \gamma_x(\mathbf{X}, \xi) \tau(\mathbf{X}, \xi) dV + \int_L \delta \kappa_y(\mathbf{X}, \xi) m_y(\mathbf{X}, \xi) dx + \int_L \delta \kappa_z(\mathbf{X}, \xi) m_z(\mathbf{X}, \xi) dx = \delta \mathbf{X}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (18)$$

ここで、 $\delta \gamma_x$: ひずみ増分、 $\delta \kappa_y, \delta \kappa_z$: 曲率増分、 τ : 軸応力、 \mathbf{f} : 荷重モードベクトル、 λ : 荷重係数、 m_y, m_z : 曲げモーメント、 V : 対象領域である。ひずみ、ひずみ増分、曲率、曲率増分、応力、曲げモーメントと節点座標ベクトルの関係式を各関係行列に整理して以下に示す。各関係行列は \mathbf{X}, ξ の関数であり省略する。

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \mathbf{B}_\gamma \mathbf{X} - C, C = \frac{1}{2} & \delta \gamma_x &= \mathbf{B}_\gamma^* \delta \mathbf{X} \\ \kappa_y &= \mathbf{B}_{\kappa_y} \mathbf{X} & \delta \kappa_y &= \mathbf{B}_{\kappa_y}^* \delta \mathbf{X} \\ \kappa_z &= \mathbf{B}_{\kappa_z} \mathbf{X} & \delta \kappa_z &= \mathbf{B}_{\kappa_z}^* \delta \mathbf{X} \end{aligned} \quad (19a-f)$$

\mathbf{B}_γ : ひずみ-座標関係行列、 \mathbf{B}_γ^* : ひずみ増分-座標関係行列、 $\mathbf{B}_{\kappa_y}, \mathbf{B}_{\kappa_z}$: 曲率-座標関係行列、 $\mathbf{B}_{\kappa_y}^*, \mathbf{B}_{\kappa_z}^*$: 曲率増分-座標関係行列である。構成関係式は次式となる。

$$\tau = E\gamma_x, m_y = EI_y \kappa_y, m_z = EI_z \kappa_z \quad (20)$$

離散化釣合ひ式は次式となる。

$$\begin{aligned} EAL \int_0^1 \mathbf{B}_\gamma^{*T} \gamma_x d\xi + EI_y L \int_0^1 \mathbf{B}_{\kappa_y}^{*T} \kappa_y d\xi \\ + EI_z L \int_0^1 \mathbf{B}_{\kappa_z}^{*T} \kappa_z d\xi - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)は非線形方程式となるため、各ステップにおける線形化された増分方程式に接線剛性行列が必要となる。接線剛性行列 \mathbf{K}_T は次式で表す。

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{S_\gamma} + \mathbf{K}_{G_\gamma} + \mathbf{K}_{S_{\kappa_y}} + \mathbf{K}_{G_{\kappa_y}} + \mathbf{K}_{S_{\kappa_z}} + \mathbf{K}_{G_{\kappa_z}} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_{S_\gamma} = EAL \int_0^1 \mathbf{B}_\gamma^{*T} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \mathbf{X}} d\xi, \mathbf{K}_{G_\gamma} = EAL \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{B}_\gamma^{*T}}{\partial \mathbf{X}} \gamma_x d\xi \quad (23a-f)$$

$$\mathbf{K}_{S_{ky}} = EI_y L \int_0^1 \mathbf{B}_{ky}^* T \frac{\partial \kappa_y}{\partial X} d\xi, \mathbf{K}_{G_{ky}} = EI_y L \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{B}_{ky}^* T}{\partial X} \kappa_y d\xi$$

$$\mathbf{K}_{S_{kz}} = EI_z L \int_0^1 \mathbf{B}_{kz}^* T \frac{\partial \kappa_z}{\partial X} d\xi, \mathbf{K}_{G_{kz}} = EI_z L \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{B}_{kz}^* T}{\partial X} \kappa_z d\xi$$

ここで、 $\mathbf{K}_{S_y}, \mathbf{K}_{S_{ky}}, \mathbf{K}_{S_{kz}}$: 線形+大変位剛性行列、
 $\mathbf{K}_{G_y}, \mathbf{K}_{G_{ky}}, \mathbf{K}_{G_{kz}}$: 幾何剛性行列である。式(21),(23)の積分計算は数値積分とし、Gaussの3点積分を採用し、式(21)は次式となる。

$$\frac{EAL}{2} \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{B}_y^* T \gamma_x + \frac{EI_y L}{2} \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{B}_{ky}^* T \kappa_y + \frac{EI_z L}{2} \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{B}_{kz}^* T \kappa_z - \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (24)$$

本研究では、 $\partial \mathbf{r} / \partial y, \partial \mathbf{r} / \partial z$ は縮約操作によって12に低減して連立方程式を解く。一方で、 \mathbf{X} の $\partial \mathbf{r} / \partial y, \partial \mathbf{r} / \partial z$ の項にBernoulli-Euler梁の仮定より、更新された座標値で求める正規直交基底ベクトルを代入し、ひずみや曲率の計算を行う。 $\mathbf{K}_{S_y}, \mathbf{K}_{S_{ky}}, \mathbf{K}_{S_{kz}}$ は、変位を未知量とする有限要素法とは異なり、線形項と大変位剛性行列項を合わせた行列であり、陽な形で2つの成分に分離することはできない。

3 複合張力構造の導入張力による解形態の比較

梁・膜・トラス・ケーブル要素による複合張力構造の形状解析から応力変形解析までを行う。

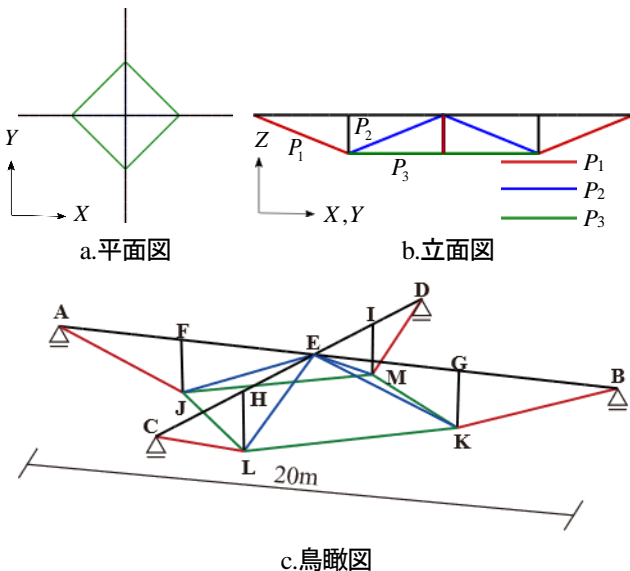


図2 解析モデル

3.1 解析モデル

梁・膜・トラス・ケーブル要素による複合張力構造の解析モデルを図2に示す。AB,CDが梁要素,FJ,GK,HL,IMがトラス要素、その他がケーブル要素である。支持条件はA,B,C,Dを梁の材軸方向へのローラー支持とする。ス

パンはAB,CD=20m、束材長さは2.0mとし、各種設定値は表1に示す。梁要素はBending-active構造を想定しフラットバーを3層重ねとした断面とする。ケーブルに導入する張力を $P_1=6.0\text{kN}$ で固定し P_2, P_3 の張力はそれぞれ1.0~6.0kNの範囲で0.2kN刻みで変化させ、すべての組み合わせについて解析を行い P_2, P_3 の張力と総ひずみエネルギーの解空間を求め、その後いくつかの張力状態でのモデルの応力図を示す。

表1 各種諸量

梁要素			
弾性係数	断面形状 (一層)	断面積	
$2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$	25mm×250mm	$1.875 \times 10^2 \text{ m}^2$	
断面二次モーメント	形状解析 I_y, I_z	$9.77 \times 10^7 \text{ m}^4$	$9.77 \times 10^5 \text{ m}^4$
	応力解析 I_y, I_z	$8.79 \times 10^6 \text{ m}^4$	$9.77 \times 10^5 \text{ m}^4$
トラス要素			
弾性係数	断面積	直径	
$2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$	$1.517 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	101.6 mm	
ケーブル要素			
弾性係数	断面積		
$2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$	$9.55 \times 10^{-5} \text{ m}^2$		
膜要素			
弾性係数	せん断弾性係数	膜厚	ポアソン比
$1.0 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$	$6.0 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$	$1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$	0.3

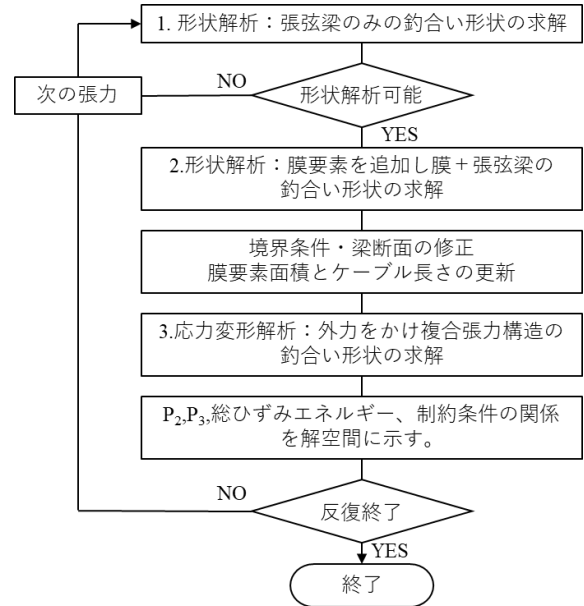


図3 解析フロー

3.2 解析手法

梁要素は2章で示した定式化を用い、ケーブル要素、トラス要素、膜要素は文献3)の定式化を用いる。解析フローを図3に示す。

解析は1.張弦梁モデルの形状解析、2.膜要素を追加した形状解析、3.応力変形解析の3段階に分けて実行する。形状解析時には、梁要素の境界条件をローラー支持とし、梁要素は弾性剛性を考慮し膜・ケーブル要素は幾何剛性

のみを考慮した幾何学的非線形解析を行う。非線形解析技法は Newton-Raphson 法を用いる。この時梁断面は曲げ変形が生じやすく平鋼を積層したせん断すべりを許容する重ね梁を採用する。次に膜要素を追加した形状解析では端点 A,B,C,D はピン支持へと変更し、膜要素の周囲も同様にピン支持とする。膜の張力は 0.2kN ずつ導入し、各張力で釣合い状態が取れたのちに次の張力へと移行し 1.0kN となるまで繰り返し計算を行う。応力変形解析時には形状解析時の梁要素に生じる Active bending による応力を継承し、自重と積載荷重を考慮した鉛直荷重の外力を梁要素に分散し作用させる。外力の加え方は荷重係数 λ を 0.1 から 1.0 まで 0.1 刻みで外力にかけ、収束したのちに次の荷重係数へと移行する。梁・膜・トラス・ケーブル要素は弾性剛性と幾何剛性を考慮した幾何学的非線形解析を行い、非線形解析技法は形状解析時と同様に Newton-Raphson 法を用いる。この時梁断面は剛性を確保するために平鋼のせん断すべりを許容しない合成梁に変形し応力変形解析を行う。なお、せん断すべりの抑制については Active bending 作用後に適宜ボルト接合等が施されるものとする。また、張弦梁のみの形状解析、複合張力構造の形状解析、応力変形解析のいずれの段階においても Newton-Raphson 法の繰り返し回数は 30 回までとする。

4 解析結果

複合張力構造の応力変形解析後の解空間を図 4、 $P_2 = 2.4\text{kN}$ の時の P_3 と総ひずみエネルギー U の関係を図 5、解形状・応力図を図 6 に示す。なお、総ひずみエネルギー U は次式のように示す。

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \Delta \mathbf{X}_k^T (\mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{Q}_k) \quad (25)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{X}$: 変位ベクトル、 \mathbf{Q} : 内力ベクトルであり、 $\mathbf{Q}_0 = 0$ である。

4.1 解空間

図 4 は x,y 軸は P_2, P_3 の張力、 z 軸は総ひずみエネルギー U 、図 5 は $P_2 = 2.4\text{kN}$ の時の解空間で x 軸は P_3 の張力、 z 軸は総ひずみエネルギー U とする。制約条件はケーブル要素がの軸力が引張、梁要素のせん断応力度が許容応力度以下、梁要素の曲げ応力度が許容曲げ応力度以下、トラス要素の軸力が圧縮応力度以下とする。張弦梁のみの形状解析が不可能なモデルを赤、許容解を青、その他の色は各制約条件を満たさなかったものの色で示している。

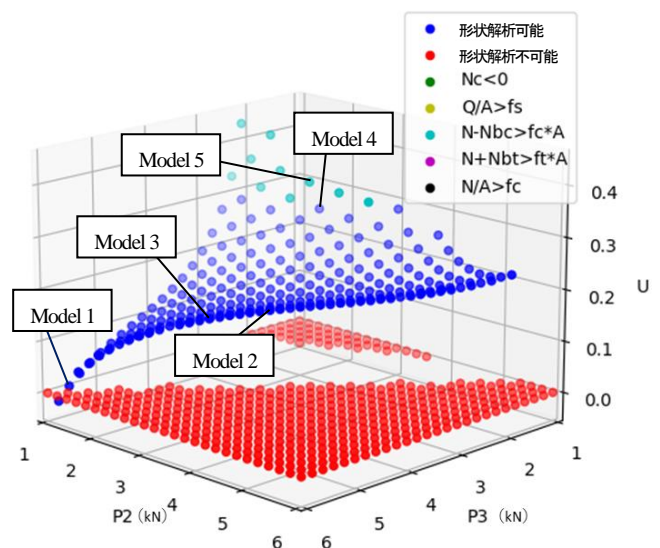


図 4 解空間

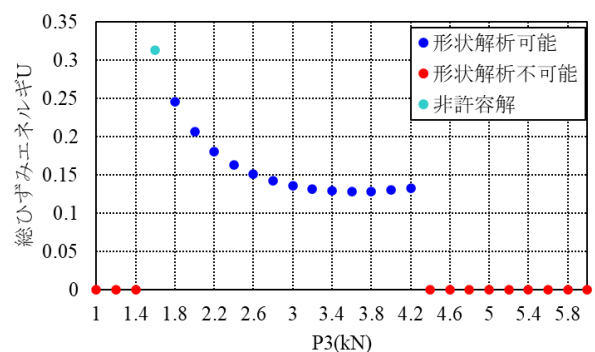
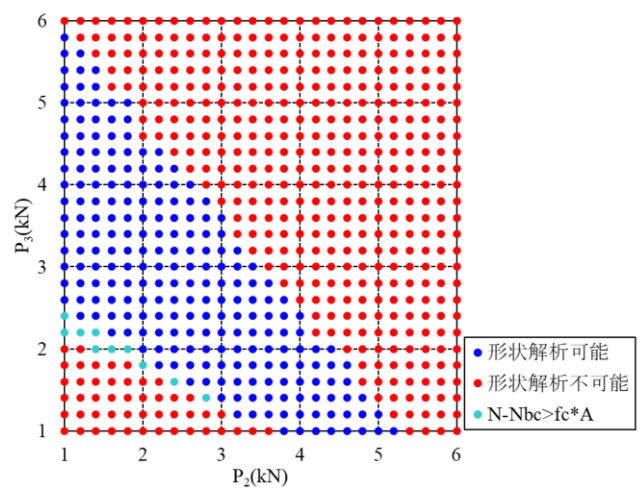


図 5 $P_2 = 2.4\text{kN}$ の時の解空間

図 4 の解空間より総ひずみエネルギーが大きくなると制約条件を満たさないモデルが増えることが判る。また、許容解の解空間は凹んでいることが確認できる。 P_2, P_3 の張力が大きいもの同士、小さいもの同士のモデルは赤く形状解析不可能となっている。この領域では形状を確認すると、フローにおけるステップ 1 の張弦梁のみの

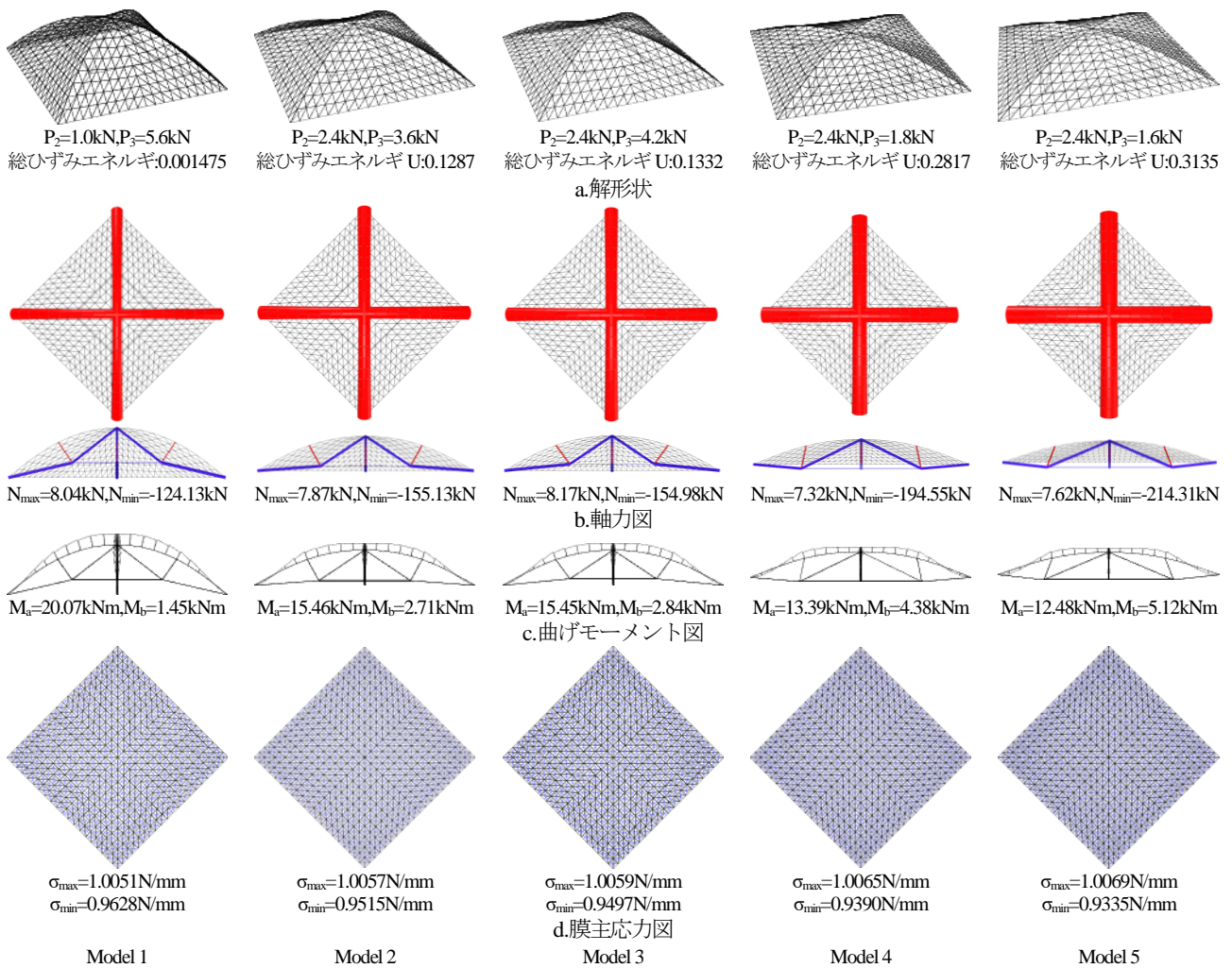


図6 解形状・応力図

形状解析の段階で束材が倒れた状態が収束解として釣合い形状を示しており、初期形状として成り立たないため形状解析不可能としている。また、非許容解は曲げ応力度が許容を超えたものと形状解析不可能なモデルしか存在しなかったことから、制約条件を満たさない張力の組み合わせでは、張弦梁のみの形状解析の段階で束材が倒れつぶれていると考えられ、安定性に問題があると言える。

4.2 解形状と応力図

次に図6の解形状と応力図より特徴を確認する。Model 1は総ひずみエネルギーが最小の解、Model 2は解空間の中で凹となっていた極値の解、Model 3は解空間の中で許容解の端の解、Model 4は総ひずみエネルギーが大きい解、Model 5は非許容解とし、解形状と応力図は左から右へ総ひずみエネルギーが大きくなるように並べている。

軸力図は赤が圧縮、青が引張を示し、平面図と立面図でそれぞれスケールしている。曲げモーメント図の

M_a, M_b はそれぞれ外側の最大モーメント、内側の最大モーメントを表している。

解形状において、ライズに大きく違いがあることが判り、総ひずみエネルギーが小さいほどライズが高いことが確認できる。軸力図から、ライズが高いモデルほど梁要素の圧縮軸力が小さいことが判る。曲げモーメント図から、ライズが低いモデルは内側にモーメントが出ており、外側と内側両側にモーメントが出ると曲率の変曲点が存在し、座屈しやすくなるため好ましくないモデルと言える。ライズが高いほど最大曲げモーメントは大きい。ライズが低いモデルの最大曲げモーメントと比較しても大きな差はないが、最大圧縮軸力はライズの高さによって大きな差がある。また、膜主応力については等張力であるため最大膜主応力と最小膜主応力の差が小さく大きな変化は無いが、総ひずみエネルギーが最小のモデルは差が一番小さいことが判った。

4.3 考察

解空間と解形状、応力図より、非許容解となったモデルは曲げ応力度が許容応力度を超えていたが圧縮力が大きくなっていったことが原因であった。圧縮軸力はライズが高いモデルの方が小さく、ライズが高いモデルは内側の曲げモーメントも小さく座屈の可能性も低いと言える。また、総ひずみエネルギーと解形状の関係はライズが高いモデルほど総ひずみエネルギーが小さく、ライズが低いモデルは総ひずみエネルギーが大きく、非許容解となる傾向があった。Model 1 は、総ひずみエネルギーが最小で圧縮軸力も小さく、内側の最大曲げモーメントも小さいが、 P_2 の張力が小さく、水平力をかけた際に初期張力によるプレストレスが抜けてしまう可能性がある。また、Model 1 の総ひずみエネルギーは最小であるが、図 4 の解空間から、その周辺のモデルは形状解析不可能のモデルも多く、少しの力で非許容解となる恐れがある。そのため今回の条件では Model 2 の解空間の中で凹となっていた極値の解が最もバランスが良く、外乱によって非許容解になりにくい良い解なのではないかと考える。以上より各ケーブルに導入する張力によって解形態やモデルの安定性が決定するため、複合張力構造において導入張力の決定は重要であると考えます。

5 まとめ

本稿では座標仮定有限要素法の梁要素の定式化を導入し、Active bending が作用する梁・膜・トラス・ケーブル要素の複合張力構造の形状解析を行い、ケーブルへの導入張力と総ひずみエネルギーの関係を解空間に示し、総ひずみエネルギーの大小や許容解の端、非許容解のモデルの解形状と応力図から傾向を探った。解空間より、ケーブルへの導入張力のバランスによって張弦梁のみの形状解析の段階で束材が倒れ、解析不可能なモデルを確認した。制約条件を満たさない非許容解は総ひずみエネルギーが大きいものほど傾向が強いが数は少ないため、張弦梁のみの形状解析の段階で不安定なモデルは排除されていることを確認した。解形状と応力図からは、ライズの違いが総ひずみエネルギーや軸力、モーメントに大きく関係していることから、複合張力構造の形状決定問題において各ケーブルに導入する張力が重要な要素の一つであることを示した。今後は、今回固定していた P_1 の張力も変化させ、鉛直荷重のみではなく水平力に対しても解析を行い、違う断面形状に対しても検討して最終的には極値解も探索する最適化問題へと発展させていきたい。

謝辞：本研究は、JST, CREST, JPMICR1911, 公益財団法人能村膜構造技術振興財団の支援を受けたものである。ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) 日本建築学会,空間構造の数値解析ガイドブック,丸善,2017
- 2) 日本建築学会,建築構造物の設計力学と制御動力学,1994
- 3) 本間俊雄,合田雄策,安宅信行:座標値を未知量とした有限要素技術による張力構造解析の一方法,日本建築学会構造系論文集,第71巻,第602号,pp.161-169,2006.4.
- 4) Lienhard, J. and Knippers, J.: Bending-active Textile Hybrid, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 56 (1), pp.37-48, 2015.
- 5) 日本建築学会,マルチボディダイナミクス(2)-数値解析と実際-,コロナ社,2007
- 6) Hussien, H. A.,Shabana, A. A.,Application Of The Absolute Nodal Coordinate Formulation To Multibody System Dynamics, Journal of Sound and Vibration, Vol. 214(5), pp.833-851, 1998.
- 7) Schwab, A. L.,Meijaard, J. P.: Comparison of Three Dimensional Flexible Beam Elements for Dynamic Analysis: Classical Finite Element Formulation and Absolute Nodal Coordinate Formulation, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 5(1), 011010 (10 pages), 2010.
- 8) 鳥越さくら, 横須賀洋平, 本間俊雄:座標仮定有限要素法による梁要素の定式化と形状解析, 第15回コロキウム構造形態の解析と創生 2020,pp.47-52, 2020.11
- 9) 横須賀洋平,鳥越さくら,本間俊雄:座標仮定有限要素技術の梁要素を用いた形状決定問題:Active bending が作用する梁・膜・ケーブル要素による複合張力構造,日本建築学会構造系論文集,2023.02

曲げモーメント比例形状修正による推動型直交格子ドームの部分形状最適化

谷 彪吾¹⁾, 萩原伸幸²⁾

1)大同大学大学院工学研究科建築学専攻, 大学院生, dma2413@stumail.daido-it.ac.jp

2)大同大学建築学部建築学科, 教授, 博士(工学)

1 はじめに

近年、設計・解析技術や施工技術の進歩により、任意形状の曲面を持ったシェル構造が設計・施工されるようになってきている。このようなシェル構造の設計では、局所的に曲げモーメントが大きくなるように曲面の修正が必要であり、この修正には、形状最適化手法の適用が有効であると考えられる。大森ら¹⁾はシェルの応力分布を目的関数とした解析により、曲げモーメントの発生を抑制するシェル構造の曲面形状を求める手法を提案している。また、自然に吊り下げられた形態は引張力だけで荷重に抵抗するため、重力下において力学的に合理的な形態といえる。渡邊ら²⁾は、吉中ら³⁾の提案した一般逆行列を用いた不安定構造の解析手法によって吊り下げ格子の形状を求め、さらに幾何学的非線形解析を行うことで曲げが生じない任意形状の格子シェルを得る手法を提案している。このように様々な最適化手法が提案されているが、実際の構造設計にはあまり普及が進んでいない。それには最適化の抱える諸問題が原因となっており、例えば最適化の流れや目的関数等の設定が実務者にとって分かりにくいということが挙げられる⁴⁾⁵⁾。

著者の1人⁶⁾は目的関数を定義せず、構造解析によって得られた曲げモーメント分布に比例して節点座標を段階的に移動させていく手法を提案している。この手法は骨組の曲げモーメント図と軸力のみで荷重に抵抗する骨組の形の関係⁷⁾から、骨組に生じる曲げモーメント図がその構造形態近傍に存在する軸力抵抗系への局所的形状ベクトルを与えると仮定した構造最適化手法である。

本論文は、この曲げモーメント比例形状修正による形状最適化手法を鉄骨ラチスシェルの最適化問題に適用しようとするものである。この手法は初期形状や拘束条件を変化させることで形状が多様に変化し、また簡便な解析であるため非常に短時間で求まる。ところで、2方向に曲率を有するシェル曲面において、その多くの部分は単純な幾何学形状に従うものとしても元々膜応力が支配的であり、大きな曲げモーメントの発生は境界付近に限定される。このことは、大部分においては規則性を持つ

た形状や部材配置であっても、部材断面を増大させねばならないような不利な応力分布にさらされることはなく、最適化すべき領域は周辺部、または支持点近くの形状に限定されることを示唆している。

本論文では、自由境界を持つ鉄骨ラチスシェルを想定し、その周辺境界における節点座標のみを可変とした形状修正を行うことにより、構造的に優位な形状を得ることができるかを4章で検討し、5章ではその形状とは異なる解形状を同一モデルで得られるかを検討する。

2 形状解析手法

2.1 基本アルゴリズム

- 1) 初期形状を与える。
- 2) 設定外力から各節点荷重を計算する。
- 3) 2の荷重に対して一般的な応力解析を行う(図1)。
- 4) 応力解析で得られた曲げモーメントにより形状修正を行う。形状修正量を次式で求める。

$$\Delta X = \frac{M}{M_0 \max} \times \delta_x \quad (1)$$

なお、節点座標移動の方向としては、曲げモーメント図の描かれる側と逆方向に移動させる(図2)。

- 5) 形状修正後の曲げモーメントの最大値と初期形状における曲げモーメントの最大絶対値の比が、あらかじめ設定された曲げモーメント比を下回るまで、修正後の形状に対して2からの過程を繰り返す^{*1)}。

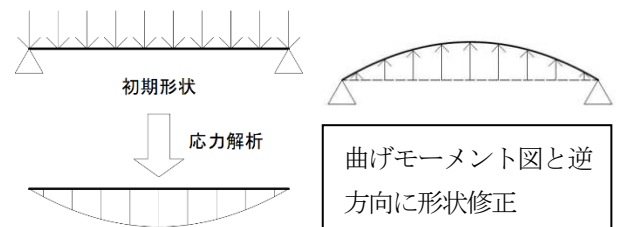


図1 応力解析による曲げモーメント図

図2 曲げモーメントに比例した形状修正

*1後述する解析例では設定された曲げモーメント比を下回らなくても、それが一定の減少幅を示したところで形状修正を打ち切っている。

2.2 立体骨組の形状修正のベクトル計算

1 軸曲げを受ける梁部材では、節点移動は梁部材に対して鉛直方向にのみ生じるため、(1)式のように修正量を規定すればよいが、立体骨組では部材の交差する節点で曲げモーメント図の描かれる向きが変わるので、これを考慮した節点座標の修正方法を考える必要がある。

節点において曲げモーメント図の描かれる方向に伸びる梁要素に垂直なベクトル \mathbf{V}_i を考える。 \mathbf{V}_i の大きさは i 要素の材端モーメントの大きさに等しいとし、これらのベクトルの和 \mathbf{V} を求める。この \mathbf{V} を節点移動の方向と大きさを決める基準ベクトルとする。すなわち、(1)式の M を \mathbf{V} に、初期形状における \mathbf{V} の最大絶対値 $|\mathbf{V}_{0\max}|$ に置き換えて、次式により節点座標修正を行う

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}_{0\max}|} \times \delta_x \quad (2)$$

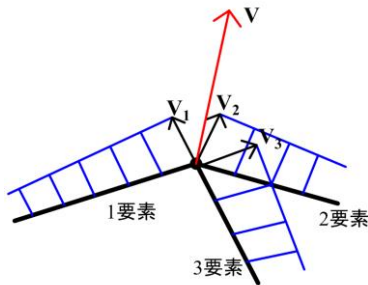


図3 各節点のベクトル計算

2.3 形状修正の拘束について

本解析においては、修正ステップごとに x 、 y 、 z 方向それぞれ基準修正量を基に節点移動量を計算している。そこで節点における指定した移動方向の自由度を拘束することで、拘束された移動方向へは節点移動量の計算がされないアルゴリズムとしている。そのため、制約の与え方によっては初期形状を維持したり、節点座標が移動する方向を限定したりすることを可能としている。

3 解析モデル

3.1 初期形状の設定

初期形状となるモデルはアーチを x 、 y 方向に平行移動させることによってできる推動型の格子ドームである。 x 、 y 方向のグリッド分割数はともに 10 としている。四辺を自由境界とし、支持部となる四隅を切欠いている。初期形状の各節点の z 座標は、 x 座標と y 座標に基づいて(3)式で決定され、各部材はシェルは曲面の上に適切に配置される。

$$z = \sqrt{R - \left(\frac{Lx}{2} - x\right)^2} - \sqrt{R - \left(\frac{Lx}{2}\right)^2} \quad (3)$$

$$+ \sqrt{R - \left(\frac{Ly}{2} - y\right)^2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{Ly}{2}\right)^2}$$

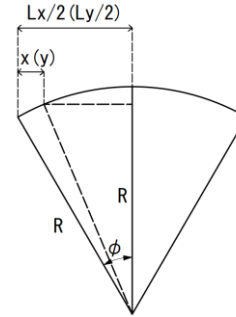


図4 ドームを構成するアーチ

3.2 解析条件

初期形状のモデルはスパン Lx 、 $Ly=4000\text{cm}$ の直交格子ドームである。本研究では曲率半径 $R=3000$ 、 4000 、 $5000(\text{cm})$ の 3 つのモデルで形状修正を行う。以降、それぞれのモデルを $R3000$ 、 $R4000$ 、 $R5000$ とする。部材は $\Phi 318.5 \times 6.0$ の円形鋼管とし、ヤング係数 $2.05 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ 、せん断弾性係数 $7.884 \times 10^3 \text{kN/cm}^2$ 、ドームのライズ H は図6に示した通りである。支持条件は全てピン支持で、支持節点を図5に○で示す。荷重は内部節点には 1kN 、境界節点には 0.5kN を鉛直方向下向きに与える。

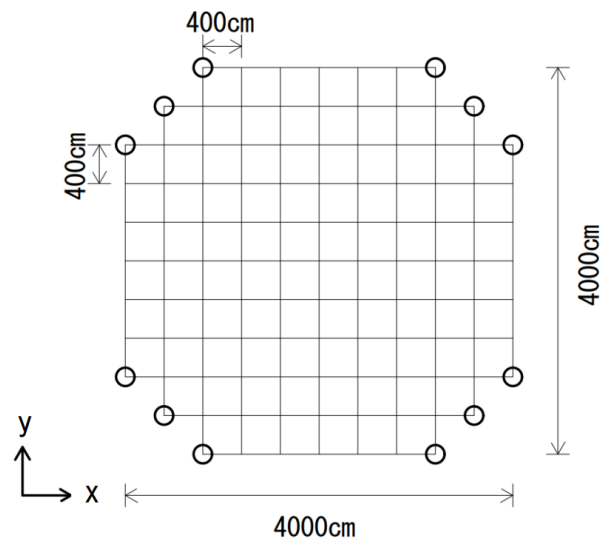


図5 平面図

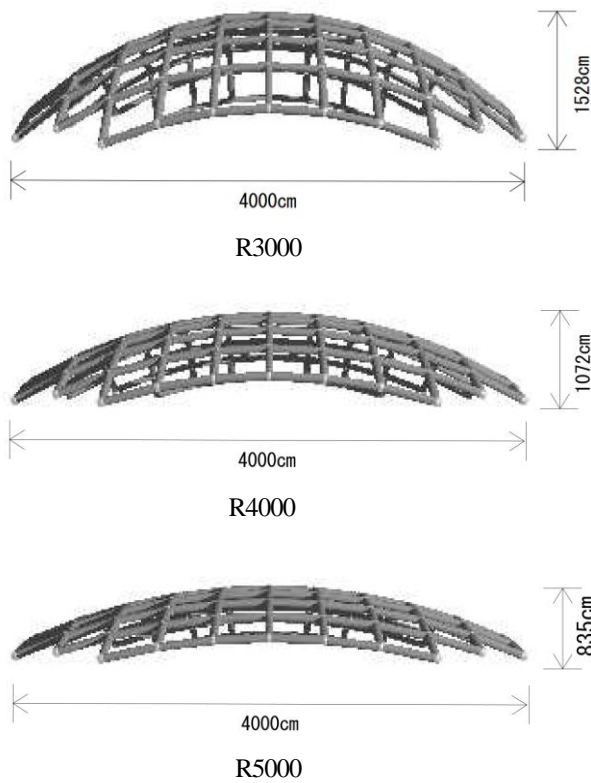


図6 立面図

4 中央部を拘束した形状修正

4.1 中央部拘束の拘束条件

1章で述べたように、大きな曲げモーメントの発生は境界付近に限定される。そのため中央部では形状修正を行わなくとも曲げモーメントの最小化は十分に図れるのではないかと考え、中央の節点を動かさないように拘束条件を与えて形状修正を行った。

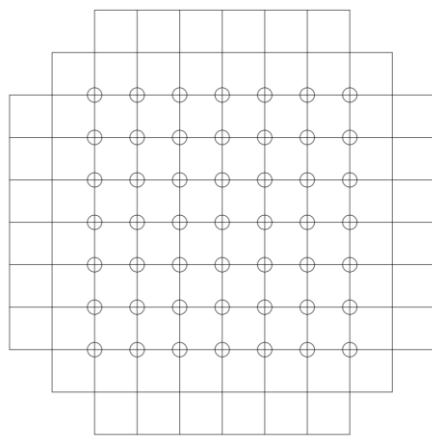


図7 拘束節点(中央部拘束)

表1 拘束条件(中央部拘束)

拘束条件	拘束節点
x, y, z 拘束(水平方向、鉛直方向拘束)	支点、中央部節点(図7 ○節点)

4.2 中央部拘束時の解析結果

解析はすべてのモデルで 5000 ステップまで行った。初期形状を図8、最適化形状を図9に示す。曲げモーメントの応力分布をカラーコンター図で示している。曲げモーメント比(=2軸曲げ合成値/初期形状の最大の2軸曲げ合成値)が1のときを赤、0のときを青とし、中間の0.5のときに緑としている。

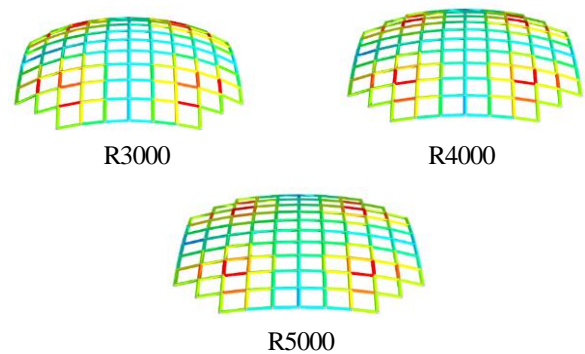


図8 初期形状

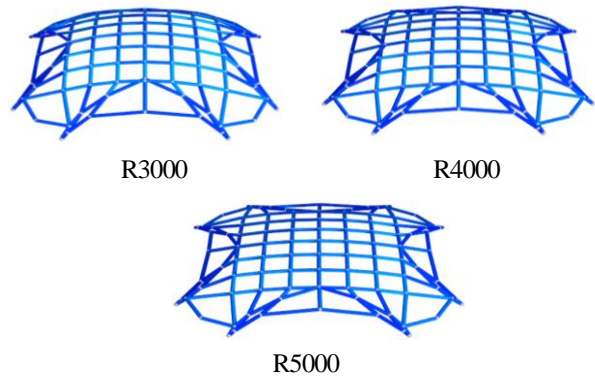


図9 最終形状(中央部拘束)

中央部の節点を拘束し、範囲を境界周辺に限定して形状修正を行ったが、全てのモデルで十分に曲げモーメントを小さくした形状が得られた。表2を見てみると、初期形状の最大曲げモーメントに対する最適化形状の最大曲げモーメントの比がすべてのモデルで約 1/10 となっていることが分かる。

最適化形状(図9)を見てみると、水平方向にアーチを形成するように形状修正されているのが分かる。拘束条件を与えずに形状修正した場合も同様の結果となっており、

このことからこの手法で推動型直交格子ドームの形状修正を行うと、水平方向にアーチを形成し、そのアーチによって曲げモーメントの発生を抑える最適化形状が得られることが分かった。

図 10 に 1000 ステップごとの最大曲げモーメント比の変化を示す。全てのモデルにおいて 1000 ステップで曲げモーメントが大きく減少しているが、そこからはほとんど変化しておらず、形状修正の初期段階でこの解析が収束していることを示している。

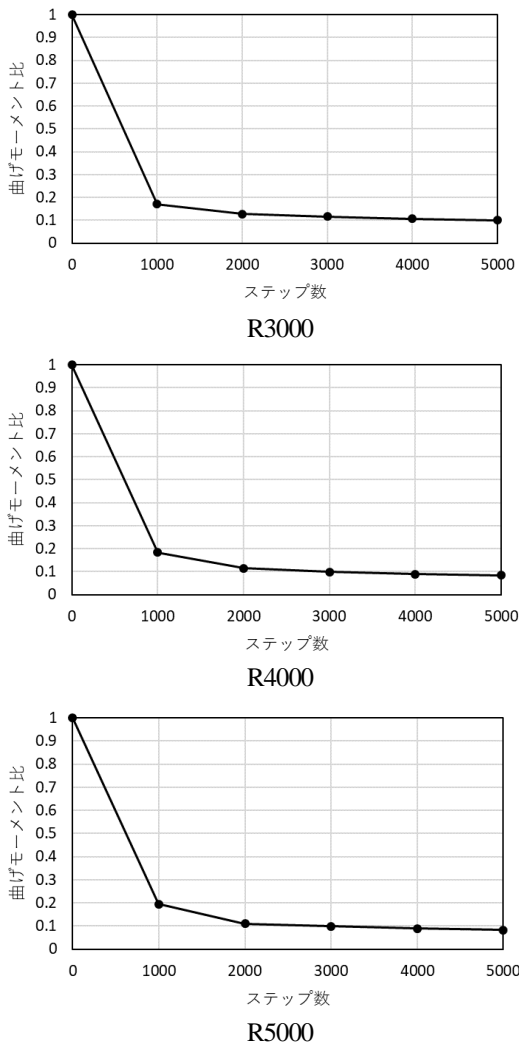


図 10 最大曲げモーメント比の変化(中央部拘束)

表 2 最大 M 比とライズ(中央部拘束)

	R3000	R4000	R5000
最大曲げモーメント比	0.10039	0.08425	0.08220
ライズ	1528cm	1072cm	843.2cm

5 水平移動を拘束した形状修正

前章では中央部の節点移動のみを拘束して形状修正を行い、水平方向にアーチを持つ形状が得られた。本章では同一モデルで水平方向にアーチを持たない形状を検討する。この形状修正では全ての節点で水平方向の移動を拘束することで、水平方向のアーチを形成できなくする。

5.1 水平拘束の拘束条件

拘束条件と拘束節点を表 3 と図 11 に示す。

表 3 拘束条件(水平拘束)

拘束条件	拘束節点
x, y 拘束(水平方向拘束)	支点以外の全ての節点 (図 1 ◇ 節点)

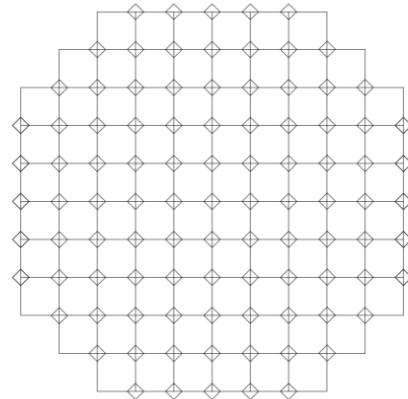


図 11 拘束節点(水平移動拘束)

5.2 水平拘束時の解析結果

5000 ステップまで解析を行った。その最終形状を図 12 に示す。また、1000 ステップごとの最大曲げモーメントの比の変化を図 13 に、ライズの変化を図 14 に示す。表 4 に、5000 ステップにおける最大曲げモーメント比とライズの結果をまとめた。

表 4 最大 M 比とライズ(水平拘束)

	R3000	R4000	R5000
最大曲げモーメント比	0.40358	0.44427	0.46218
ライズ	3059cm	2628cm	2434cm

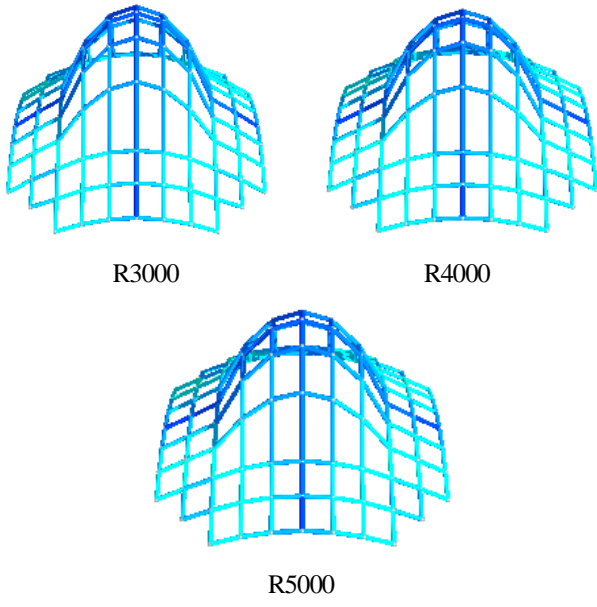
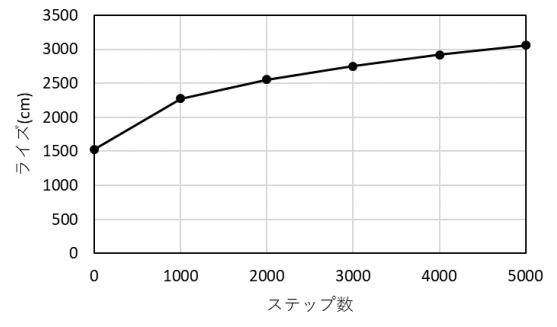
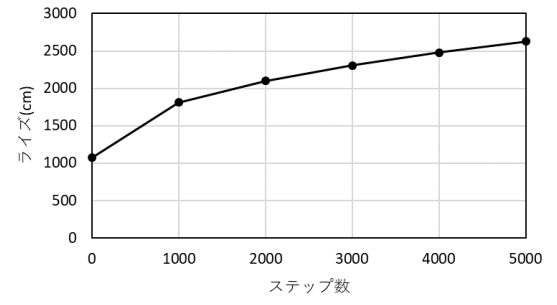


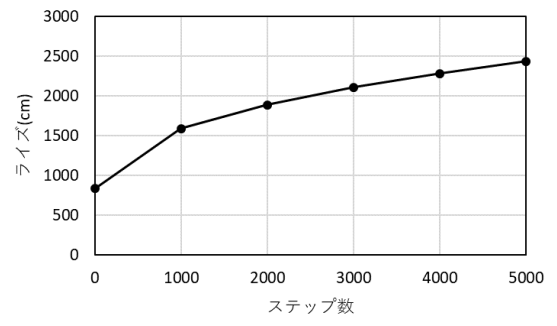
図 12 最終形状(水平拘束)



R3000

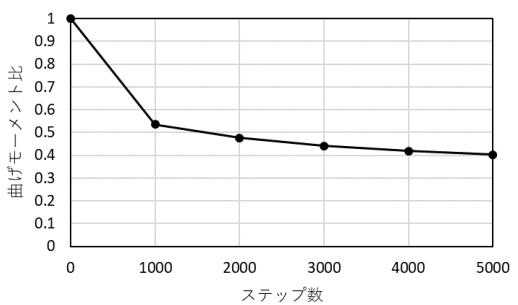


R4000

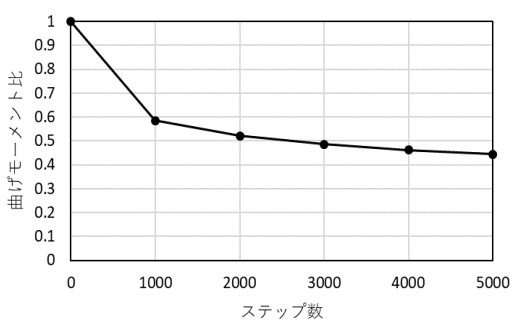


R5000

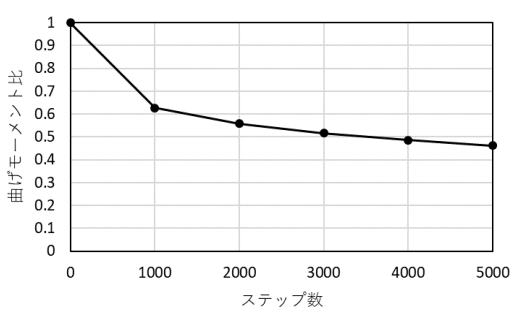
図 14 ライズの変化



R3000



R4000



R5000

図 13 曲げモーメント比の変化(水平拘束)

水平拘束の条件下でも中央部拘束時の形状修正と同様に十分に曲げモーメント比を小さくすることができたが、ライズが過剰に高くなってしまった。図 14 を見てわかる通り、ライズはステップ数に応じて高くなっている。ここでライズの変化に着目してみると、形状修正の初期段階におけるライズの変化に対して、2000 ステップ以降ではその増え方が鈍化している。これは曲げモーメントの変化が小さくなっているということであり、実際に曲げモーメント比の変化(図 13)を見てみると 1000 ステップ辺りで減少幅が小さくなっていることが分かる。そこで、ライズを抑えつつ、初期形状に対して一定の曲げモーメントの減少を示す形状を得ることを目的とし、1000 ステップでの形状を最適化形状とした。

5.3 水平拘束時の最適化形状

図 15 に 1000 ステップでの形状を示し、表 5 にこの形状における曲げモーメント比とライズの結果をまとめた。

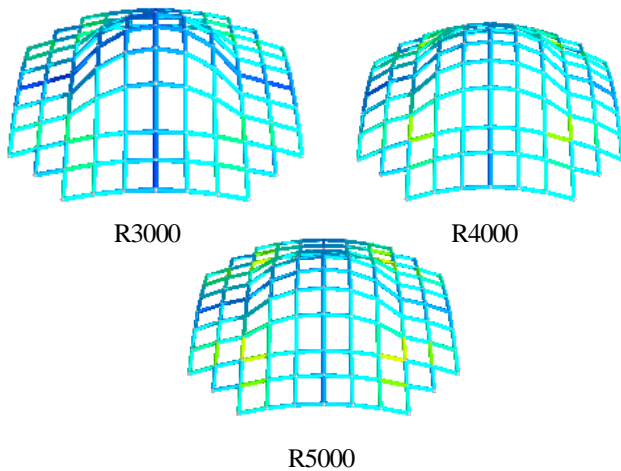


図 15 1000 ステップでの形状(水平拘束)

表 5 1000 ステップでの最大 M 比とライズ(水平拘束)

	R3000	R4000	R5000
最大曲げモーメント比	0.53601	0.58478	0.62627
ライズ	2276cm	1811cm	1591cm

図 15 と表 5 を見ると、ライズを抑えることと曲げモーメントを小さくすることの両方をバランスよく達成できているといえる。最もライズの高いモデルである R3000 においても、5000 ステップでの形状と比べると 783 cm ライズを低くすることができている。また、曲げモーメントに関してもステップ数を 1/5 にしたが、初期形状に対する曲げモーメント比は 0.5~0.6 程度に抑えられている。

6 まとめ

本論文では、曲げモーメントに比例した形状修正によって推動型直交格子ドームの最適化形状を求めた。曲率半径の異なる 3 つのモデルで形状修正を行い、拘束条件を変えてそれぞれ 2 種類の最適化形状を求めた。

1 つ目の形状は中央部を拘束する拘束条件を与えることで得られた。形状修正を行う領域を周辺境界部に限定しているため、中央部は単純な直交格子となっている。また、この形状は周辺境界部で水平方向にアーチが形成されており、それによってドーム全体の曲げモーメントが小さくなっている。

2 つ目の形状は全節点で水平方向の移動を拘束する拘束条件を与えることで得られた。水平方向にアーチを持たない形状が得られたがライズが過剰に高くなってしまった。ライズと曲げモーメントはトレードオフの関係にある。そこで、形状修正のステップ数を減らすことでライズを抑えながら、曲げモーメントが 50~60% になる形状を選択した。

2 種類の形状は拘束条件によって、修正を行う領域と節点移動の方向を限定したが、解析は簡便な計算であるため非常に短時間で求められている。

また、本手法では初期値依存性が認められており、同じ推動型の直交格子ドームでも部材の方向性を変えることで異なる形状が得られることが考えられる。その検討を今後行いたい。

参考文献

- 1) 大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究 その 1 シェル構造への適用, 日本建築学会構造系論文集, No.496, pp.67-73, 1997.6
- 2) 渡邊祥, 吉中進, 谷口与志也: 自重下における曲げのない軸力抵抗型に任意形状格子シェルの形状決定法の提案, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, 構造 I, pp.829-830, 2010.9
- 3) 吉中進, 半谷裕彦, 川口健一: 任意形状シェルの形状解析, 生産研究, 47 巻, 1 号, pp.50-53, 1995.1
- 4) 松尾智恵, 藤田皓平, 永野康行, 山川誠: 建築構造設計における最適化プログラムの利用に関する意識調査アンケート その 1 アンケート調査及びヒアリング結果, 理論応用力学講演会講演論文集, No.64, OS5-01, 2017.8
- 5) 藤田皓平, 松尾智恵, 永野康行, 山川誠: 建築構造設計における最適化プログラムの利用に関する意識調査アンケート その 2 回答者の属性別分析, 理論応用力学講演会講演論文集, No.64, OS5-01, 2017.8
- 6) 萩原伸幸: 曲げモーメント分布に比例した形状修正による軸力抵抗型骨組構造物の形成, コロキウム構造解析の解析と創生 2009 資料集, pp.105-108, 2009.11
- 7) 斎藤公男: 空間 構造 物語 ストラクチャル・デザインのゆくえ, 彰国社, 2003.10

膜主応力による曲線梁の形状決定手法 —等方軸力状態を目的とした梁配置最適化—

嶋尾恭兵¹⁾, 横須賀洋平²⁾

1) 鹿児島大学理工学研究科工学専攻, 大学院生, k3045145@kadai.jp

2) 鹿児島大学理工学研究科工学専攻, 准教授, 博士(情報科学), yokosuka@aae.kagoshima-u.ac.jp

1 はじめに

数値解析で得られる力学的に合理的な形状は、建築の施工性や製作性を度外視した実現性が低く、高い製作コストを有する結果となる傾向がある。したがって、人手による製作工程を介さずに直接計算機のデータを高精度に出力するロボットアームや 3D プリンティング技術を建築に導入する研究が行われている。

Pier Luigi Nervi による RC の曲線梁は、スラブの自重によって生じる主曲げモーメントの方向に沿った梁配置をしており、効率的に曲げモーメントを伝達することができる力学的に合理的な梁の形状を構成しているが、高い製作コストを有する形状であるため設計事例が少ない。3D プリンティング技術による型枠製作が容易となれば、力学的な合理性を有する曲線梁の実現性が高まると期待される。

本研究では、膜主応力のみで釣り合う吊り下げ曲面における主応力に沿った曲線梁グリッドシェル構造の形状決定手法を提案する。曲線梁モデルを作成する場合、主応力線を恣意的に選択する手法が提案されている。一方で、本手法は複数の主応力線の中から構造最適化による最適な組み合わせを選択し、力学性能の向上を目的とする。グリッドシェル構造において、直交する部材同士で軸力を均一に伝達することは材料の断面寸法を揃えることができるという点で効率的である。本稿では、吊り下げ曲面をシェル要素として求めた主応力に基づく曲線梁モデルの軸力伝達の不均一に関する問題点を挙げ、等方的な軸力が伝達する形状を得ることを目的とした手法を示す。

2 曲面形状決定

曲線梁を配置する曲面の形状解析手法について説明する。曲面形状は力学的合理性に優れることで知られている吊り下げ曲面を用いる。形状解析には有限要素法における膜要素を用いた幾何学的非線形解析を採用する。以下解析手法について説明する。

2.1 幾何学的非線形解析による曲面形状解析

非線形解析の参照配置に updated Lagrange 法を用いる。定式化を以下に示す。update Lagrange 法では時刻 t までを既知とし、増分変位 $\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}$ を変位 \mathbf{u} として表す。時刻 $t + \Delta t$ における非線形の釣合い方程式は次式のように表される。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

ここで \mathbf{Q} : 内力ベクトル、 \mathbf{f} : 外力ベクトルである。式(1)をテイラー展開により次の線形化した方程式で表す。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t) + \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{u}_t + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{f} = 0 \quad (2)$$

仮想仕事の原理より $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t + \mathbf{u})$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}) = & \int_V \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}_{NL}^*(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_t dV \\ & + \int_V \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}_t dV \end{aligned} \quad (3)$$

ここで \mathbf{B}_L 、 \mathbf{B}_{NL}^* : ひずみ—変位関係行列の線形項、非線形項、 $\boldsymbol{\sigma}_t$: 時刻 t における応力ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$: 増分応力ベクトルである。時刻 t について整理することで $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t)$ は次式のように表される。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t) = \int_V \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}_t dV \quad (4)$$

式(3)を \mathbf{u} について微分することで接線剛性行列 \mathbf{K}_T は次式で表される。

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{u}_t + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (6) \quad \mathbf{K}_G = \int_V \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}^*(\mathbf{u})^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}_t dV \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{K}_L : 線形剛性行列、 \mathbf{K}_G : 幾何剛性行列である。材料の伸びを無視し理想的な吊り下げ曲面を求めるため線形剛性 \mathbf{K}_L を除外する。式(2)に式(4)、式(5)を導入すると、増分範囲において線形化を施した次の接線方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{f} - \int_V \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}_t dV \quad (8)$$

反復計算解法として Newton-Raphson 法を用いる。上式より $\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}$ を求め、式(9)により節点座標を更新し、式(8)右辺(不釣り合いベクトル)のノルムが十分小さくなるまで操

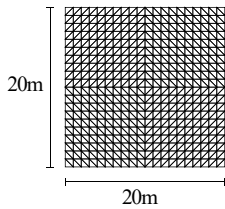


図1 解析モデル

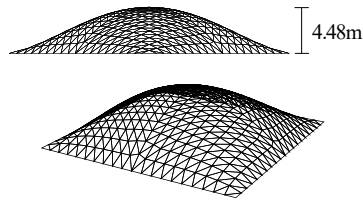


図2 釣合い形状

作を繰り返すことにより、釣合い形状を求める。吊り下げ曲面は応力が高さに比例し、等方応力状態となることが知られているため⁴⁾、式(10)で応力を与える。

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = S_e \left(|wz_t - \lambda| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / t_e \right) \quad (10)$$

ここで、 \mathbf{x} :節点座標ベクトル、 t_e :膜厚、 S_e :要素の面積、 w :単位面積荷重、 z_t :要素重心におけるz座標、 λ :初期応力に相当する項である。本稿では、収束性改善のため応力密度法を用いて応力に面積 S_e をかけている。

2.2 解析モデル

解析モデルは図1に示す一辺20mの正方形平面を有する膜要素である。外力は鉛直上向きに等分布荷重を作用させる。各種パラメータは表1に示す。解析により得られた釣合い形状を図2に示す。

3 曲面梁の形状決定

2章で説明した曲面形状解析によって得られた曲面内の曲線梁形状の決定手法を以下に示す。曲線梁形状決定手法として、シェル要素における主応力を参照したモデル(Model-A)、等高線を参照したモデル(Model-B)の2つを示す。

3.1 シェル要素主応力モデル(Model-A)

図2に示す2章で得られた曲面をシェル要素とし、応力解析を行うことで主応力の分布を確認し、これをもとに曲線梁を作成する。要素として Kirchhoff 理論要素⁵⁾⁶⁾を用いる。主応力の算出には固有値解析を用いる。各要素の応力ベクトルをテンソル表記 $\boldsymbol{\sigma}'$ で表す。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

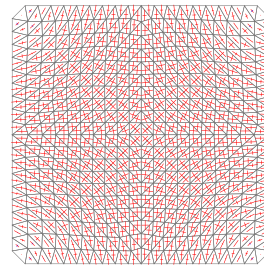
$\boldsymbol{\sigma}'$ を対角化し固有値、固有ベクトルを求めることにより、各要素における主応力の大きさと方向を得る。応力解析のパラメータを表2に示す。材料は繊維補強コンクリートを想定している。

表1 膜要素パラメータ

初期応力に相当する項	$\lambda = 3.0$
膜厚	$t = 0.001 \text{ m}$
荷重条件	$w = 0.1 \text{ kN/m}^2$ (上向き)
境界条件	外周ピン支持
収束判定値	節点の最大残差誤差 $\leq 10^{-5}$

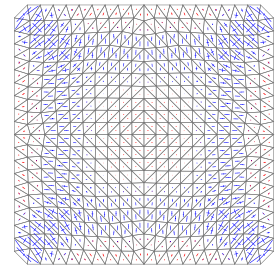
表2 シェル要素パラメータ

弾性係数	$E = 2.26 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
板厚	$t = 0.1 \text{ m}$
ポアソン比	$\nu = 0.2$
荷重条件	$w = 0.1 \text{ kN/m}^2$ (下向き)
境界条件	外周ピン支持



$$N_{\max} = 0.970, \\ N_{\min} = -6.124$$

主応力図(kN/m²)



$$M_{\max} = 0.0029, \\ M_{\min} = -0.0005$$

主曲げモーメント図(kNm/m)

図3 応力図

図3に応力解析によって得られた主応力・主曲げモーメント図を示す。ここで主応力図において青色が引張力、赤色が圧縮力を表し、主曲げモーメント図において青色は下に凸、赤色が上に凸を表す。隅部を中心に同心円状に分布する最大主応力とそれに直交して隅部に向かう最小主応力が確認された。主応力に対して曲げモーメントが小さく、荷重を軸力で負担する合理的な曲面となっていることが確認している。

3.1.1 曲線の描画

ここで、図3の主応力分布を曲線化するための主応力追跡方法を示す(図4)。

1. 曲面上の任意の点を始点aとする。その点を含む要素Aの領域を超えるまで、その要素の主応力方向に線を引く。
 2. 1で引いた線と隣り合う要素Bの境界の交点bから次に隣り合う要素Cとの境界線まで、要素Bの主応力方向に線を引く。
 3. 曲面境界に達するまで、2の工程を繰り返す。
- 始点は各三角形要素の重心とする。上記の手順で作成した主応力線を図5に示す。

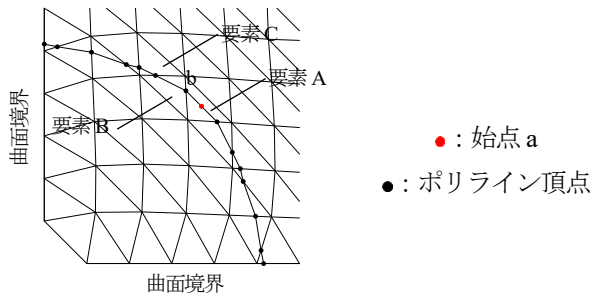


図4 主応力の曲線化

3.2 等高線モデル (Model-B)

式(10)によると理想的な吊り下げ曲面は、同じ高さで応力の大きさが等しい。これにより、等高線とそれに直交する勾配曲線を選択し、その最適化を行うことで、等方的な軸力状態を実現する曲線梁モデルの構築を目指す。

3.2.1 曲線の描画

等高線の描画には Grasshopper の Contour、勾配曲線はプラグイン Nautilus の Flow on Mesh along Scalar Gradient を用いている。作成した曲線を図6に示す。

4 部材配置最適化

3章で作成した曲線の中から総ひずみエネルギーを最小化する組み合わせの探索を行う。最適化手法には発見的多点探索法により、生物進化のメカニズムに着想を得たGA(遺伝的アルゴリズム)⁷⁾を採用する。

4.1 最適化定式化

以下に最適化定式化を示す。

$$\text{Find } \mathbf{R} = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots]$$

$$\text{to minimize } f(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$$

$$V = 1.7168 \text{ m}^3$$

$$\text{subject to } F = 99.44 \text{ kN}$$

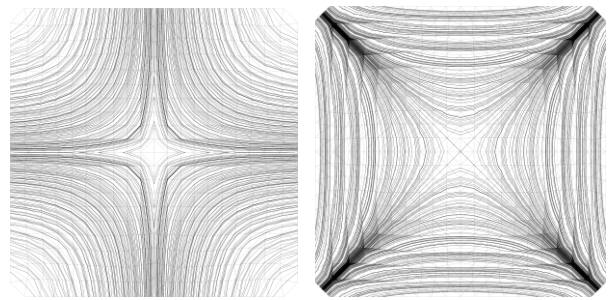
$$\sigma_i < \sigma_a$$

ここで、 \mathbf{R} ：曲線を選択(0：選択しない、1：選択する)、 $f(\mathbf{R})$ ：目的関数、 \mathbf{d} ：節点変位ベクトル、 \mathbf{K} ：全体剛性行列、 V ：部材総体積、 F ：総荷重、 σ_i ：部材*i*の応力度、 σ_a ：許容応力度である。個体間で部材量を揃えるため部材総体積を制約条件として数値を指定し、解析モデルの総部材長*L*に応じて断面積*A*を決定する。同様に解析モデルにかかる総荷重についても数値を指定している。表3にGAで用いたパラメータを示す。表4に梁要素のパラメータを示す。断面形状は正方形とする。

選択された曲線同士の交点で区切られた区間を一つの梁要素とし、これに基づいて解析モデルを構成する。

4.2 解析モデル

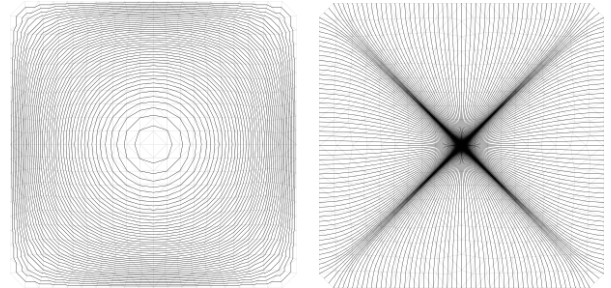
図7に最適化問題で扱う参照形状 Model-A、Model-B を



最大主応力線

最小主応力線

図5 曲線 (Model-A)



等高線

勾配曲線

図6 曲線 (Model-B)

表3 GAパラメータ

個体数	50
世代数	1000
交叉率	0.7
突然変異率	0.05
エリート率	0.1
遺伝子長	Model-A : 89bit (最小主応力線の本数)
	Model-B: 66bit (勾配曲線の本数)
選択方式	ルーレット方式
交叉方式	一様交叉

表4 梁要素パラメータ

弾性係数	$E=2.26 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
ポアソン比	$\nu=0.2$
断面積	$A=V/L$
梁幅・梁せい	$b, h = \sqrt{A}$
境界条件	対称境界A : x, θ_y, θ_z 拘束 対称境界B : y, θ_x, θ_z 拘束 境界C : ピン支持

それぞれ示す。Model-A では曲面形状を維持するために、最大主応力線同士の間隔が均等になるように任意に選択し、最小主応力線の選択を設計変数とする。同様に Model-B では等高線を任意に選択し、勾配曲線の選択を設計変数とする。外周部はピン支持とし、解析領域は形状と载荷条件の対称性を考慮して 1/4 領域とする。

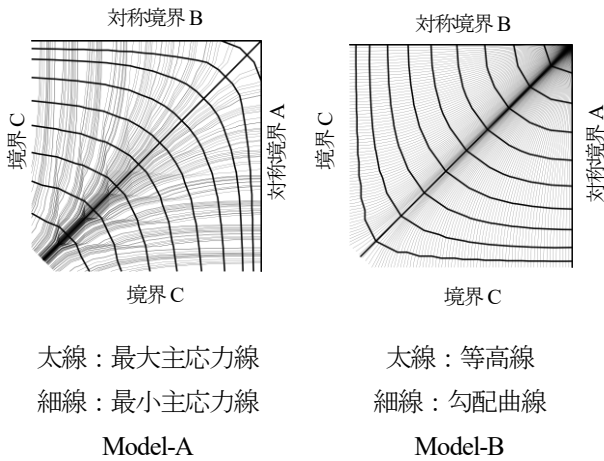


図7 解析モデル (1/4 領域)

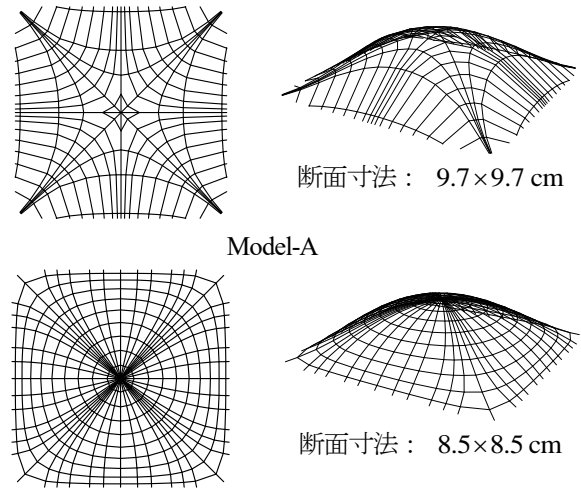
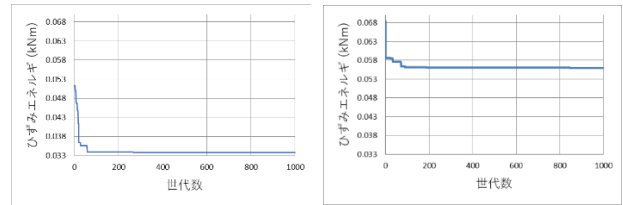


図8 最適解形状

4.3 解析結果

総ひずみエネルギーが最小となる最適解形状を図8に全体領域で示す。目的関数の遷移を図9に示す。

解析結果から、Model-A および Model-B のいずれにおいても、最適解形状では部材がバランスよく配置されるように曲線が選択されていることが確認できた。このことから、部材の総体積を一定に保ちながら総ひずみエネルギーを最小化することで、曲線の選択数に制約を設けなくても、バランスの取れた部材配置が実現可能であると考えられる。さらに、図9の目的関数の遷移から、Model-A は Model-B に比べて総ひずみエネルギーが低くなる傾向が確認された。



Model-A: $f(\mathbf{R}) = 3.341 \times 10^{-2} \text{ kNm}$
 Model-B: $f(\mathbf{R}) = 5.539 \times 10^{-2} \text{ kNm}$

図9 目的関数遷移

5 伝達する軸力の等方性

2章で得られた曲面(図2)に基づき、直交格子梁モデル(Model-C)を作成した。Model-A および Model-B と同様の条件で応力解析を行い、曲線梁モデルと従来型グリッドシェル構造の力学性状を比較する。Model-C の形状を図10に示す。また、各節点まわりの軸力標準偏差を算出することで、交差する部材における軸力伝達の等方性を評価する。以下に軸力標準偏差の定式化を示す。

$$\alpha = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (N_j - \bar{N})^2} \quad (12)$$

ここで、 α : 全節点における軸力標準偏差の平均、 n_p : 節点数、 N_j : 部材 j の軸力、 \bar{N} : 節点 i に接続する部材の軸力平均値である。また、曲面境界上の節点は計算に含まず、部材同士の交点のみで計算を行う。図11に節点まわりの部材のイメージ図を示す。

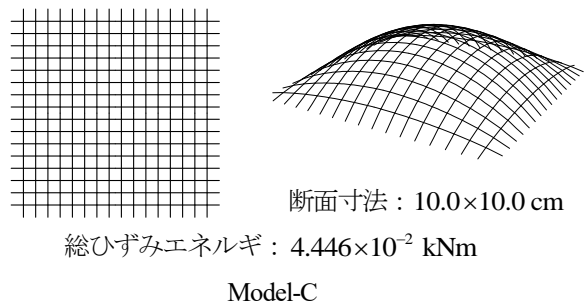


図10 直交格子梁モデル

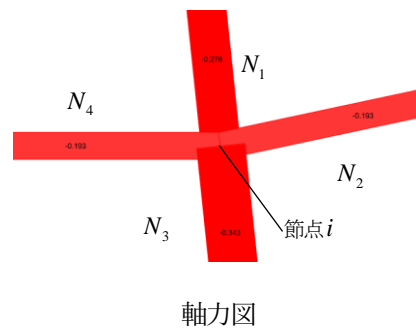


図11 節点 i まわりの部材

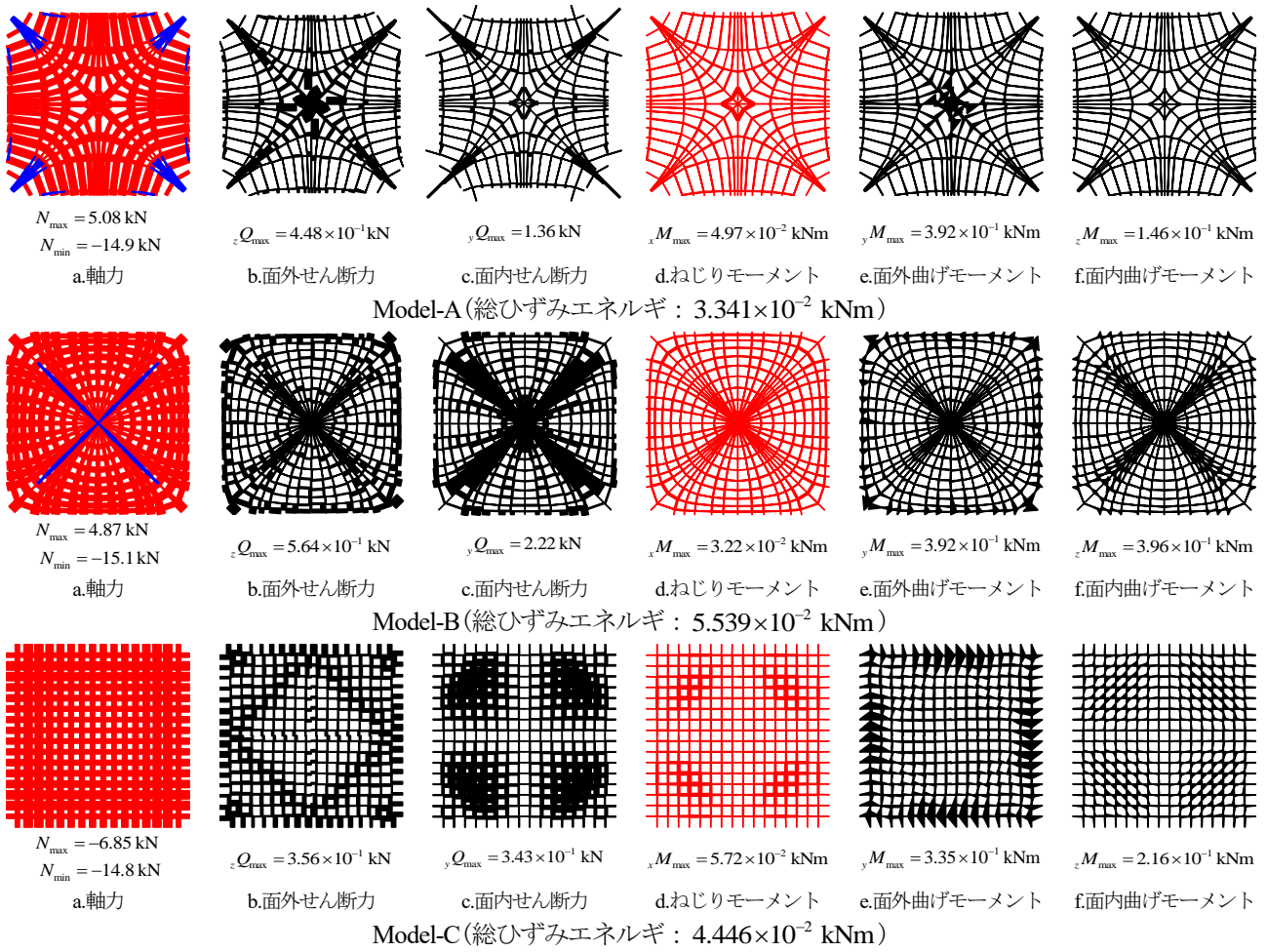
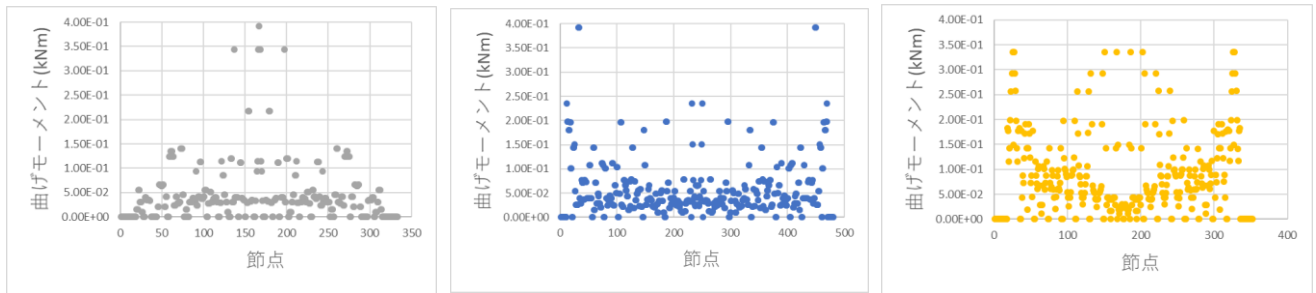


図 12 応力図 (※総ひずみエネルギーは1/4領域で示している。)

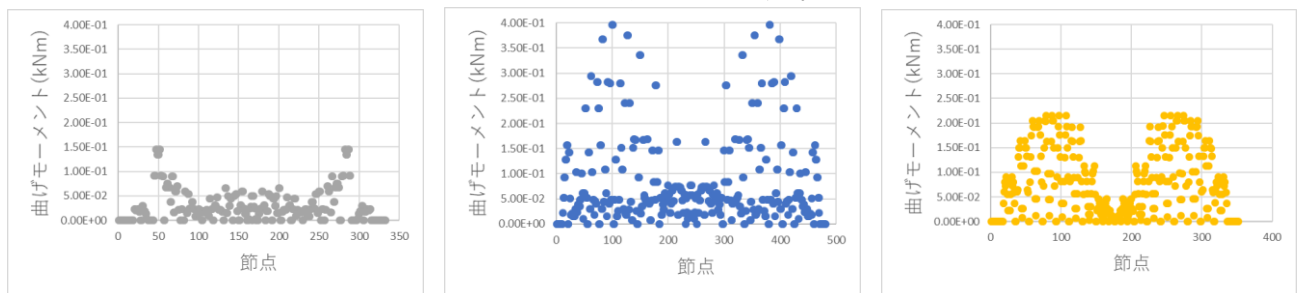


Model-A

Model-B

Model-C

図 13 面外曲げモーメント分布図



Model-A

Model-B

Model-C

図 14 面内曲げモーメント分布図

表5 軸力標準偏差

Model-A	Model-B	Model-C
3.367	1.181	0.143

5.1 解析結果

Model-A, B, C の力学性状を図 12 に示す。図 13 および図 14 には、各モデルにおける節点での面外および面内曲げモーメントの最大値をプロットした結果を示す。表 5 には、各モデルの軸力標準偏差の値を示す。解析結果の情報は N_{max} , N_{min} :最大・最小軸力、 zQ_{max} :最大面外せん断力、 yQ_{max} :最大面内せん断力、 xM_{max} :最大ねじり曲げモーメント、 yM_{max} :最大面外曲げモーメント、 zM_{max} :最大面内曲げモーメントである。ここで軸力図において青色が引張力、赤色が圧縮力を表している。

図 12 に示す軸力図から、Model-A および Model-B のいずれにおいても、部材が集中する部分で引張力が作用していることが確認できる。面内せん断力に関しては、両モデルともに部材が短くなる部分で局所的に大きなせん断力が発生していることが確認された。

図 13 の結果から、最大面外曲げモーメントに関しては、Model-A および Model-B の両方で Model-C に比べて大きい値を示すものの、全体としては低い値を示す節点が多いことが確認できる。

表 5 より、Model-B は Model-A に比べて軸力の標準偏差が小さく、交差する部材において軸力がより等方的に伝達されていることがわかる。

6 考察

Model-A と Model-B の特性の違いをもとに、解析結果について考察する。

まず、Model-A は作成した吊り下げ曲面をシェル要素として解析し、その結果に基づいて構築されたモデルであるため、実際の現象に近い主応力の流れを適切に把握できたと考えられる。その結果、軸力抵抗型の構造となり総ひずみエネルギーを効果的に抑えることができたと推察される。一方、Model-B は吊り下げ曲面の性質に基づいて作成されたモデルであり、その特性を適切に反映できた結果、より等方的な軸力状態に近い結果が得られたと考えられる。

しかし、Model-B では、直交格子梁モデルに比べて総ひずみエネルギーが大きい結果となった。これは、モデルによって部材の本数が異なることに加え、モデル内の断

面積が一定であるにもかかわらず、軸力が小さいモデル頂部において断面が過剰になっていることが一因と考えられる。吊り下げ曲面の特性として応力が高さ按比例することを考慮すると、高さに応じて断面積を変化させることで、総ひずみエネルギーをさらに抑えることが可能であると考えられる。Model-A, B ともに吊り下げ曲面の特徴から面外せん断力は抑えられている。大きな面内せん断力が生じる箇所には、補強部材を入れる必要がある。

7 まとめ

本研究では、幾何学的非線形解析を用いて吊り下げ曲面を作成し、これに基づく 2 通りの曲線梁モデルを提案した。一つはシェル要素としたときの主応力に沿った曲線梁を作成する方法であり、もう一つは等高線に基づく曲線梁を作成する方法である。解析の結果、シェル要素の主応力に基づくモデルは、従来の直交格子梁モデルに比べ、ひずみエネルギーをより効果的に抑制できることが明らかとなった。また、等高線モデルは、等方的な軸力状態を形成する傾向が示された。

今後の課題としては、等高線モデルにおいて高さに応じた断面の変化を考慮し、断面効率の向上を図ることで、ひずみエネルギーのさらなる低減と、より均一な等方軸力状態を実現する曲線梁グリッドシェル構造を目指す。

謝辞 : 本研究は、JST, CREST, JPMJCR1911 の支援を受けたものである。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) Tam, Kam-Ming Mark and Caitlin T. Mueller : Stress Line Generation for Structurally Performative Architectural Design, 35th Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA), Cincinnati, Ohio, 19-25 October, 2015
- 2) 日本建築学会 編著 : 空間構造の数値解析ガイドライン, 2017
- 3) 野口裕久 久田俊明 : 非線形有限要素法の基礎と応用, 1995
- 4) 功刀浩彰 山本憲司 : 吊り下げ曲面の形状解析に関する検討, 第 12 回コロキウム構造形態の解析と創生, 2017
- 5) JEAN-LOUIS BATOZ : A STUDY OF THREE NODE TRIANGULAR PLATE BENDING ELEMENTS, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, VOL.15, pp.1771-1812, 1980
- 6) Kaushalkumar Kansara : Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java, 2004.5
- 7) 伊庭齊志 : 遺伝的アルゴリズムの基礎—GA の謎を解く—, オーム社, 2007

SIMP法と不連続変形法を用いた組積造の位相最適化

高橋 温¹⁾, 大崎 純²⁾ 林 和希³⁾, 張 景耀⁴⁾

1)京都大学工学研究科, 大学院生, takahashi.on.53n@st.kyoto-u.ac.jp

2)京都大学工学研究科, 教授, 博士(工), ohsaki@archi.kyoto-u.ac.jp

3)京都大学工学研究科, 助教, 博士(工), hayashi.kazuki@archi.kyoto-u.ac.jp

4)京都大学工学研究科, 准教授, 博士(工), zhang@archi.kyoto-u.ac.jp

1 序論

位相最適化は1980年代から研究されており [1], 機械工学の分野で発展し建築工学の分野でも研究と実用化が進められている. 構造最適化において寸法最適化 [2,3], 形状最適化 [4,5]に比べてより複雑な結果を得られる一方で計算コストが高いという問題がある.

機械工学における研究の多くは連続体を対象とした位相最適化に焦点を当てている [6-8]. これは生産する部材が建築構造に比べて比較的小さく, 最適解が複雑な形状であってもそれに対応する型枠を一つ作れば, 大量生産が可能となるからである. これに対して, 建築構造は単品生産であることから複雑な形状を実現するコストが高くなる. したがって建築構造において位相最適化問題を扱う際, 離散構造を扱うことが多い. 例えばトラス・骨組の位相最適化 [9,10]などがその例である.

離散構造として組積造も含まれるが, 組積造に関する位相最適化の研究は限られている. 組積造の位相最適化では, トラス・骨組が線要素としてのモデル化であるのに対して, 面要素としてのモデル化が求められる. また要素の配置は長手積みで代表されるように互い違いに組まれており, 有限要素法の格子配置とは異なる. さらに, モルタルによる要素間の接続は圧縮と引張で非対称な剛性を示すので, 不連続な接続関係を考慮する必要がある.

よって本研究では, 組積造における位相最適化について不連続変形法(DDA)による解析と各ブロックの要素密度の最適化を併せたアプローチを提案する. 不連続変形法によって組積造の挙動を再現し, 面要素の最適化においてSolid Isotropic Material with Penalization Method(SIMP法)に倣って剛性を設定することで連続変数としての最適化を実現する. 本研究は連続体の位相最適化の様々な困難点を解決できるという観点でも有用であると考え. 要素を格子状に配した構造モデ

ルの位相最適化結果において, 最適解を実際の構造物として実現するためにはメッシュ分割数を多くし, 形状を滑らかにする必要がある反面, 計算時間が増大するという問題がある. さらにチェッカーボード現象と呼ばれる市松模様の部材が出現し, これが解の解釈を困難にする. 組積造の位相最適化において不連続変形法を採用したとき, 各要素はブロックとして考えることができ実構造と対応した分割数を指定することができる. 加えて互い違いに組まれた要素関係からチェッカーボードは出現しないことを期待できる.

2 不連続変形法

2.1 概要

不連続変形法は離散化要素と接続を示すばねによって記述される. 要素の変形は定応力, 定ひずみと仮定して, 次のような並進, 回転, ひずみ3成分の6変数ベクトル \mathbf{d}_i で表現する.

$$\mathbf{d}_i^T = (u_0^i, v_0^i, r_0^i, \epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \gamma_{xy}^i)^T \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

ここで u_0^i, v_0^i は xy 平面内にあるブロック i の x 方向, y 方向の剛体変位, r_0^i はブロック中心に関する剛体回転, $\epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \gamma_{xy}^i$ はそれぞれ, ブロックの x 方向垂直ひずみ, y 方向垂直ひずみ, せん断ひずみ, n はブロック数を表す. ブロック中心 (x_0^i, y_0^i) から \mathbf{d}_i に基づきブロック内の任意の点 (x, y) における変位 (u_i, v_i) に座標変換するマトリクス \mathbf{T}_i は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} (u_i, v_i)^T &= \mathbf{T}_i(x, y)\mathbf{d}_i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(y - y_0^i) & x - x_0^i & 0 & \frac{y - y_0^i}{2} \\ 0 & 1 & x - x_0^i & 0 & y - y_0^i & \frac{x - x_0^i}{2} \end{pmatrix} \mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (2)$$

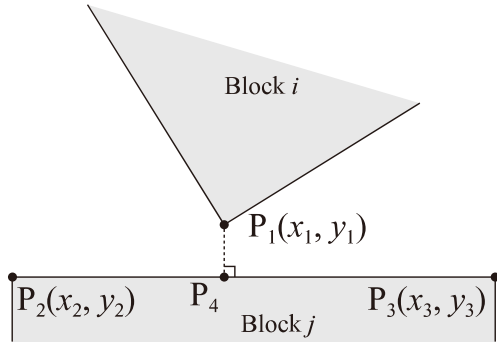


図1: 接触機構

2.2 接触機構

鉛直方向の接触力をばねで表す。点 P_1 が辺 P_2P_3 に貫入する場合を考える。点 P_1 から P_2P_3 に下ろした垂線の足を P_4 としたとき、 P_1P_4 に仮想的なばねを想定し、蓄えられるエネルギーを最小化することで平衡条件を得る。剛性行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii}^v &= \frac{[k_v]_{ij} l_e w}{d} \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i \\ \mathbf{K}_{ij}^v &= \frac{[k_v]_{ij} l_e w}{d} \mathbf{E}_i^T \mathbf{G}_j \\ \mathbf{K}_{ji}^v &= \frac{[k_v]_{ij} l_e w}{d} \mathbf{G}_j^T \mathbf{E}_i \\ \mathbf{K}_{jj}^v &= \frac{[k_v]_{ij} l_e w}{d} \mathbf{G}_j^T \mathbf{G}_j \end{aligned} \quad (3)$$

として表せる。 $[k_v]_{ij}$ はブロック i, j 間にある鉛直ばね剛性、 l_e はばねの支配長さ、 d は目地の厚さ、 w はブロックの奥行き、 $\mathbf{K}_{ii}^v, \mathbf{K}_{ij}^v, \mathbf{K}_{ji}^v, \mathbf{K}_{jj}^v$ は鉛直ばねに関する 6×6 の剛性行列である。添字 i, j は各ブロックに対応する。辺 P_2P_3 の長さを l として、 $\mathbf{E}_i, \mathbf{G}_j$ は以下に示すベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \frac{1}{l} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_i(x_1, y_1) \\ \mathbf{G}_j &= \frac{1}{l} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}_j(x_2, y_2) \\ &\quad + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_j(x_3, y_3) \\ l &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

次にせん断方向の抵抗力をばねで表す。 P_1P_4 に挿入されたばねの辺 P_1P_2 方向成分をせん断ばねとすると、せん断ばねによる剛性行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii}^s &= \frac{[k_s]_{ij} l_e w}{d} (\mathbf{T}_i(x_1, y_1))^T \mathbf{T}_i(x_1, y_1) - \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i \\ \mathbf{K}_{ij}^s &= \frac{[k_s]_{ij} l_e w}{d} (-\mathbf{T}_i(x_1, y_1))^T \mathbf{T}_j(x_4, y_4) + \mathbf{E}_i^T \mathbf{G}_j \\ \mathbf{K}_{ji}^s &= \frac{[k_s]_{ij} l_e w}{d} (-\mathbf{T}_j(x_4, y_4))^T \mathbf{T}_i(x_1, y_1) + \mathbf{G}_j^T \mathbf{E}_i \\ \mathbf{K}_{jj}^s &= \frac{[k_s]_{ij} l_e w}{d} (\mathbf{T}_j(x_4, y_4))^T \mathbf{T}_j(x_4, y_4) - \mathbf{G}_j^T \mathbf{G}_j \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $[k_s]_{ij}$ はブロック i, j 間にあるせん断ばね剛性、 $\mathbf{K}_{ii}^s, \mathbf{K}_{ij}^s, \mathbf{K}_{ji}^s, \mathbf{K}_{jj}^s$ はせん断ばねに関する 6×6 の剛性行列で

ある。最後に接触関係について、三角形 $P_1P_2P_3$ の符号付き面積の正負で判断する。静的解析から得た変位から引張力を負担するばねを削除し、圧縮力を負担するばねを(再)挿入する。これを接続状態が更新されなくなるまで繰り返すことで静的解析を終了する。これをOpen-Close計算と呼ぶ。

文献 [11]での実験結果との比較の際はモルタルの耐力や摩擦を考慮したOpen-Close計算を行っている。本研究では簡単のため空積みを仮定し、モルタルの耐力は0とする。すなわち下記の2種の状態を考慮する。

- 接触状態:ばねが挿入されている
- 離間状態:ばねが削除されている

離間時には解析上の困難を避けるため最小ばね剛性を適用する。組積造のパラメータは煉瓦壁の変形挙動を精密に模擬できる既往研究 [11]を踏襲して決定する。モルタルの目地厚さはパラメータの決定のみに使い、実際はモデル化しない。

3 最適化問題と最適化手法

最適化問題の設定として、体積制約下におけるコンプライアンス最小化と最大応力最小化を扱う。

$$\begin{aligned} \min : & \quad \mathbf{u}^T \mathbf{F} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} \\ \text{s.t.} : & \quad \sum_i \rho_i V_i \leq V^U \\ & \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \min : & \quad \max(\sigma^{\text{VM}}) \simeq \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_i^{\text{VM}}}{\sigma_{\text{lim}}} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ \text{s.t.} : & \quad \sum_i \rho_i V_i \leq V^U \\ & \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

\mathbf{K} は系剛性行列、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{F} は荷重ベクトル、 $\boldsymbol{\rho}$ は設計変数となる要素密度ベクトル、 $\rho_i V_i$ は各要素の体積、 V^U は総体積の上限値、 σ^{VM} はミーゼス応力、 σ_{lim} は最大許容ミーゼス応力、 $q (= 10)$ はペナルティ係数を示す。最大応力最小化問題(7)では、応力の最大値を計算するmax関数を微分可能なp-ノルム関数 [12]で近似することで目的関数の感度係数の連続性を確保している。またコンプライアンス最小化については最適性基準法を、最大応力最小化については内点法を用いて最適化を実行する。

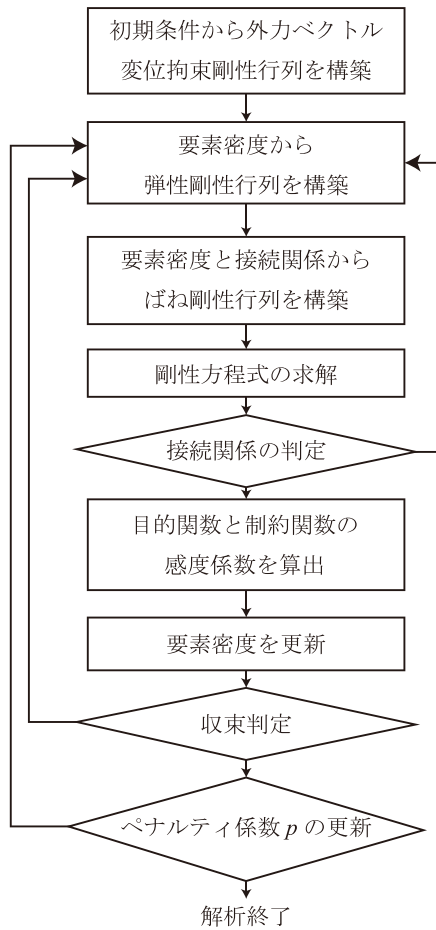


図2: 最適化フロー

各ブロックの密度を連続変数とし、各要素の密度を剛性から決定する際、ペナルティ係数によって次式のように中間密度の剛性を低く見積もることで密度0または1への収束性を高める。

$$E_i = E_{\min} + \rho_i^p (E_{\max} - E_{\min}) \quad (8)$$

ここで、 E_i は要素 i のヤング係数、 E_{\max} は最大ヤング係数、 E_{\min} は最小ヤング係数、 p はペナルティ係数を示す。 E_{\min} を非ゼロの微小値とすることで解析上の困難を回避する。さらに存在要素同士をつなぐばねのみ微小でない剛性を有するようにばね剛性を決定する。文献 [13]では個別要素法を用いて6角形配置の位相最適化を実行しており、このとき接続関係をばねで模擬している。よってこれを参考に以下のようにばね剛性を決定する。

$$\begin{aligned} [k_v]_{ij} &= [k_v]_{\min} + (\rho_i \rho_j)^{p_s} ([k_v]_{\max} - [k_v]_{\min}) \\ [k_s]_{ij} &= [k_s]_{\min} + (\rho_i \rho_j)^{p_s} ([k_s]_{\max} - [k_s]_{\min}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで添字max, minはそれぞれのばね剛性の最大値と最小値、 p_s はばねにおけるペナルティ係数である。これにより ρ_i と ρ_j がともに1のとき、ばね剛性は最大となり、それ以外のケースでばね剛性は低く見積もられる。最大剛性を文献 [11]に示される剛性とし、 $E_{\min}, [k_v]_{\min}, [k_s]_{\min}$ は連続体の位相最適化における代表文献 [14]に倣って、それぞれの最大値の 10^{-8} 倍とした。最適化フローを図2に示す。

4 数値例題

本手法の有効性を既往研究との比較と最適解の検証により考察する。以下の全ての例で左右の対称性を考慮して変数を更新をする。ブロックの積み方は長手積みであり、図3に示すように列ごとにブロック幅の半分ずれた配置として、左右端部は半分の幅をもったブロックを配置し、最下列から数えて奇数列に $n+1$ 個、偶数列に n 個、全部で m 列配置する。

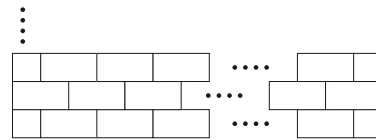


図3: 長手積み

4.1 既往研究との比較

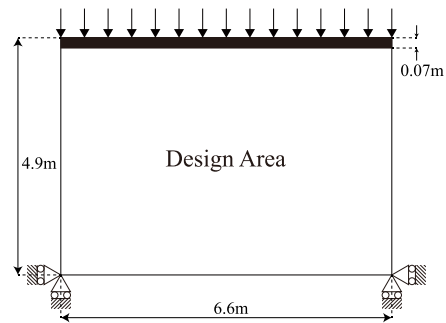


図4: 設計条件:鉛直荷重+ピン支持

本節では提案手法で得られる解を文献 [15]による圧縮力のみを負担する材料の位相最適解と比較する。文献 [15]のFig 15と対応させるため、図4のように設計条件を定める。分割数は $n = 30$ 個、 $m = 70$ 列とし、体積の上限値は全ブロック体積の30%としている。荷重は最上列の各ブロックに、それぞれの中心から鉛直下向きに30 kNの载荷としている。以降、鉛直荷重を扱う例

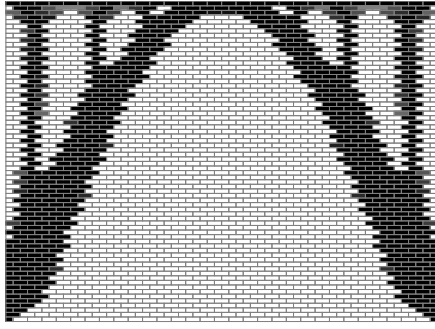


図5: 図4の最適解

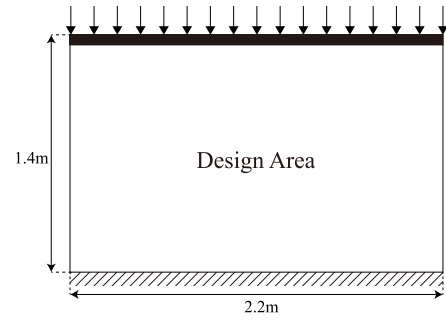


図7: 設計条件:鉛直荷重+下辺固定

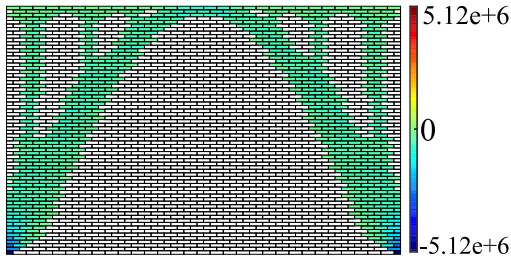
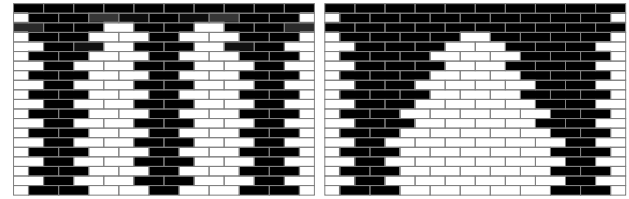


図6: 応力の第1不変量 Θ_1



(a) ペナルティ変数更新 (b) ペナルティ変数一定

図8: 図7の最適解

題はすべてこの荷重条件である。図5の形状が文献 [15] のFig 16(b)の形状と近似していることが確認できる。両方とも、支持点間で大きなアーチ形状が現れ、そこから荷重点を支えるように鉛直方向に部材が突き出している。

図6は閾値以上($\rho_i \geq 0.01$)の要素について応力の第1不変量 Θ_1 (N/m²)を示したものである。図6が支持点付近の部材とそれ以外の部材の応力の差が大きいことが確認できる。具体的には図の緑色で示される部分については青の部分に比べて10分の1程度の応力である。支持点付近以外の部材では応力の値が均一である。また全体にわたって負の値を示し、圧縮状態であることが確認できる。

4.2 逐次的なペナルティ係数の更新

文献 [16]に示される逐次的なペナルティ係数の更新の有効性について示す。これは、局所解に収束することを防ぐための手法であり、離散要素をばねで接続している点で本研究と類似しているため採用する。具体的には最適化の過程で $p = 1.0$ から 4.0 まで 0.5 ずつ増加させる。増加を決定する条件は変数の変化量が十分に小さくなったとき(0.005以下)、もしくは繰り返し計算が150回に到達したときとしており、本研究ではこれをそのまま採用する。これに対して一般的なSIMP法では $p = 3.0$ で一定とする。この2者を簡単な例で比較する。図7において、分割数は $n = 10$ 個、 $m = 20$ 列

とし、体積の上限値は全ブロック体積の50%としている。図8の両方とも要素密度は0と1にほぼ収束しており、 $p = 3.0$ でのコンプライアンスを比較したところ、図8(a)で185.96 Nm, 図8(b)で227.96 Nmであり前者が優れた結果となった。本手法は局所解への収束を回避する他に要素集中を防ぐ目的もあるため、図8(a)は図8(b)に比べてスパースな構造となっている。この結果から4.3, 4.4節で示す最適化は逐次的なペナルティ変数の更新を採用している。

4.3 異なる荷重条件・体積上限値の比較

鉛直荷重下での最適解を示す。図9において、分割数は $n = 20$ 個、 $m = 20$ 列としている。図10に示す最適解のコンプライアンスについて、設計領域内をすべて充填した場合(体積100%)のコンプライアンスとの比は、図10(a)で2.68, 図10(b)で1.68となっている。最適解におけるOpen-Close計算は収束していることを確認している。

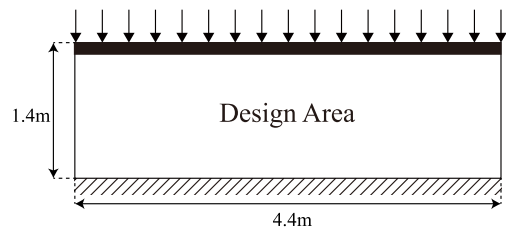
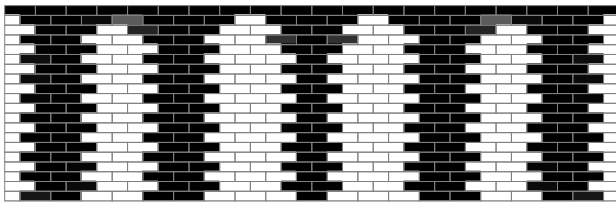
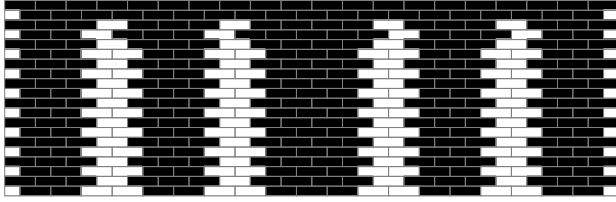


図9: 設計条件:鉛直荷重+下辺固定



(a) 体積上限値50%



(b) 体積上限値70%

図10: 図9の最適解

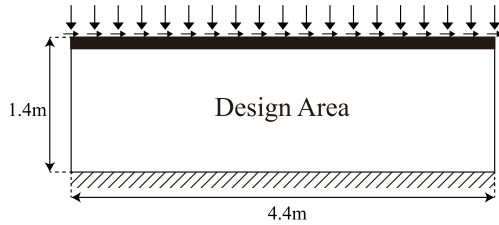
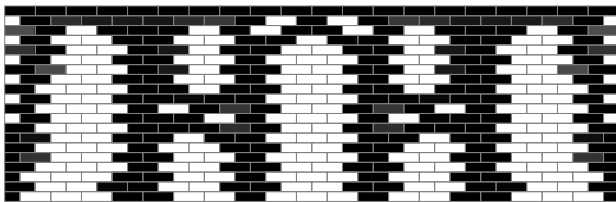
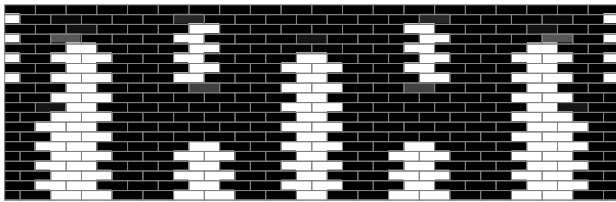


図11: 設計条件:鉛直・水平荷重+下辺固定



(a) 体積上限値50%



(b) 体積上限値70%

図12: 図11の最適解

次に、水平荷重を併せた設計条件での最適解を示す。図9の鉛直荷重に加えて図11では最上列の各ブロックに、それぞれの中心から水平右向きに水平荷重を20 kN加えている。分割数は $n = 20$ 個、 $m = 20$ 列としている。図12から鉛直荷重のみの場合に比べて横方向の部材が出現していることがわかる。

4.4 最大応力最小化

最大応力を目的関数にした場合の最適化について以下に示す。図13の設計条件において、分割数は $n = 30$ 個、 $m = 30$ 列とし、体積の上限値は50%としている。図14に示す最適解は中間密度を持つ要素が多く存在しており、局所解に収束している。最適解での感度係数を確認したところ、要素密度が0に近いブロックにおいて目的関数の感度係数が極度に大きな正の値を取っており、これが変数の更新を困難にしていると考えられる。

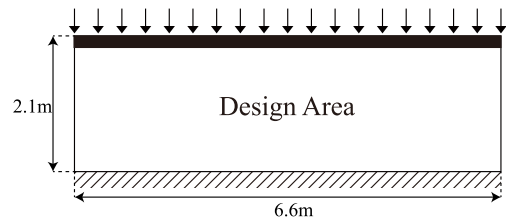


図13: 設計条件:鉛直荷重+下辺固定

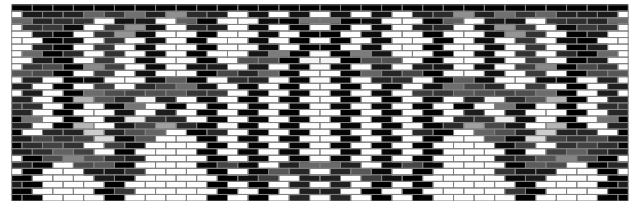


図14: 図13の最適解

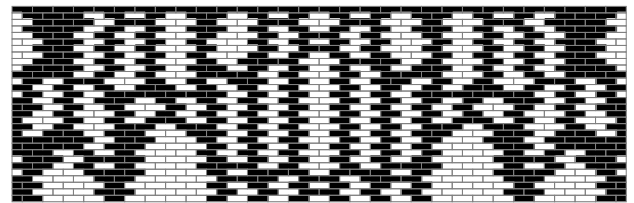


図15: 2値化処理後の解

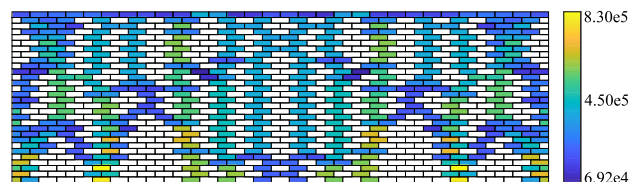


図16: ミーゼス応力 σ^{VM}

図14の解を2値化処理した解を図15に示す。明らか

な不安定構造を回避するよう体積制約を調整し2値化した結果、体積は51.72%となっている。この2値化結果で構造解析し、求めたミーゼス応力 σ^{VM} (N/m²)を図16に示す。固定端近くで最大応力を示していることが確認でき、また応力が最大値から最小値まで偏りなく分布している。

5 考察と結論

組積造の位相最適化の手法を提案し、数値例題でその有効性を示した。位相最適解を力の伝達経路として見れば、伝達経路に沿って補強材を配置するなどの改修手法としての利用が期待できる。加えて、体積の上限値を大きく設定した場合においては耐力壁としての剛性を保持したまま開口部を設けるためのデザイン手法として採用することができる。最適性の観点では、長手積みの最適解においては、その外縁において上下のブロックからはみ出す部分が生まれる。特に、鉛直荷重に対応する場合にはこのはみ出す部分は構造に寄与できないため、仕上げ処理が必要である。また最大応力最小化問題では中間密度を含む最適解が得られる問題があった。これに対して、内点法以外の最適化アルゴリズムの採用を検討する必要がある。

参考文献

- 1) Bendsøe, M.P., and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, No.2, pp. 197-224, 1998
- 2) Prager, W.: A note on discretized michell structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.3, No.3, pp.349-355, 1974
- 3) Svanberg, K.: Optimal Geometry in Truss Design, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.28, No.1, pp.63-80, 1981
- 4) Zienkiewicz, O.C., and Campbell, J.S: Shape optimization and sequential linear programming, *Optimum structural design*, pp.109-126, 1973
- 5) Pironneau, O: Optimal Shape Design for Elliptic Systems, Springer-Verlag, 1984,
- 6) Suzuki, K, and Kikuchi, N: A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, No.3, pp.291-318, 1991
- 7) Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol.1, No.4, pp.250-254, 1992
- 8) Sethian, J.A., and Wiegmann, A.: Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Method, *Journal of Computational Physics*, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000
- 9) Dorn, W.S., Gomory, R.E., and Greenberg, H.J. : Automatic design of optimal structures, *Journal de Mécanique*, Vol.3, No.1, pp.25-52, 1964
- 10) Hemp, W.S.: *Optimum Structures*, Oxford University Press, 1973
- 11) 折戸 俊介, 張 景耀, 青木 孝義: 不連続変形法を用いた無補強煉瓦造壁体の面内載荷実験の再現解析, *日本建築学会学術講演梗概集, 構造4*, pp701-702, 2022
- 12) Lee, E., James, K.A. and Martins, J.R.R.A: Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading, *Structural and Multidisciplinary Optimization* , Vol.46, pp.647-661, 2012
- 13) Connor O' Shaughnessy, Enrico Masoero, Peter D. Gosling : Topology optimization using the discrete element method. Part 1: Methodology, validation, and geometric nonlinearity, *Meccanica*, 2022
- 14) O. Sigmund: A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.21, pp.120-127, 2014
- 15) Du, Z., Zhang, W., Zhang, Y., Xue, R. and Guo, X.: Structural topology optimization involving bi-modulus materials with asymmetric properties in tension and compression, *Computational Mechanics*, Vol.63, pp.335-363, 2019
- 16) Talischi, C., Paulino, G.H., Pereira, A. et al. : PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes, *Struct Multidisc Optim*, Vol.45, pp.329-357, 2012

曲線折りとアクティブ・ベンディングを用いた曲面形状の形状探索

近藤あやめ¹⁾, 木村俊明²⁾

1)名古屋市立大学大学院芸術工学研究科, 博士前期課程, c235713@ed.nagoya-cu.ac.jp

2)名古屋市立大学大学院芸術工学研究科, 准教授, 博士(工学)

1 はじめに

計算機や施工技術の飛躍的な発展と相まって、建築家のイメージに沿った多様なフォルムデザインが可能となった。例えば、複雑で自由な形状を持つ連続体シェル構造物はその一例と考えることができる。近年では地球環境問題が深刻化し、サステナブルなデザインで省資源・低環境負荷の建築物が要求される傾向にある。本来、大スパン構造は効率よく力を流せば省資源で大きな空間を覆うことができる。複雑な曲面形状を設計する場合、構造設計者は限られた時間で構造安全性、意匠性、施工性や経済性などを総合的に勘案して判断する必要がある。

施工性を考慮した曲面形状を獲得するために、ベンディング・アクティブ構造(BA構造)に着目する。これは真直な材(または平面版)に弾性曲げを与えて得られる構造と定義できる[1]。建築物の代表例としてマンハイム多目的ホール(F. Otto)を例に挙げることができる。近年、BA構造の形状設計手法は活発に研究されている[2]。BA構造を用いて仮設材の省略化を試みた研究もある[3-5]。BA構造と同様、折紙の幾何学やメカニズムを利用し、平面から立体構造物を造形する試みも活発に行われている[6]。Huffmanのモデルに代表できる曲線折りは平坦な面から折曲線と可展面で構成された曲面が形成できる。曲線折りを計算機上でシミュレーションする試みも活発に行われている[7]。例えば、折り線の展開図エディタ(ORIPA[8])や物理演算プラグイン(Kangaroo[9])を用いれば曲線折りを再現できる。しかしながら材料特性や作用させる外力を考慮したシミュレーションは形状設計後に確認することが殆どである。また、曲線折りで得られる曲面形状の力学特性について調査した研究は少なく、筆者の知る限り十分に議論されているとは言い難い。

前述したBA構造と曲線折りに着想を得て、曲線状のスリットを設けた平板に弾性曲げを与えて得られる曲面形状(以後、ベンディング・アクティブ・シェル, BAS)を考える。これを建築で応用する場合、例えば、コンクリートシェルの曲面型枠において平坦化して運搬効率を上げることや再利用化の向上が期待できる。本研究では、

BASの形状探索手法を提案し、得られる形状について力学的特性を調査することを目的としている。本論文では、まず、曲線折りの物理挙動や幾何学条件を考慮した力学モデルの荷重・境界条件を整理する。力学挙動を併せて追うために、有限要素法による構造解析(FEA)を用いる。幾何学的非線形解析を用いた形状探索手法を示した後、単純形状の構造モデルを対象とした形状探索の実施例を示す。

2 曲線折りの力学挙動

2.1 物理挙動を考慮したモデル

簡単な曲線折りの模型を用いて、作用させる荷重の方向と物理挙動を確認する。製作例を図1に示す。図2に示すように、2方向の荷重(青色:面内方向, 橙色:面外方向)が必要と考えられる。また、この曲面形状は面外方向の荷重による曲げ変形が初期不整となり、面内力による曲げ座屈により得られていると考えられる。以後、この挙動をFEA上で再現するための荷重・境界条件をBuckleと呼ぶ。図3にFEAモデルにおけるBuckleの条件を示す。ここで、折り曲線上の記号は回転ばねを表しており、回転剛性 K_{θ} は折り曲線の接線と直交する方向に対して $K_{\theta}=1.0 \times 10^6$ kNm/radとしている。

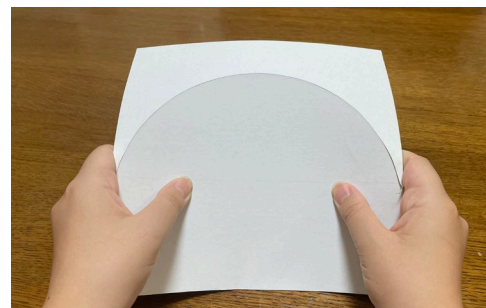


図1 曲線折りの製作例

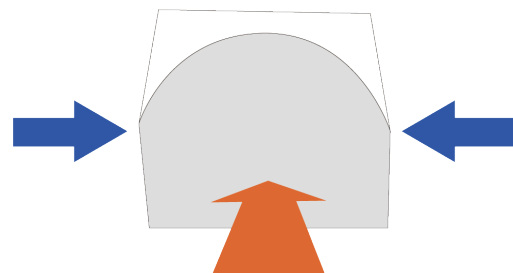


図2 想定される荷重

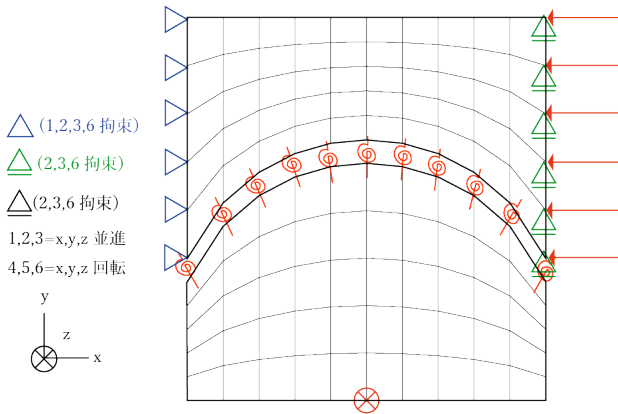


図3 Buckleにおける荷重・境界条件

2.2 鏡映反転を用いたモデル

ある可展面と平面との交線で曲面を折り返す時、得られる曲面形状の折り曲線は同一平面上に存在する[10]。図4に鏡映反転を考慮した曲線折りのイメージを示す。この関係を考慮した形状探索を行うことも考える。力学モデルは、平板を折り曲線の位置で同一面となるように拘束し、面内方向と面外方向から荷重を作用させる。以後、この境界条件を **Mirror** と呼ぶ。図5に解析モデルの条件を示す。

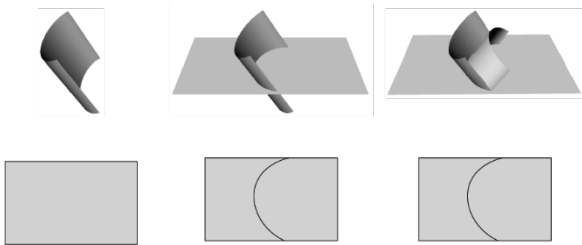


図4 鏡映反転の関係を考慮した曲線折りのイメージ

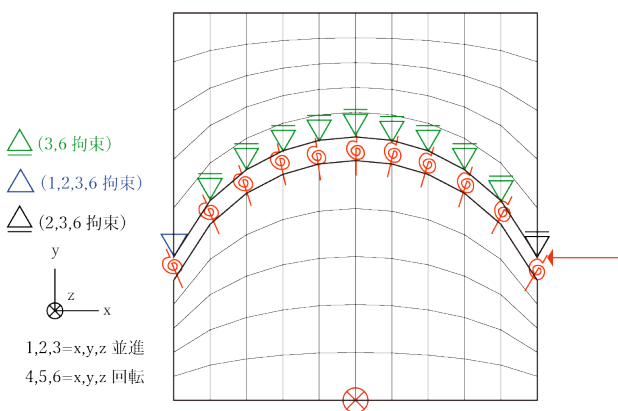


図5 Mirrorにおける荷重・境界条件

3 形状探索手法

本研究で提案する形状探索手法は2段階の手順を取る。

- Step 1 平面寸法、板厚、使用材料を定める。荷重・境界条件は **Buckle** または **Mirror** とする。
- Step 2 x, z 方向に集中荷重を与えて幾何学的非線形解析を行い、変位を求める。
- Step 3 Step 2の結果を基として強制変位を設定し、幾何学的非線形解析を実施する。
- Step 4 Step 3で得られた変位を反映してBASの曲面形状を表す。

4 数値解析例

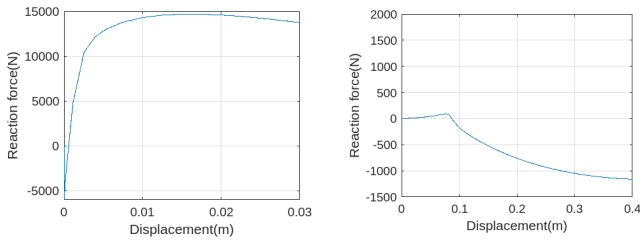
4.1 形状探索例

単曲率の曲線を折り目とする正方形形状のMDFパネル($B \times D \times t = 3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 15 \text{ mm}$)にて形状探索を実施する。折り目の曲線は半径 $R = 1.62 \text{ m}$ の円弧である。MDFパネルは等方性材料を想定し、ヤング係数は $2500 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比は0.3とする。荷重・境界条件は、**Buckle** または **Mirror** を考慮する。

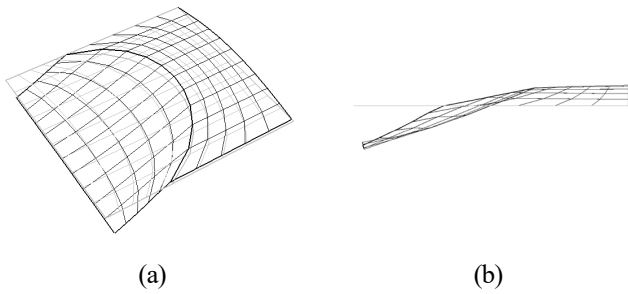
Step 2では、図3,5に示す位置で x, z 方向とも450 Nを載荷する。なお、**Buckle**における x 方向節点荷重は、合計値が450 Nとなるように定める。Step 3における強制変位は x 方向で0.03 m、 z 方向で0.40 mとする。また、 x 方向の強制変位は線形的に変化するパラメータ τ を用い、 $0.2 \leq \tau \leq 1.0$ の区間で載荷する。

Buckle と **Mirror** を課した際に得られる x, z 方向の荷重変位曲線と得られた曲面形状を図6-9に示す。**Buckle** を課した場合の結果を図6,7に、**Mirror** での結果を図8,9に示す。横軸は変位の絶対値を、縦軸は反力を表す。正の反力は平板から曲面形状を作るために必要な力を、負の値は指定の変位を満たす変形後形状を保持するために必要な力と考えられる。

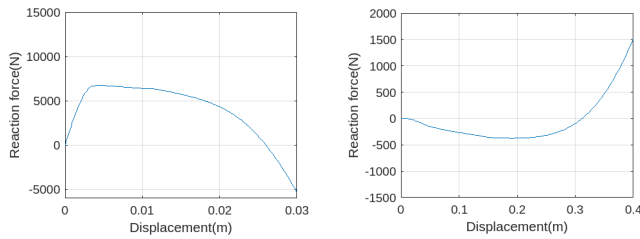
図6に注目すると、 x 方向の反力は15 kNまで上昇している。図8を見ると**Mirror**は7kNで、**Buckle**の1/2程度に留まっている。 z 方向の反力は-1.2 ~ 1.5 kNである。**Buckle**では座屈が進展するに伴い、負方向の鉛直反力が生じている。**Mirror**では鉛直荷重に依る曲げ変形が進展していると考えられる。**Buckle**と**Mirror**を比較すると、**Mirror**のほうがより小さい反力で形状を再現できると考えられる。



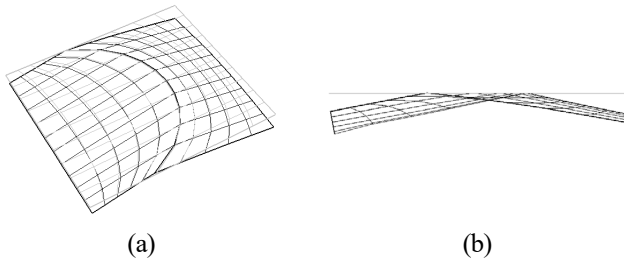
(a) (b)
 図 6 Buckle における荷重変位曲線; (a) x 方向, (b) z 方向



(a) (b)
 図 7 Buckle における曲面形状; (a) アイソメトリック図, (b) 立面図



(a) (b)
 図 8 Mirror における荷重変位曲線; (a) x 方向, (b) z 方向



(a) (b)
 図 9 Mirror における曲面形状;
 (a) アイソメトリック図, (b) 立面図

4.2 载荷条件の違いが解に与える影響

仮定した荷重条件の妥当性を確認するために、強制変位の有無を変えて検討を行った。前述した Buckle および Mirror の他、 z 方向のみ(Buckle- z , Mirror- z)または x 方向のみ(Buckle- x , Mirror- x)とする場合を定めて再度形状探索を実施した。Buckle- z および Buckle- x における曲面形状をそれぞれ図 10, 11 に、Mirror- z および Mirror- x における曲面形状を図 12, 13 に示す。図 14 では Buckle

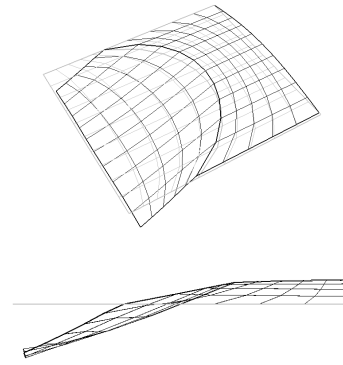


図 10 Buckle- z における曲面形状 (上: アイソメトリック図, 下: 立面図)

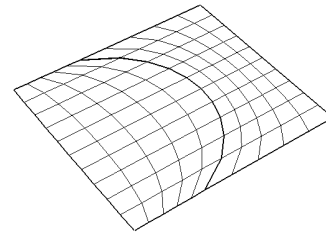


図 11 Buckle- x における曲面形状
 (上: アイソメトリック図, 下: 立面図)

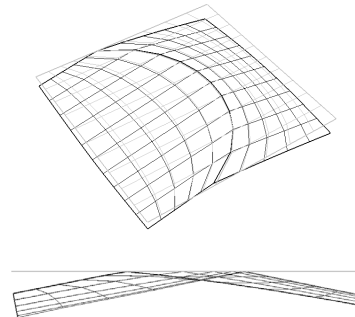


図 12 Mirror- z における曲面形状
 (上: アイソメトリック図, 下: 立面図)

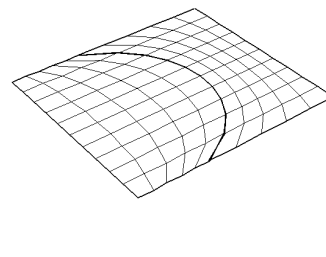


図 13 Mirror- x における曲面形状
 (上: アイソメトリック図, 下: 立面図)

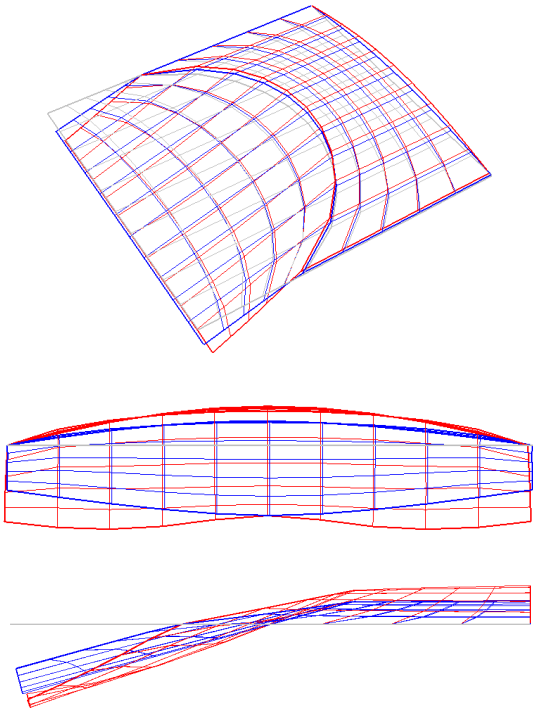


図 14 形状比較 (赤 : Buckle, 青 : Buckle-z)

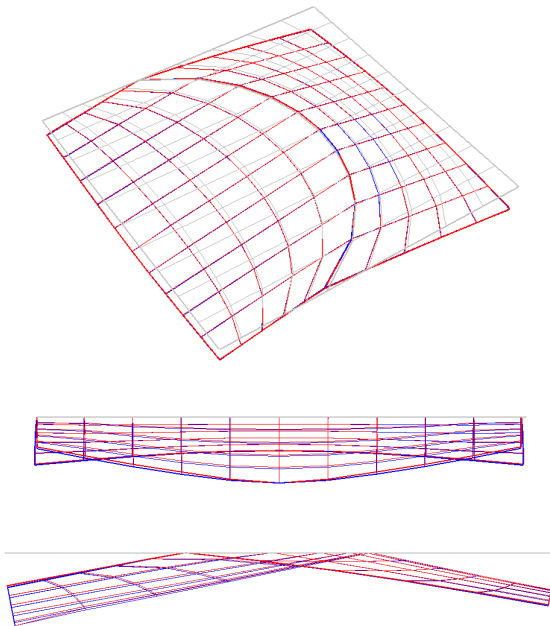


図 15 形状比較 (赤 : Mirror, 青 : Mirror-z)

(赤) および Buckle-z (青) を, 図 15 では Mirror (赤) および Mirror-z (青) を重ねて示している。

図 10-13 を見ると, Buckle-x および Mirror-x では平板となり, 曲面形状が得られていない。一方, Buckle-z および Mirror-z では曲面形状が得られている。図 14 を見ると, Buckle に比べ, Buckle-z ではサイズが小さいこと, 境界形状に差異があることが確認できる。一方, 図

15 を見ると, Mirror では x 方向の強制変位の有無の違いによる形状の差異が見られない。Buckle の条件を想定した場合は曲げ座屈が境界形状やサイズに影響を与えていること, Mirror では曲げ変形が支配的になることが考えられる。今後, モックアップモデルを作成し, これらの効果の影響を確認する必要がある。

5 結論

本研究では, BAS の形状探索手法の提案と, 得られる形状について力学的特性を調査することを目的として, 2 つの荷重・境界条件を想定し, FEA を用いた形状探索手法を提案した。正方形パネルにて形状探索を実施し, 手法の有効性について検討した。今後はモックアップを作成し, 実モデルと数値解析結果との比較を通して想定した 2 つの条件についてより詳細な検証を行う。

謝辞

本研究は科学研究費 24K01031 の助成を受けました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) J. Lienhard, Bending-active structures: form-finding strategies using elastic deformation in static and kinetic systems and the structural potentials therein, PhD thesis, ITKE, University of Stuttgart, 2014.
- 2) P. Nicholas, M. Tamke, Computational Strategies for the Architectural Design of Bending Active Structures. International Journal of Space Structures, Vol. 28, Issue3-4, pp. 215-228, 2013
- 3) J. Rombouts, A. Liew, G. Lombaert, *et al.*, Designing bending-active gridshells as falsework for concrete shells through numerical optimization, Eng. Struct., Vol. 240, 2021.
- 4) P. Cuvilliers, C. Douthe, L. Peloux, R. L. Roy, Hybrid structural skin: prototype of a gfrp elastic gridshell braced by a fiber-reinforced concrete envelope, J. Int. Assoc. Shell Spatial. Struct., Vol. 58, No. 1, pp. 65-78, 2017.
- 5) X. Wang, K. M. Tam, A. Beaudouin-Mackay, B. Hoyle, M. Mason, Z. Guo, W. Gao, C. Li, W. Zhu, Z. Karsan, G. Ting-Chun Kao, L. Zhang, H. Chai, P. F. Yuan, P. Block, 3d-Printed Bending-Active Formwork for Shell

Structures. In: Yuan P., Xie M., Leach N., Yao J., Wang X. (eds) *Architectural Intelligence*. Springer, Singapore, 2020.

- 6) 早川 健太郎, 丸山悠斗, 安達瑛翔, 大崎 純, 切り目のある剛体折紙による曲面近似, *日本建築学会計画系論文集*, Vol. 87, No. 801, pp. 2288-2297, 2022
- 7) 張 天昊, 川口健一, 曲げ変形を考慮した曲線折り紙の形状探索に関する基礎的研究, *日本建築学会学術講演梗概集(北海道) 構造 I*, pp.895-896, 2022. 9.
- 8) 三谷純, 折紙の展開図専用エディタ (ORIPA) の開発および展開図からの折りたたみ形状推定, *情報処理学会論文誌*, Vol. 48, No. 9, 2007.
- 9) Daniel Piker, Kangaroo: Form Finding with Computational Physics, *Architectural Design*, Vol. 83, No. 2, 2013.
- 10) Tomohiro TACHI, Gregory EPPS, Designing One-DOF Mechanisms for Architecture by Rationalizing Curved Folding, *ALGODE TOKYO 2011*, March 14-16, 2011, Tokyo, Japan

リー球面幾何による膜構造の等張力曲面の形状生成

横須賀洋平¹⁾, 軸丸芳揮²⁾

1)鹿児島大学大学院理工学研究科, 准教授, 博士(情報科学), yokosuka@aac.kagoshima-u.ac.jp

2)東洋大学情報連携学部, 助教, 博士(機能数理学)

1 はじめに

シェル空間構造と幾何学の間には密接な関係があり、力学量と幾何学量のそれぞれを最小化する問題は互いにカップリングされて論じられてきた。膜構造の曲面の表面積を最小化する極小曲面と等張力曲面が等価な関係にあり、張力が導入可能な膜構造の初期段階における設計曲面として採用することができる。工学において、有限要素法による離散化が広く普及し、初期形状解析や力学的応答を評価するために応用されてきた。これらの力学的に性質が良い曲面クラスの曲面形状を得る手法は、境界条件を与えた汎関数の変分問題を解く手法として扱われてきた。一方で、数学・幾何学の一分野では連続曲面の概念である曲率や曲面クラスそのものを離散化する離散曲面の幾何学に関する研究が推し進められてきた。本来、微分不可能な離散曲面において、連続曲面と離散曲面の間に一貫性を持つ曲率の概念を導入し、変分問題を対象とする研究や、可積分条件と呼ばれるいわば曲面の適合条件を有する平坦な四辺形を形状要素とした曲面クラスを包括的に扱う研究がある。これらの研究は、力学的に有意な性質を有するものや施工性や部材製作性に優れた建築の曲面設計で応用可能な曲面を提供する。

本稿では、リー球面幾何による極小曲面のパラメトリックな形状生成手法を示す。得られた離散極小曲面に等張力の初期張力を導入した有限要素法による応力変形解析の実行、および図式力学による弾性変形を考慮しない釣合いを用いて、等張力性を確認する。

2 離散等温極小曲面

建築構造では、サスペンション型や空気膜の膜構造の設計曲面として等張力曲面を採用し、差分法や有限要素法による離散化を行ない、等張力曲面や極小曲面を求める手法が提案されてきた。これらは主に三角形で分割する定ひずみ要素が採用されてきた。しかし、曲面のメッシュ分割に依存し、収束解を得るために種々の工夫が必要とされてきた。Schek[1]は、応力密度法を導入し、Barnes[2]は動的緩和法を導入し、安定な形状解析手法を

提案した。三木ら[3]は、張力構造の一般化を行ない、テンセグリティ構造に拡張し、Cuiら[4]は、パラメトリック曲面による可展面と膜構造の設計曲面の両性質を満たす手法を提案し、膜構造の形状解析の新たな展開を示した。数学・幾何学の変分問題による定式化では、下式のディリクレエネルギー(ディリクレ積分)を最小化する問題として取り扱う。

$$E = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (f_u^2 + f_v^2) dudv \quad (1)$$

$$f_u \perp f_v, \|f_u\| = \|f_v\| \quad (2)$$

式(2)の等温性を満たすときは、第一基本形式が対角化され、式(1)の停留点において面積汎関数も最小となる。Hinataら[5]は、有限要素法による離散化を行ない、解の存在や安定性を確かめている。Tsuchiya[6]は有限要素法によるディリクレエネルギーの離散化を行なっている。Pinkallら[7]は、三角形メッシュによるcotan公式を用いた平均曲率流を導出している。式(1)のオイラー-ラグランジュ方程式はラプラス方程式で表され、その解は調和関数となり、平均曲率は至る所で0となる。膜構造の形状解析で行われてきた極小曲面法による収束性の問題は、等温座標のような曲面の座標系の取り方とメッシュ分割の方向が強く依存していると考えられる。本来、等温座標となるためには曲率線に沿ったメッシュ分割が望ましいが、形状解析を実施する段階では形成される曲面形状は未知であるため、一般には曲率線の方法は不明である。変分問題とは全く異なる方法で離散等温極小曲面を得る手法が提案されている。Bobenkoら[8]は、既に存在が知られている極小曲面から三次元(ここでは \mathbb{R}^3 と書く)の球面(\mathbb{S}^2 と書く)で、ケーベ多面体(Koebe polyhedra)を構成し、そのクリストッフェル双対(Christoffel duality)を与える事で異なる離散極小曲面を構成できる事を示した。これは、極小曲面のガウス写像から等温性を維持した変換によって構築される曲面は極小曲面であるというクリストッフェルの定理を用いている。Schief[9]は、円が外接する四辺形を用いた曲率線座標の離散化と外力が作用しない曲面の膜応力による釣合いを示している。

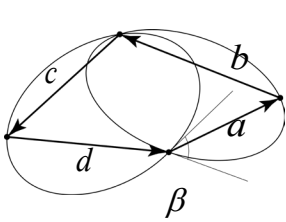


図1 複比を計算する四角形

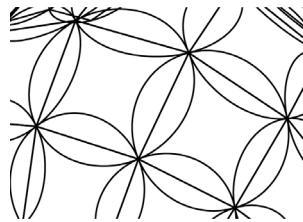


図2 円が外接するネット

3 円が外接する四角形ネットの等温性

図1は、円が外接する四角形において複比を計算する四角形である。離散版の複比 Q は次式で定義される。

$$Q = ab^{-1}cd^{-1} \quad (3)$$

ただし、

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}^3 \cong \text{Im } \mathbb{H} \\ = \{ \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \quad (4)$$

とする。ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は虚数単位である。図2に示すとおり、 a, b, c, d は四角形の辺に沿うベクトルである。複素数で表されるため、逆元が定義できる(ハミルトンの四元数代数を参照)。

すべての四角形で複比 $Q = -1$ を満たすとき等温性を満たす。2つの円の接線がなす角度を β とおき、 $\cos \beta = 1$ を満たすとき、2つの円は重なり、平坦な四角形と外接する1つの円で描かれる。このように四角形に外接する円で覆われた曲面は、曲率線座標で離散化された曲面を構成する。等温曲率線座標は、曲率線座標の中でもさらに狭い曲面クラスであり、曲率線座標や等温曲率線座標は、離散曲面上にサークルパターンを描く事ができるといった際立った幾何学的な特徴を持つ。図2に円が外接する四角形ネットを示す。

4 円が内接する四角形ネットの等温性

円が内接する四角形における等温性は、S 離散等温曲率線座標 (S-isothermic net) と呼ばれている。S 離散等温曲率線座標は、図3に示す記号を用いて次式の長さの関係を満たすとき、ケーニヒスネット (Koenigs net) を構成する[10]。

$$\frac{\delta_1}{\beta_1} \cdot \frac{\delta_2}{\beta_2} \cdot \frac{\delta_3}{\beta_3} \cdot \frac{\delta_4}{\beta_4} = 1 \quad (5)$$

ケーニヒスネットを構成しているとき、等温性を満たしている。図3の白点は円が接する点、黒点は内接円の中心点である。さらに、円が外接する四角形で計算される複比に関して、図3の赤線の四角形で複比 $Q = -1$ を満たす。図4に円が内接する四角形ネットを示す。

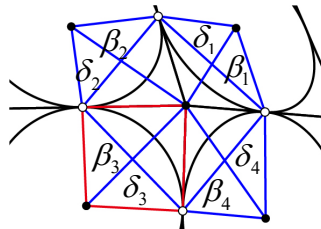


図3 ケーニヒスネット

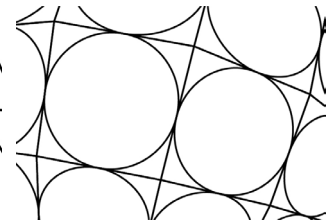


図4 円が内接するネット

5 リー球面幾何

有向球面

\mathbb{R}^3 の球面 S は、中心点 $c = (c_1, c_2, c_3)$ と半径 $r > 0$ によって定まる。半径 r と球の中心点 c によって $S(c, r)$ を次のように記述する。

$$S(c, r) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - c| = r \} \quad (6)$$

$S(c, r)$ の各点 x は $\pm(x - c)/r$ の単位法線ベクトルを持つ。 $(x - c)/r$ を外向き単位法線ベクトル、 $-(x - c)/r$ を内向き単位法線ベクトルとする。ここで正負を持つ半径 r と中心点 c を用いて、 $v = -(x - c)/r$ によって有向球面 $S(c, r)$ を次のように記述する。

$$S(c, r) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - c|^2 = r^2 \} \quad (7)$$

有向平面

\mathbb{R}^3 の平面 P は次のように表す。

$$P = P(v, d) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot x = d \} \quad (8)$$

(向きづけられた)単位法線ベクトル場 v と正負を持つ高さ d を用い、 $P(v, d)$ を有向平面と呼ぶ。

図1は、有向球面と有向平面、中心点 c 、法線ベクトル場 v 、高さ d の関係を表す。

射影モデル

6次元空間 \mathbb{R}^6 の自然な基底を

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0), e_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (9)$$

とし、ベクトルを次のように与える。

$$\hat{s} = (c_1, c_2, c_3, q_1, q_2, r), \\ q_1 = \frac{1}{2}(1 - |c|^2 + r^2), q_2 = \frac{1}{2}(1 + |c|^2 - r^2) \quad (10)$$

また、次の関係がある。

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + q_1^2 - q_2^2 - r^2 = 0 \quad (11)$$

この事実より、次のスカラー積を導入することが示唆される。

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 \quad (12)$$

\mathbb{R}^6 にこのスカラー積を与えたものを $\mathbb{R}^{4,2}$ と表記する。

単純な記述のために、次のベクトルを導入し、

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_5 + e_4), e_\infty = \frac{1}{2}(e_5 - e_4) \quad (13)$$

\hat{s} を次のように書き表す。

$$\hat{s} = \quad (14)$$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + e_0 + (|c|^2 - r^2) e_\infty + r e_6$$

これを次のように略記する。

$$\hat{s} = c + e_0 + (|c|^2 - r^2) e_\infty + r e_6 \quad (15)$$

このように有向球面 \hat{s} は、 $\langle \hat{s}, \hat{s} \rangle = 0$ を満たす。

同様に、有向平面 $P(v, d)$ は、次式のように同一視する。

$$\hat{p} = v + 0 \cdot e_0 + 2d e_\infty + 1 \cdot e_6 \quad (16)$$

さらに、点 x は次式のように同一視する。

$$\hat{x} = x + 1 \cdot e_0 + |x|^2 e_\infty + 0 \cdot e_6 \quad (17)$$

ここで、点 e_∞ は無限遠点と呼ばれる。これらを用いて、次の関係があることが判る。

$$\langle \hat{p}, \hat{p} \rangle = 0, \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = 0, \langle e_\infty, e_\infty \rangle = 0 \quad (18)$$

このように全ての有効球面、有効平面、点や無限遠点は、isotropic cone に接する。

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathbb{R}^6 \mid \langle y, y \rangle = 0, y \neq 0\} \quad (19)$$

$\lambda \neq 0$ であれば、

$$y \in \mathcal{L} \Rightarrow \lambda y \in \mathcal{L} \quad (20)$$

上記より、球面をスケールしたものを同一視するならば(球の大きさを無視する)、全ての球面(有向平面、球面上の点、無限遠点を含む)は、5次元空間 $\mathbb{R}P^5$ の射影空間の quadratic hyperspace と同一視することができる。

$$Q =$$

$$\{[y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 : y_6] \in \mathbb{R}P^5 \mid \langle y, y \rangle = 0\} \quad (21)$$

hyperquadratic Q は、Lie quadratic と呼ぶ。 Q を保つ変換をリー球面変換と呼ぶ。リー球面変換の群をリー球面群と呼ぶ。リー球面群はメビウス変換やラゲル変換を含む。

Lie quadratic の利点は次の点にある。2つの有向球面

S_1, S_2 は、次式を満たすとき接する。

$$\langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \rangle = 0 \quad (22)$$

リー球面変換を \mathbb{R}^3 内の曲面に作用することができる。特に曲面上の曲率線は曲率線に移るという性質がある。したがって離散曲率線座標はリー球面変換で保たれるため、離散曲率線座標の生成に役立つことが期待される。

6 リー球面変換

リー球面変換は射影空間の二次形式の係数行列に用いられる[10,11]。建築に应用する場合における変換行列

の求め方や条件式を整理する。 $x, y \in \mathbb{R}^{4,2}$ として、次の内積を満たす線形変換 $x \mapsto Ax$ を考える。

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad (23)$$

式(23)を満たす A は

$$A^T E_{4,2} A = E_{4,2} \quad (24)$$

に限る。このとき、 6×6 行列の $A = a_{ij}$ は、リー球面変換である。ここで、

$$E_{4,2} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

である。 I_3 は 3×3 の単位行列である。

リー球面変換の代表的な変換にインバージョンとオフセットがある。インバージョンとオフセットは各々メビウス幾何、ラゲル幾何の変換に位置づけられ、メビウス幾何は点に、ラゲル幾何は有向平面に作用する。

なお、変換を施すときに式(16,17)の射影モデルの表現は、 6 次元空間 \mathbb{R}^6 の自然な基底を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + 1 \cdot e_0 + |x|^2 e_\infty + 0 \cdot e_6 \\ &= x + \frac{1 - |x|^2}{2} e_4 + \frac{1 + |x|^2}{2} e_5 + 0 \cdot e_6 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= v + 0 \cdot e_0 + 2d e_\infty + 1 \cdot e_6 \\ &= v - 2d e_4 + 2d e_5 + 1 \cdot e_6 \end{aligned} \quad (27)$$

リー球面変換によるインバージョンは \mathbb{R}^3 の点に作用する。 \mathbb{R}^3 から \mathbb{S}^3 の写像は次式で与えられる。

$$A_I = f_+^{-1} \circ T_I \circ f_+ : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{S}^3 \quad (28)$$

$$T_I = \begin{bmatrix} -I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} f_+(x) &= x + 1 \cdot e_0 + |x|^2 e_\infty + 0 \cdot e_6 \\ &= x + \frac{1 - |x|^2}{2} e_4 + \frac{1 + |x|^2}{2} e_5 + 0 \cdot e_6 \end{aligned} \quad (30)$$

$$f_+^{-1}(x + u e_4 + v e_5) = \frac{1}{v}(x + u e_4) \quad (31)$$

上記の写像は次のように表す事ができる。

$$A_I(x) = \left(\frac{2x}{1 + |x|^2} + \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} e_4 \right) \quad (32)$$

この写像は、半径 $\sqrt{2}$ で中心 $(0, 0, 0, 1)$ の球面を用いて、

点 $x \in \mathbb{R}^3$ を \mathbb{R}^4 上の \mathbb{S}^3 に写像するメビウス幾何のインバージョンとみなす事ができ、三次元の球面を球面に写す事ができる。 $y \in \mathbb{R}^4$ は、次式の変換で \mathbb{R}^3 に引き戻す事ができる。

$$y \mapsto s + \frac{\rho^2}{|y-s|^2}(y-s) \quad (33)$$

$s = (0,0,0,1)$, $\rho = \sqrt{2}$ である。 $s = (0,0,0,-1)$ としても問題ない。リー球面変換によって離散曲率線座標を保ち、様々な形状が得られる。

7 クリストッフエル変換

クリストッフエル変換は、コンベスキュール変換 (Combescure transformation) に四辺形の対角線の平行移動を加えた変換である。コンベスキュール変換は、四辺形の辺の長さは自由とした平行移動によって四辺形を構成する変換である[11]。辺の平行移動時に、ネットの一方は、フリップ(入れ替え)操作を行う。この操作により、ガウス曲率が正の曲面は、ガウス曲率が負の曲面に変換されて構成される。実装するときは、四辺形の辺のベクトルを参照し、線分の交点を求める単純な二次連立方程式を解く。一般の円が外接・内接する四辺形ネットではクリストッフエル変換は成り立たないが、複比 $Q = -1$ のとき、クリストッフエル変換が成り立つ[12]。図 5 の同色の線が互いに平行な線を表す。

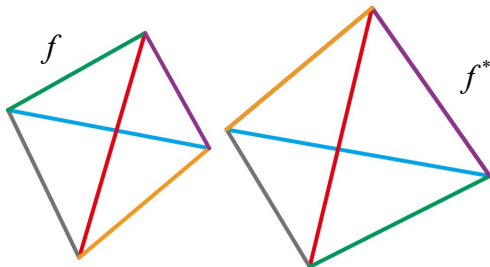


図 5 クリストッフエル変換

8 離散極小曲面の形状生成

平面で構成した S 離散等温曲率座標をリー球面変換のインバージョンによる変換を施すと、 \mathbb{S}^2 の球面に写る。円の中心点と円同士の交点を結ぶ線と直交する接線を結んだ四辺形ネットがケーベ多面体である。リー球面変換のインバージョンはメビウス変換の代表的な変換であり、複比を保つため等温性が保たれる。本稿では、インバージョンのみを扱うため、6次元空間から5次元空間 \mathbb{R}^5 に縮約する。式(30)で \mathbb{S}^3 に写し、次式の3つの回転操作を行い、式(33)で \mathbb{R}^3 に引き戻す。

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t_1 & -\sin t_1 \\ 0 & 0 & \sin t_1 & \cos t_1 \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t_2 & 0 & -\sin t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin t_2 & 0 & \cos t_2 \end{bmatrix}, \\ R_3 &= \begin{bmatrix} \cos t_3 & 0 & 0 & -\sin t_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin t_3 & 0 & 0 & \cos t_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、 t_1, t_2, t_3 は回転パラメータである。参照する初期平面形状は、図6に示す Model 1, 2, 3 を採用する。Model 1, Model 2 は円が外接する四辺形ネットと円が内接する四辺形ネットに対応する。Model 3 は離散ベキ函数であり、初期平面形状は二重に重なっている。

9 等張力性の確認

確認方法 1: 有限要素法

有限要素法による等張力性を確認する。等張力の確認方法は三角形要素の有限要素で離散化を行い、初期張力として等張力を導入する。次式で表す接線剛性方程式によって釣り合いを求める。

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{u} = - \int_S \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} dA \quad (35)$$

ここで、 $\mathbf{K}_E, \mathbf{K}_G$ は各々弾性剛性行列、幾何剛性行列である。初期張力 $t\sigma_x = t\sigma_y = 1.0$ N/mm とする。

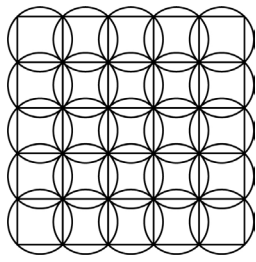
等方性膜材料を想定し、弾性係数 $E = 1.0 \times 10^5$ kN/m², $G = 5.0 \times 10^4$ kN/m², ポアソン比 0.3 とする。

確認方法 2: 図式力学

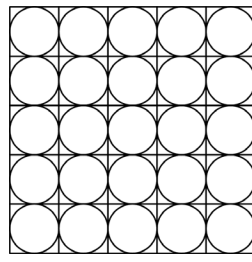
Model 2 の場合、円の中心点を結ぶと Force diagram (図 10 の青線) が得られる。Force diagram の線の長さを初期張力による合応力として釣り合いを確認する。

10 形状生成結果と解析結果

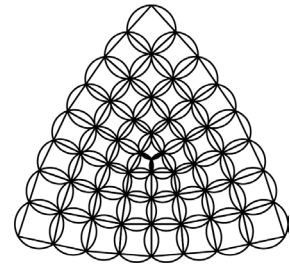
図 7.8 に形状生成結果、図 9 に式(35)を解いた解析結果による膜主応力図を示す。図 7 より式(34)の回転パラメータの変化により、様々な形状が生成されることが確認できる。大規模な連立方程式を解かずに連続的に極小曲面を生成することができる。図 8 の膜主応力図より等張力性が確認できる。等張力の釣り合いに誤差が生じている



Model 1

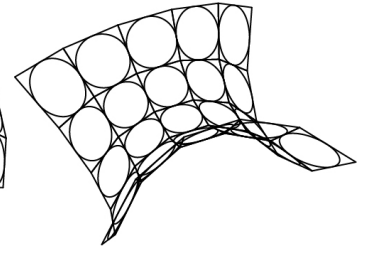
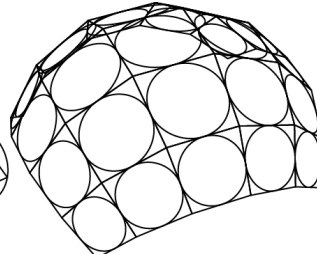
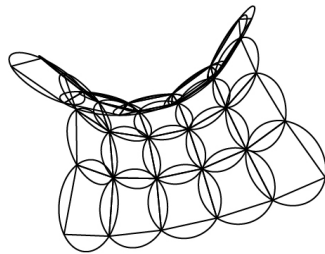
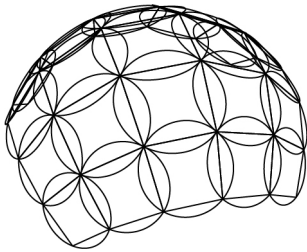


Model 2

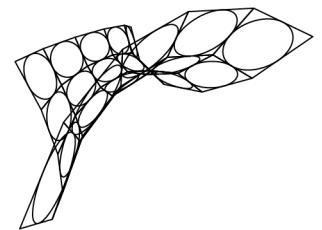
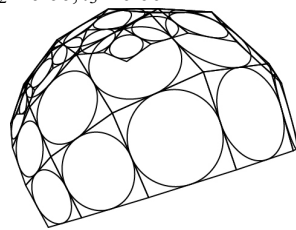
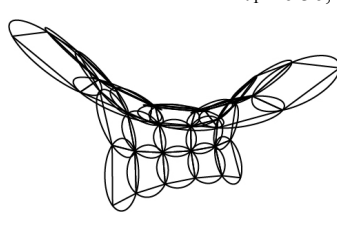
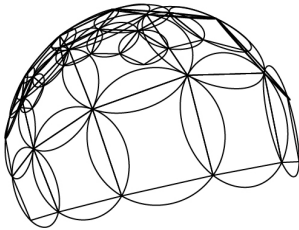


Model 3

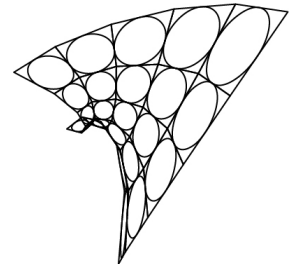
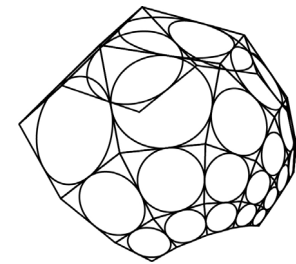
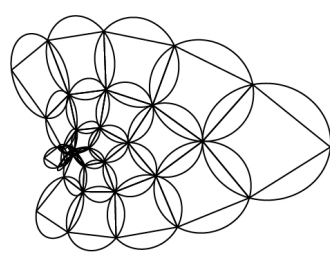
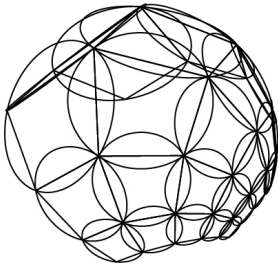
図6 初期平面形状



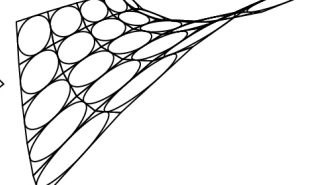
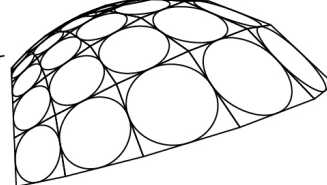
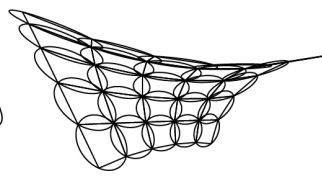
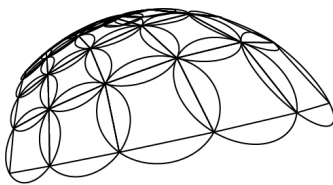
Case1: $t_1 = 0.50, t_2 = 0.00, t_3 = 0.00$



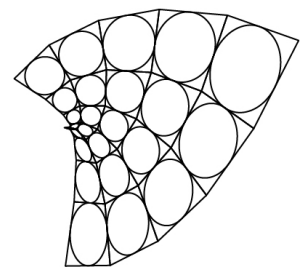
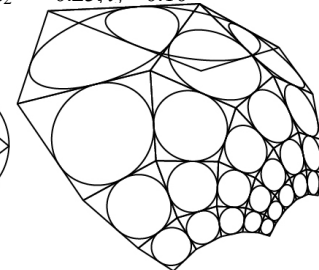
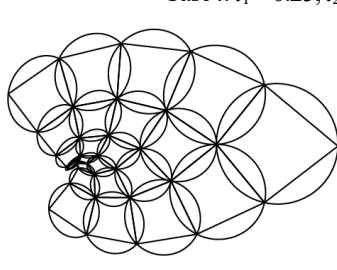
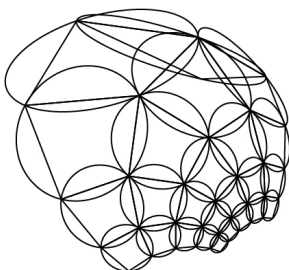
Case2: $t_1 = 0.50, t_2 = -0.25, t_3 = 0.10$



Case3: $t_1 = 0.50, t_2 = 0.25, t_3 = -0.40$



Case4: $t_1 = 0.25, t_2 = -0.25, t_3 = 0.10$



Case5: $t_1 = 0.25, t_2 = 0.25, t_3 = -0.40$

a. ケーベ多面体

b. 離散極小曲面

a. ケーベ多面体

b. 離散極小曲面

Model 1

Model 2

図7 形状生成結果 (Model 1, 2)

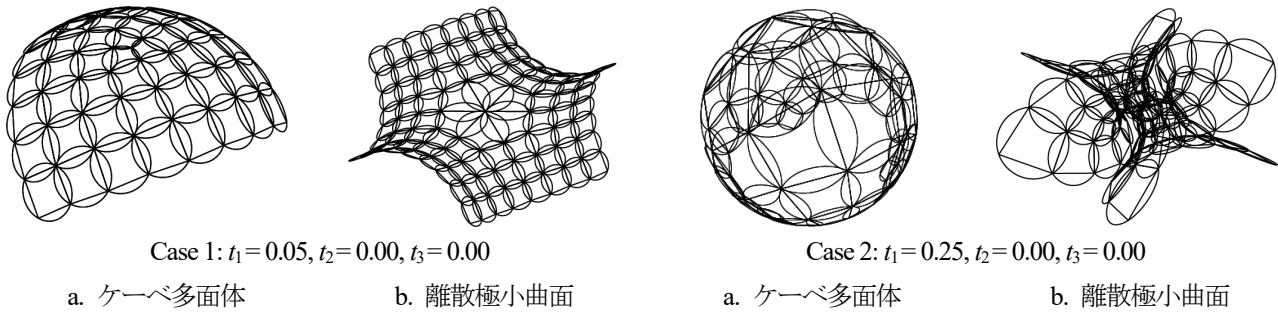


図8 形状生成結果 (Model 3)

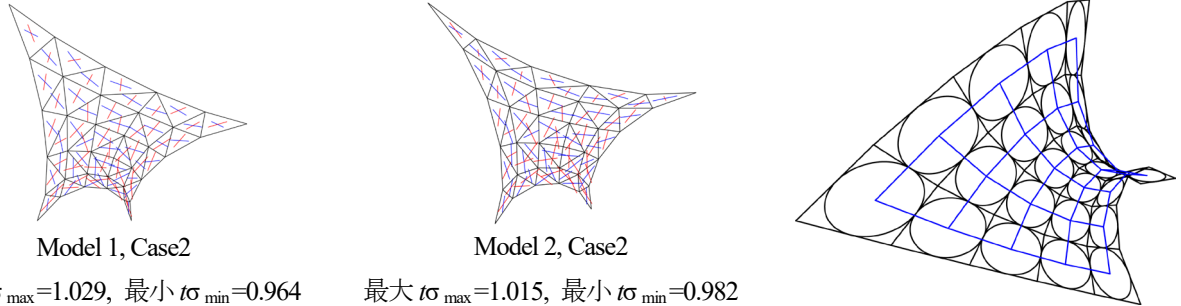


図9 膜主応力図 (N/mm)

図10 図式力学

点は、弾性変形を考慮している点と右辺の外力項の面積を要素面積としている点にあると考える。図式力学の不釣合い力の誤差は $1e^{-6}$ 以下の誤差に収まっている。この誤差は CAD の丸め誤差と考えられる。Model1,2 の四隅の点は、同一平面にある。全モデルは平坦な四辺形で曲面が覆われており、四辺形の辺を辿る線は、膜構造の裁断線として採用することができる。ただし、境界条件を設定することが出来ないため、設計者がパラメトリックな操作で直観的に形状を決定する仕様が想定される。

11 まとめ

本稿では、リー球面幾何による極小曲面のパラメトリックな形状生成手法を示し、得られた離散極小曲面に等張力の初期張力を導入した有限要素法による応力変形解析の実行および図式力学による弾性変形を考慮しない釣合いを用いて、等張力性を確認した。今後は、等張性の検討により精緻な応力解析方法を検討する。

謝辞：本研究は、JST, CREST, JPMJCR1911, JSPS KAKENHI JP24K16924, 公益財団法人能村膜構造技術振興財団、2023 年度東洋大学井上円了記念研究助成の支援を受けたものである。ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) Schek, H.J.: The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3, pp.115-134, 1974
- 2) Barnes, M.R.: Form finding and analysis of tension space

- structures by dynamic relaxation, Doctoral thesis, City University London, 1977
- 3) 三木 優彰, 川口 健一: 三項法と双対推定一張力構造の形状決定問題及び連続体の大変形問題, *日本建築学会構造系論文集*/77 巻 (2012) 674 号, pp. 611-618, 2012
- 4) Cui, J., Ohsaki, M., Shape Design of Curved Surface of Membrane Structures using Developable Surface, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 59(3), pp.199-214, 2018
- 5) Hinata M., Shimasaki M., and Kiyono T., Numerical Solution of Plateau's Problem by a Finite Element Method, *Mathematics of Computation*, Vol. 28, Num. 125, pp.45-60, 1974
- 6) Tsuchiya, T.: Discrete Solution of the Plateau Problem and its Convergence, *Mathematics of Computation*, Vol. 49, No. 179, pp.157-165, 1987
- 7) Pinkall, U., Polthier, K.: Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates, *Experiment. Math.* 2(1): pp.15-36, 1993
- 8) Bobenko, A.I., Hoffmann T., Springborn B. A., Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics, *Annals of Mathematics*, 164, pp.231-264, 2006
- 9) Schief, W. K.: Integrable structure in discrete shell membrane theory, *Proc. R. Soc. A* (2014) 470: 20130757, 2014
- 10) Bobenko, A.I., Suris, Y.B.: Discrete Differential Geometry: Integrable Structure, *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 98, AMS, 2008
- 11) Cecil, T. E.: Lie Sphere Geometry with Applications to Submanifolds second edition, Springer New York, 2008
- 12) 早川健太郎, 軸丸芳揮, 横須賀洋平, 可香谷隆, 林和希, 堺雄亮: シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2021

偏心低減法を用いたフニクラシエルの形状解析

— 偏心距離の算定方法の検討 —

山本憲司¹⁾, 及川 司²⁾

1) 東海大学建築都市学部建築学科, 教授, 博士(工学), kyamamoto@tokai.ac.jp

2) 東京工業大学大学院環境・社会理工学院, 修士課程

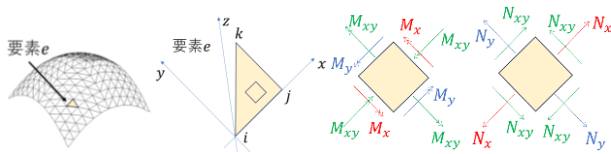
1 はじめに

シェル構造の合理的な形状として曲げモーメントの生じないシェル (フニクラシエル) 形状がよく用いられる¹⁾。2022 年度のコロキウムでは、このような形状を求めるとして、膜力と曲げモーメントを用いて算定される偏心距離の大きさだけ節点を法線方向に移動させる、偏心低減法を提案した^{2,3)}。しかし、シェル曲面は多軸応力場であり、曲面上の方向によって曲げモーメントと膜力の大きさが変化するため、偏心距離も方向によって変化する。このため様々な偏心距離の算定方法が考え得るが、十分な検討をしていなかった。そこで本研究では3つの異なる偏心距離の算定方法について比較を行い、形状解析に効果的な算定方法を検討する。

2 解析方法

2.1 偏心距離の算定方法

三角形平面要素を用いてシェルを離散化する (図 1(a))。節点数を N とし、シェルの形状は節点座標ベクトル $\mathbf{r} = [x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N]^T$ で表現されるものとする。また、節点 i, j, k から成る要素 e は ij 方向に要素 x 座標をとり、三角形 ijk が要素 xy 平面上に乗るように、要素 y 座標をとる。要素内では図 1(b)のように断面力の向きを定義する。



(a)シェルの離散化 (b)平面シェル要素の断面力

図1 シェルモデル

例えば要素端部の節点 i における膜力、曲げモーメントを $N_{xi}, N_{yi}, N_{xyi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{xyi}$ と表す。これらは要素座標に沿った断面力であるが、要素平面上の任意の方向に沿った断面力を考える。要素 xy 平面上の任意の単位ベクトル $\mathbf{u} = [\cos \theta, \sin \theta]^T$ (θ は要素 x 軸となす角度で $0 \leq \theta \leq \pi$) の方向の膜力 $N_i(\theta)$ 、曲げモーメント $M_i(\theta)$ は次式で表すことができる。

$$N_i(\theta) = \mathbf{u}^T \mathbf{N}_i \mathbf{u}, \quad M_i(\theta) = \mathbf{u}^T \mathbf{M}_i \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\text{ここに } \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_{xi} & N_{xyi} \\ N_{xyi} & N_{yi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} M_{xi} & M_{xyi} \\ M_{xyi} & M_{yi} \end{bmatrix}$$

したがって、曲げモーメントを膜力で除すことで定義される偏心は、次式のように表すことができる⁴⁾。

$$e_i(\theta) = \frac{M_i(\theta)}{N_i(\theta)} \quad (2)$$

文献4)ではこの偏心を **generalized eccentricity** と呼んでいる。上式は θ によって値が変化するため、本研究の形状修正の為に用いる偏心距離は、考え方により様々な算定方法が考えられる。

本報では、1)主曲げモーメント方向で偏心距離を算出する方法 (偏心 A)、2)偏心距離が最大となる方向で算出する方法 (偏心 B)、3)平均応力を用いて偏心距離を算出する方法 (偏心 C) の3通りについて検討を行う。以下にそれぞれの算定方法について述べる。

2.1.1 偏心 A

主曲げモーメント方向で偏心距離を算出する。主曲げモーメントは次の固有値問題の解となる。

$$[\mathbf{M}_i - M_i \mathbf{I}] \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここに \mathbf{I} は 2×2 の単位行列である。上式の2つの主曲げモーメント M_{1i}, M_{2i} を求め、これと同じ θ 方向の膜力 N_{1i}, N_{2i} を求める。形状修正に用いる偏心距離 \bar{e}_i はこれら2方向の偏心距離の平均値として次式により算定する。

$$\bar{e}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{1i}}{N_{1i}} + \frac{M_{2i}}{N_{2i}} \right) \quad (3)$$

この方法は前報2)とおよそ同じ方法である (厳密に言えば、平均ではなく単純な足し合わせとしており、(3)式の1/2が無い)。

算定方法の概略図を図2(a)に示す。(1)式の N_i, M_i を縦軸と横軸にそれぞれとり、 θ に応じてプロットすることで図のような楕円を描く。 M_i が最大 M_{1i} 、最小 M_{2i} となる点と原点を結ぶ直線の傾きを e_{1i}, e_{2i} とすれば、これらの傾きの平均が \bar{e}_i になる。

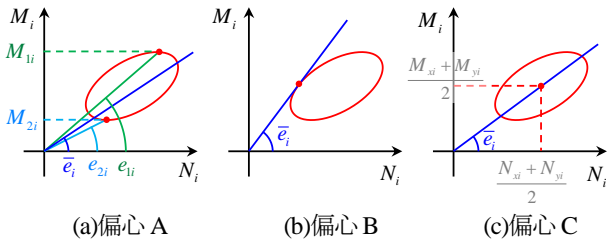


図2 偏心距離の概略図

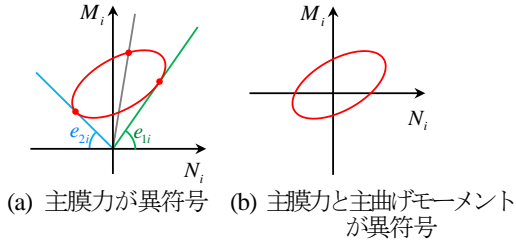


図3 偏心Bが計算できない場合

2.1.2 偏心B

偏心距離が最大となる方向で算出する。最大・最小偏心距離は次の固有値問題を解くことで得られる⁴⁾。

$$[\mathbf{M}_i - e_i \mathbf{N}_i] \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

上式の2つの解(最大・最小偏心距離) e_{1i}, e_{2i} のうち絶対値の大きい方を形状修正に用いる偏心距離 \bar{e}_i とする。

この算定方法の概略図を図2(b)に示す。原点を通り楕円と接する2つの直線のうち、傾きが大きい方が偏心距離 \bar{e}_i となる。ただし、この方法には少し問題がある。主膜力が異符号となり、 N_i, M_i の描く楕円が y 軸 (M_i 軸) を跨ぐような応力状態を考える(図3(a))。この場合、(4)式の固有値問題を解いて得られる2つの解 e_{1i}, e_{2i} は、最大・最小偏心距離とはならない。 $N_i = \pm 0$ をとり得るため、最大・最小偏心距離は $\pm \infty$ となる。さらに、それぞれ2つの主膜力と主曲げモーメントがともに異符号となり、 N_i, M_i の描く楕円の内側に原点があるような応力状態を考える(図3(b))。この場合では、(4)式の固有値問題は実数解を持たない。

形状解析の際にこれらのケースが発生した要素節点では、次のように算定を行うことにした。1)図3(a)のケースでは特に区別せず他に要素と同様に e_{1i}, e_{2i} のうち絶対値の大きい方を偏心距離 \bar{e}_i とする。2)図3(b)のケースが生じた場合は、計算不能となるため、 $\bar{e}_i = 0$ とする。

2.1.3 偏心C

(1)式の $N_i(\theta)$ は次式のようにも書ける。

$$\begin{aligned} N_i(\theta) &= \mathbf{u}^T \mathbf{N}_i \mathbf{u} \\ &= N_{xi} \cos^2 \theta + N_{yi} \sin^2 \theta + 2N_{xyi} \sin \theta \cos \theta \quad (5) \\ &= \frac{N_{xi} + N_{yi}}{2} + \frac{N_{xi} - N_{yi}}{2} \cos 2\theta + N_{xyi} \sin 2\theta \end{aligned}$$

最後の行の第1項は平均応力(等方応力)と呼ばれ、 θ 方向によって変動せず全ての方向に様に発生している応力成分である。 $M_i(\theta)$ も同様の成分を計算できる。この平均応力を用いれば θ に依存しない偏心距離の成分を算出できる。

平均応力を用いて偏心距離を算出する。偏心距離 \bar{e}_i は次式のように簡単に求めることができる。

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{M}_i}{\bar{N}_i}, \quad \bar{N}_i = \frac{N_{xi} + N_{yi}}{2}, \quad \bar{M}_i = \frac{M_{xi} + M_{yi}}{2} \quad (6)$$

この算定方法の概略図を図2(c)に示す。楕円の中心を通る直線の傾きが偏心距離 \bar{e}_i となる。

2.1.4 偏心距離の計算例

上述の3つの偏心距離の算定方法によって計算結果にどのような違いが生じるか、計算例を示す。計算モデルは図4に示すモデルであり、後述3章で扱われるモデル3と同じモデルである。詳細な解析条件は3章を参照されたい。ここでは計算結果のみを示す。

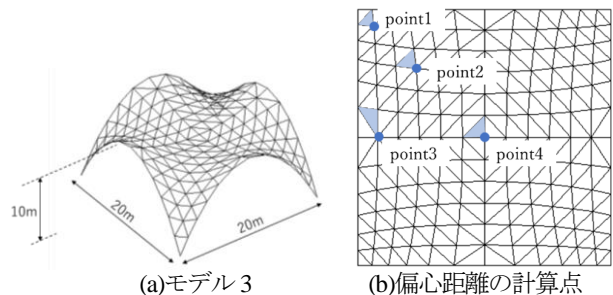


図4 解析モデル

図4(b)に示した薄く色の塗られた要素の point1~4 の位置でそれぞれ偏心距離を算出した。point1 での計算により得られた偏心Aを図5(a1)に示す。赤い線が N, M の θ による軌跡を表すが、この例では楕円が潰れて直線になっている。赤線の y 座標の最大値、最小値が主曲げモーメントであり、これらの点と原点を結ぶ直線の傾きの平均値が(3)式の偏心距離 \bar{e}_i となる。この傾きを持った直線を青線で示してある。同様に、図5(a2),(a3)が偏心B,Cの point1 の計算結果であり、赤線、青線の意味は同じである。3つの図を比較すると、偏心距離(青線の傾き)が3つの方法で大きく異なっていることがわかる。

同様に point2~4 の結果を図5(b)~(d)に示す。point2~

4では3つの算定方法は傾きの符号は何れも同じで、大きさに違いは生じるが同傾向の偏心距離となっている。
point1は図3(a)で示した2つの主膜力が異符号で楕円がy軸を跨いでいるケースであり、このような場合に、特に3つの計算に大きな差が生じやすいことがわかる。

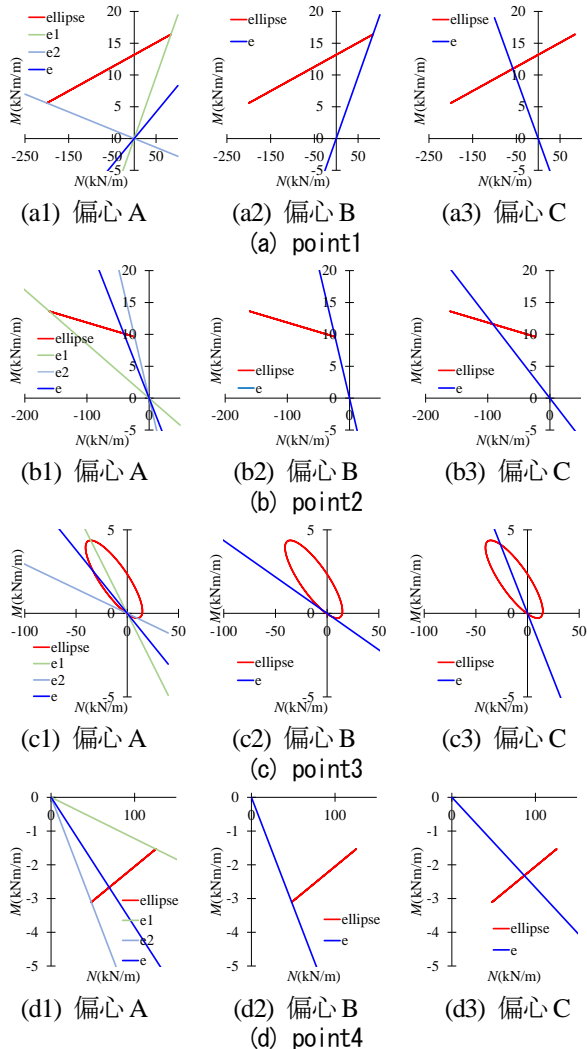


図5 偏心距離の計算例

2.2 形状修正

以上のような要素 e の偏心距離 \bar{e}_i を用いて節点 i の修正ベクトル $\Delta \mathbf{r}_{ei}$ を次のように定める。

$$\Delta \mathbf{r}_{ei} = \frac{\bar{e}_i}{m_i} \mathbf{n}_e \quad (7)$$

ここに、 m_i は節点 i に接続する要素数、 \mathbf{n}_e は要素 e の法線ベクトルである。 m_i で除してある理由は、隣接要素との修正ベクトルの重ね合わせを行うと、自ずと修正ベクトルが平均されるようにするためである。

節点 j, k についても同様に $\Delta \mathbf{r}_{ej}, \Delta \mathbf{r}_{ek}$ を算出して要素修正ベクトル $\Delta \mathbf{r}_e$ を作成する。

$$\Delta \mathbf{r}_e = \left[\Delta \mathbf{r}_{ei}^T, \Delta \mathbf{r}_{ej}^T, \Delta \mathbf{r}_{ek}^T \right]^T \quad (8)$$

各要素で上式の修正ベクトルを算定し、重ね合わせを行なうことでシェル全体の節点座標修正ベクトルが次のように算出される。

$$\Delta \mathbf{r} = \sum \Delta \mathbf{r}_e \quad (9)$$

実際の修正では上式の修正ベクトルのうち z 方向の成分のみで修正を行う。また、支点節点は移動させない。上記の形状修正について十分に曲げモーメントが小さくなるまで繰り返し修正を行う。なお、本報では安定的に最終形状を得るために z 方向成分のみ修正したが、問題に応じて全ての方向に修正しても構わない。

2.3 偏心距離の低減

偏心Bでは、2つの主膜力が異符号になると厳密な算定では最大・最小偏心距離は $\pm\infty$ となることを述べた。その他の偏心距離の算定方法でも、算定に用いる分母の膜力 N がゼロに近い値をとると、偏心 $e = M/N$ は大きな値を取り、シェルの形状が大きく崩れてしまう場合がある。これはすべての算定方法に共通の問題である。

そこで、節点の膜力の大きさ $|N|$ (N は(3)式では N_{ii} または N_{2i} 、(4)式では最大偏心の方向の N_i 、(6)式では \bar{N}_i)がシェル全体の平均値 $|N|_{ave}$ の p 倍以下の比較的小さい範囲では、図3のように線形減少する係数 α を(7)式の \bar{e}_i に乗じて偏心距離を $\alpha \bar{e}_i$ とし、修正ベクトルの低減を行う。即ち、

$$\Delta \mathbf{r}_{ei} = \frac{\alpha \bar{e}_i}{m_i} \mathbf{n}_e \quad (10)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|N|}{p|N|_{ave}} & \text{if } |N| \leq p|N|_{ave} \\ 1 & \text{if } |N| > p|N|_{ave} \end{cases} \quad (11)$$

p の値は試行錯誤で決めるが本報では0.5を採用した。既報³⁾では $\alpha = |N|/|N|_{max}$ ($|N|_{max}$: 膜力の大きさの最大値)によって全節点で常に低減したが、本報は膜力の小さい部分のみ低減することになり収束が早くなる。

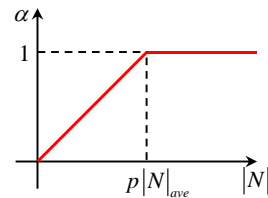


図6 偏心距離の計算例

3 数値解析例

解析モデルは3D-CADのRhincerosを用いて4つの曲

面モデルを作成した。全てのモデルは20m×20mの正方形平面とした。図7左図のように境界線と幾つかの放物線を引き、曲線ネットワークコマンドで曲面を作成した。曲面の要素分割はGrasshopperのMesh Surfaceコンポーネントを用いて12×12の正方形メッシュに分割した後、Triangulateコンポーネントを用いて三角形メッシュに分割した。全てのモデルで節点数169、要素数288である。

全てのモデルはシェルの厚さ0.1mとし、ヤング率21.7GPa、ポアソン比0.17、単位体積重量24.0kN/m³とする。外力は自重のみ与える。支持条件は、一番低い高さにある節点を全てピン支持とする。

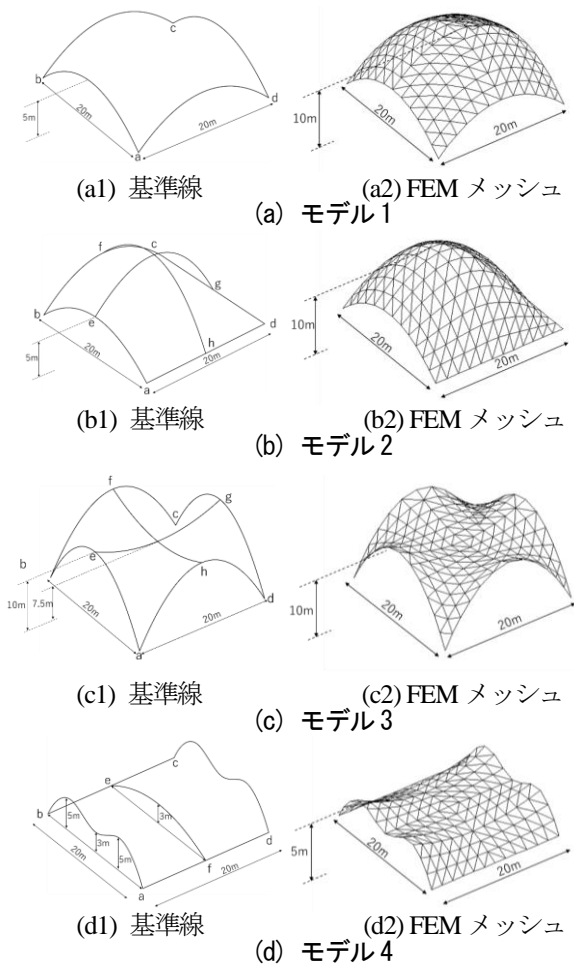


図7 解析モデル

偏心 A,B,C それぞれで100回の形状修正を行った。モデル1の曲げ歪エネルギー率（総歪エネルギーに対する曲げ歪エネルギーの割合）の推移を図8に示す。図の縦軸は曲げ歪エネルギー率であり、横軸は修正回数である。この図から、偏心Cで曲げ歪エネルギー率が最も小さく、10回程度の反復計算でゼロに近い値になっており収束も早いことがわかる。偏心Bはが上昇してしまってい

る。100ステップにおける各偏心算定方法に形状を図9に示す。偏心Aはフリーエッジ付近に小さな凹凸があり、偏心Bは曲面が小刻みに波打ってしまっている。偏心Cは滑らかな曲面が得られた。

モデル1の初期形状と膜応力図、曲げ応力図を図10に示す。応力図は主応力であり赤線が圧縮、青線が引張を表す。曲げ応力はシェルの上面の値である。同様に最も結果の良かった偏心Cの100ステップ時の応力図を図11に示す。曲げ応力の最大値は初期形状の6.88N/mm²から0.02N/mm²と非常に小さくなっていることが確認できる。

同様にモデル2の結果を図12~15に示す。このモデルでも偏心Cは10回程度の反復計算でゼロに近い値が得られ、良い結果が得られている。

モデル3,4の結果を同様に図16~23に示す。これらのモデルでも偏心Cが最も曲げ歪エネルギー率の低下が大きく、良好な結果が得られている。ただし、図17(d)、図21(d)を見ると偏心Cの最終形状は滑らかな曲面とはなっておらず、小刻みな凹凸が見られる。モデル4のフリーエッジは更に反復回数を増やして修正していくと文献3)と同様に滑らかなアーチ状に変化した。桁行方向の曲面の凹凸は残ったままであった。

モデル1,2のように初期形状が曲面全体で圧縮力が支配的なモデルの場合では滑らかな曲面が得られるが、モデル3,4のように曲面の一部に引張の膜力が生じている初期形状では、滑らかな曲面が得られない傾向がある。この傾向は本手法に限らず、他のフニクラシエルの形状探索手法に共通の問題と考えている。

モデル1~4の解析結果をまとめて表1に示す。表は100回形状修正した後の曲げ歪エネルギー率 U_b/U を表しており、「形状」の欄は最終形状の滑らかさを筆者が主観で○×△の3段階で記入した。

表1 偏心 A, B, C の比較

		初期形状	偏心 A	偏心 B	偏心 C
		モデル1	形状	△	×
	U/U_b	0.62	0.050	0.84	0.00012
モデル2	形状	○	×	○	
	U/U_b	0.13	0.00068	0.67	0.00055
モデル3	形状	△	×	△	
	U/U_b	0.72	0.21	0.53	0.0030
モデル4	形状	×	×	△	
	U/U_b	0.65	0.058	0.14	0.040

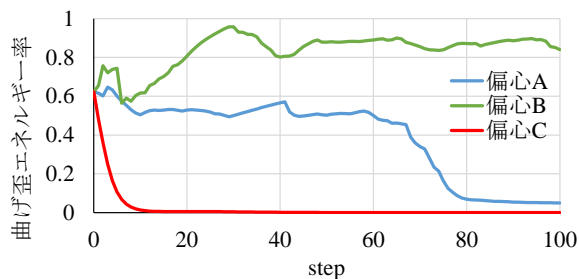


図8 曲げ歪エネルギー率の推移 (モデル1)

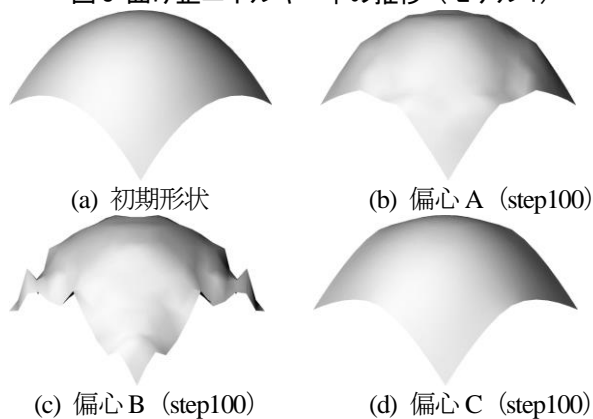


図9 初期形状と最終形状 (モデル1)

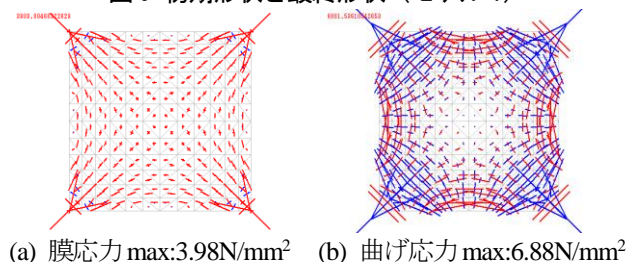


図10 初期形状の主応力図 (モデル1)

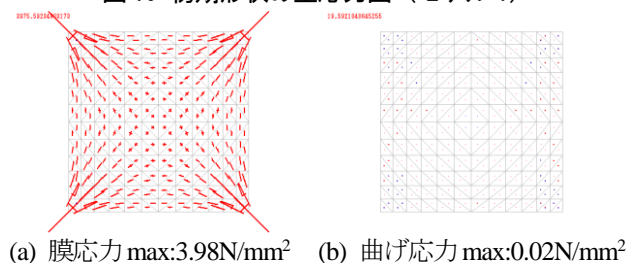


図11 偏心Cの最終形状の主応力図 (モデル1)

4 まとめ

著者らは、フニクラシエルの形状を求める簡便で実用的な方法として、膜力と曲げモーメントを用いて算定される偏心距離の大きさだけ節点を法線方向に移動させる偏心低減法を提案している。多軸応力場のシェル曲面では、曲面上の向きにより偏心距離が変化するため、形状修正に用いる偏心距離の算定方法について検討した。主曲げモーメント方向で算定する偏心A、最大偏心距離を算定する偏心B、平均応力で算定する偏心C、の3つの算定方法を検討し、形状解析における性状をそれぞれ調

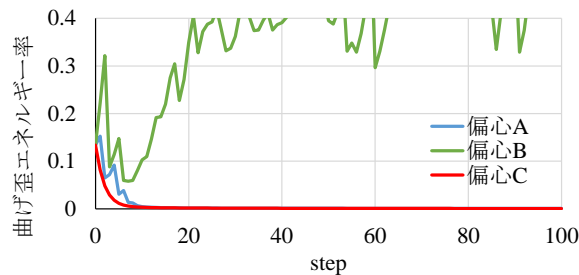


図12 曲げ歪エネルギー率の推移 (モデル2)

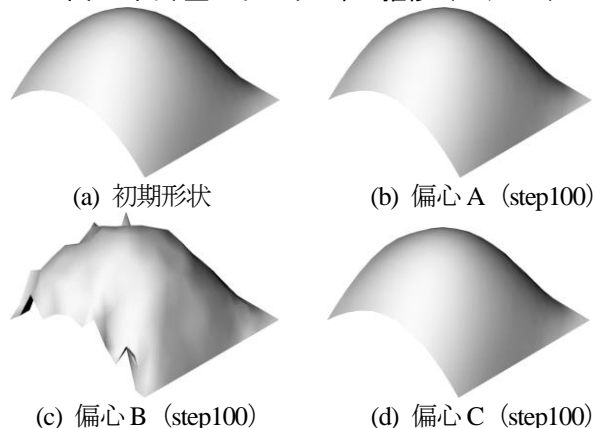


図13 初期形状と最終形状 (モデル2)

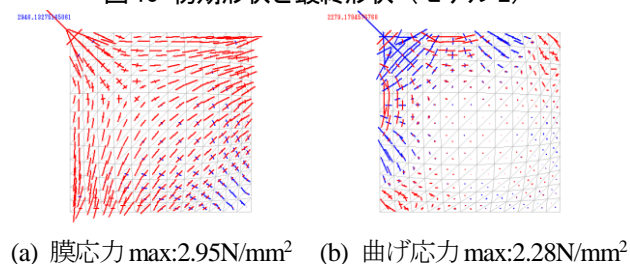


図14 初期形状の主応力図 (モデル2)

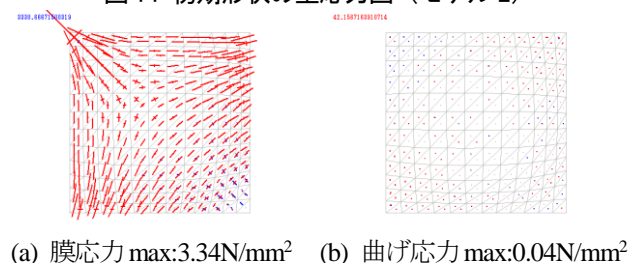


図15 偏心Cの最終形状の主応力図 (モデル2)

査した。本報で得られた成果を以下にまとめる。

- 1) 偏心距離の算定方法の違いにより、形状修正の結果に大きな違いが生じることがわかった。
- 2) 応力の偏差成分を除き、等方成分のみから算定される偏心Cが最も有効であることがわかった。

シェルの曲げモーメントは支持点に向かう理想的な膜力の流れから迂回した距離によって発生しており、偏心距離を算定して、その距離だけ曲面を移動することで曲げモーメントの発生を低減できる。本手法は形と力の流れの本質を利用した簡便で実用的な方法と言える。

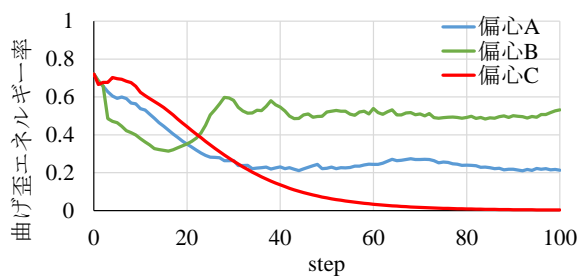
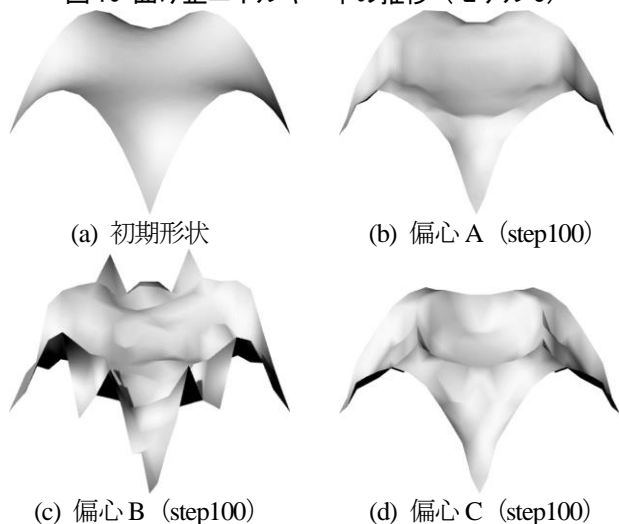
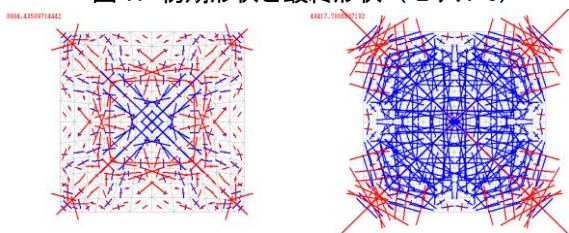


図 16 曲げ歪エネルギー率の推移 (モデル 3)



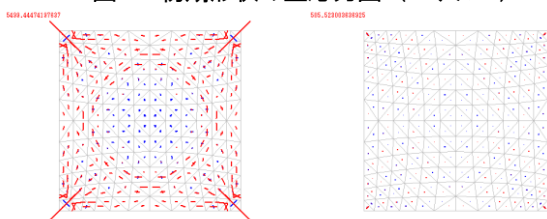
(a) 初期形状 (b) 偏心 A (step100)
(c) 偏心 B (step100) (d) 偏心 C (step100)

図 17 初期形状と最終形状 (モデル 3)



(a) 膜応力 max:3.90N/mm² (b) 曲げ応力 max:46.4N/mm²

図 18 初期形状の主応力図 (モデル 3)



(a) 膜応力 max:5.50N/mm² (b) 曲げ応力 max:0.51N/mm²

図 19 偏心 C の最終形状の主応力図 (モデル 3)

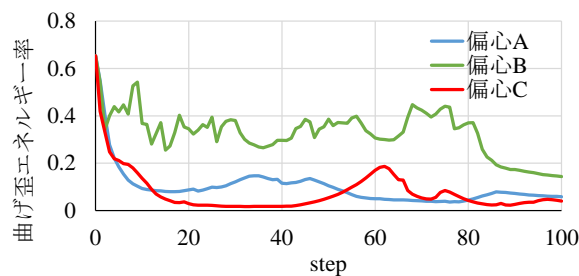
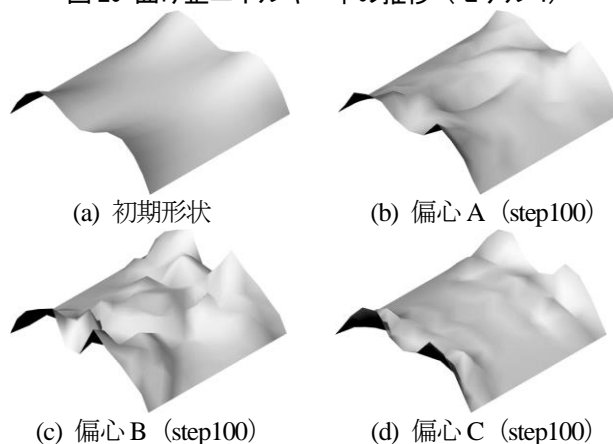
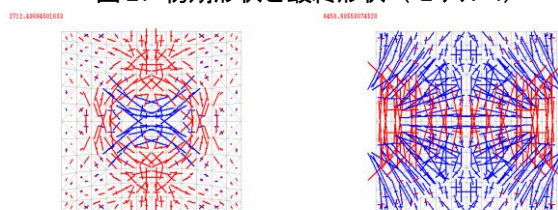


図 20 曲げ歪エネルギー率の推移 (モデル 4)



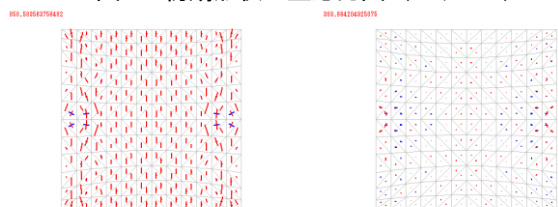
(a) 初期形状 (b) 偏心 A (step100)
(c) 偏心 B (step100) (d) 偏心 C (step100)

図 21 初期形状と最終形状 (モデル 4)



(a) 膜応力 max:2.71N/mm² (b) 曲げ応力 max:6.45N/mm²

図 22 初期形状の主応力図 (モデル 4)



(a) 膜応力 max:0.85N/mm² (b) 曲げ応力 max:0.31N/mm²

図 23 偏心 C の最終形状の主応力図 (モデル 4)

参考文献

- 1) S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, C. Williams: Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization, Routledge, London, 2014
- 2) 塩見裕幸, 山本憲司: 偏心低減法を用いたフニクラシェルの形状解析, コロキウム構造形態の解析と創生 2022 講演論文集, pp.9-14, 2022.10
- 3) 塩見裕幸, 山本憲司: 偏心低減法を用いたフニクラシェルの形状解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol.88, No.809, pp.1156-1164, 2023.7

- 4) S. Gabriele, V. Varano, G. Tomasello, D. Alfonsi: R-Funicularity of form found shell structures, Engineering Structures, Vol.157, pp.157-169, 2018
- 5) G. Argento, S. Gabriele, V. Varano: Shells' Shape Optimization Based on R-Funicularity, Proceedings of the IASS Annual Symposium 2020/21 and the 7th International Conference on Spatial Structures, 23-27 August 2021, Guildford, UK

構造最適化を用いた耐震補強部材の設計と実装 -脆弱建築物を対象とした耐震補強工法の提案-

木村俊明¹⁾, 北島千朔²⁾

1)名古屋市立大学大学院芸術工学研究科, 准教授, 博士(工学), tkimura@sda.nagoya-cu.ac.jp

2)九州大学人間環境学府, 博士後期課程, 修士(工学)

1 序

土, 煉瓦や石といった材料(以後, 脆弱材料)を用いた建築物は, 世界各地で建設されている。歴史的建造物として残存する建築物もある。これらは鉄骨やコンクリートのような工業化された材料を用いた現代の建築物と異なり, 自然材料の特性を生かして少ない環境負荷で建設できるメリットがある。一方, 材料強度のばらつき等が顕著であり, 地震による倒壊被害は後を絶たない。歴史的建造物の維持保全を含め, 脆弱材料で建設された建築物(脆弱建築物)の地震対策は急務の課題であり, 構造性能評価や耐震補強工法に関する研究が活発に行われている。例えば, 多幾山らは歴史的煉瓦造建築物を対象として, 無補強煉瓦壁の面外方向の振動特性を評価している[1]。Wangmo et al. は引き倒し試験により, 版築壁の面外方向の構造性能評価を行い, 耐震補強工法を検討している[2]。耐震性能のみならず, エネルギー性能を同時に向上させる改修方法も検討されている[3]。例えば, Valluzzi et al. は無補強組積造建築物の耐震性能と断熱性能の改善を目的として, CLT パネルを内挿した工法を提案している[4]。大空間建築物においても脆弱材料を用いた事例は多数あり, 耐震性能を評価する試みも確認できる[5]。近年では, 形状探索やデジタルファブリケーション(DF)技術を駆使し, 脆弱材料で自由形状の空間構造を設計した事例も確認できる[6]。ところで, 前述した研究(例えば[4])で示された補強工法は規格部材を用いている。文献[6]のように形状探索やDF技術等を用いれば, より効果的な耐震補強が可能になると考えることができる。

本研究では構造最適化・DFを用いた脆弱建築物の耐震補強工法の提案を目的とする。本論文では, まず, 補強部材の材料として木質材料に着目し, DF技術を用いた加工方法を調査する。次に軽量で高性能な耐震補強部材の形状設計を行うため, 構造最適化問題を定式化し, 数値解析例により有効性を検証する。

2 木質材料を対象としたDF技術

本節では近年飛躍的な進歩を遂げているDF技術を用いた木質材料の加工事例を調査し, 耐震補強工法への適用可能性を模索する。木質材料でDF技術を用いた事例はこれまでもいくつかある。例えばレーザーカッターを用いて正確な部材長さや接合位置で加工された測地線グリッドシェル[7]や, 一般的なデスクトップサイズの3Dプリンタを用いて出力した接合部と木質材料パネルを組み合わせた構造物[8]がある。

この他, DF技術の一つとして, コンピューター数値制御(CNC)により, 材料の不要な部分を切削して目的の形状に加工する方法(ミリング加工)があげられる。具体例として, 3軸加工機を用いた建築模型製作[9]や7軸CNC加工機を使った複雑形状の事例[10]をあげることができる。木質材料は他の建築材料と比較して廉価で且つ軽量であり, ミリング加工が容易で非常に相性が良い。木材のみで接合したジョイントを実装した事例[10]では, 手作業では困難な, 複雑な仕口が示されている。この他に, CLTパネルのような1枚の平坦な板から複数の部品を加工し, それらを用いて立体架構を作る事例[11]もある。さらに, DF技術を用いることで平坦な面として切削するだけでなく, 滑らかな曲面の加工も可能となる。具体的には, プロダクトや彫刻作品などへの応用として曲面状の加工を施した事例[12, 13]や曲線材を組み合わせた曲面版[14]がある。他にも, 木材の切れ端を加工して利用する試み[15]は, 生産過程の課題解決につながるアップサイクルの手段としての可能性も示している。また, 木質材料において顕著である材料特性のばらつきをデジタル技術によって効果的に管理し, DF技術を用いて部品を製造する試みも行われている[16]。

本節で着目したミリング加工と次節以降で取り扱う位相最適化の操作は類似しており, 加工形状を力学的にコントロールして木質材料の形状を決定する試みも行われている。集成材及びCLTのコア材やサンドイッチスラブの内部補強材[17, 18]や耐震壁[19]の事例に注目すると, 形状決定に位相最適化が用いられている。したがって,

先行事例から見て、耐震補強工法に木質材料と DF 技術を用いることは十分に適用可能性があると考えられる。

3 構造最適化手法を用いた耐震補強部材の形状設計

3.1 位相最適化手法

本研究では、有限要素法による構造解析 (FEA)を用いて構造性能を評価し、位相最適化を用いて耐震補強部材の形状設計を行う。耐震補強部材は木質版を用いる。脆弱建築物を構成する組積造壁は土、石やブロックを想定する。簡単のため、FEA では等方弾性体と仮定する。また、木質版と組積造壁は鋼材で連結する。FEA では、いずれも平面シェル要素で離散化する (図1)。

位相最適化は Solid Isotropic Material Penalization (SIMP)[16]に基づく。一般的に、SIMP では材料密度を規定するパラメータ $\rho \in [0, 1]$ を有限要素毎に割り当てる。 $\rho=0$ の要素は除去する。 i 番目の有限要素におけるヤング係数 $E(\rho_i)$ を次式のように表す。

$$E(\rho_i) = \rho_i^\alpha E_0 \quad (1)$$

ここで、 E_0 はヤング係数の基準値を、 α は中間密度の要素 (グレー要素) を縮小するペナルティ係数を表す。本論文では有限要素のシェル板厚 t にパラメータ ρ を割り当てる。

$$t(\rho_i) = \rho_i^\alpha t_0 \quad (2)$$

ここで、 t_0 は基準となる木質版の板厚を表す。なお、本論文では $\alpha=4$ とする。

有限要素毎にパラメータを割り当てる場合、適切な位相を求めるためには要素分割を細かく行う必要が生じる。本研究では、計算量の増加を抑え、位相最適化の簡略化を図るため、 ρ の分布をスプライン関数で表現する。パラメータ ρ の分布のイメージを図2に示す。 x, z 方向に $N \times M$ 個の制御点を配置してパラメータ ρ に関する曲面を表す。制御点ベクトルを $\mathbf{q} = [q_{xij} \ q_{zij} \ q_{\rho ij}]^T$ ($i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$) とする。なお、FEA において板厚を表す際は、有限要素の重心位置における ρ を算定して割り当てる。

3.2 最適化問題の定式化

ρ に関する制御点ベクトルを $\mathbf{q}_\rho = [q_{\rho 11}, q_{\rho 12}, \dots, q_{\rho 1J}, \dots, q_{\rho IM}, \dots, q_{\rho NM}]^T$ と表す。補強パネルと組積造壁をそれぞれ要素数 m_b, m_c で離散化する。壁体の面外方向に作用する地震力に対して組積造壁に曲げモーメント M_{xi} ($i=1, \dots, m_c$) が、面内方向に作用する地震力に対して水平反力 R_x が生じると考える。本論文では、パラメータ ρ と組積造壁に生じ

る面外曲げモーメントの p ノルムを制約し、指定水平変位時 $\bar{\delta}_x$ における水平反力 R_x を最大化する最適化問題を定式化する。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && f(\mathbf{q}_\rho) = R_x(\mathbf{q}_\rho) \\ & \text{Subject to} && \mathbf{g}(\mathbf{q}_\rho) = \begin{cases} g_1(\mathbf{q}_\rho) = \sum_i \sum_j \rho_{ij} \leq \beta \\ g_2(\mathbf{q}_\rho) = \sqrt[p]{\sum_i M_{xi}^p} \leq \sqrt[p]{\sum_i M_{x0i}^p} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 β はパラメータ ρ の総和を制限するパラメータで1以下の値とする。1.0の場合、削除される要素は無く、耐震補強部材の総体積 $V(\mathbf{q}_\rho)$ は初期値 V_0 となる。 M_{x0i} は $V(\mathbf{q}_\rho) = V_0$ の耐震補強部材を設置した時に組積造壁に生じる面外曲げモーメントを表す。この他、 p ノルムについて、本論文では $p=8$ とする。

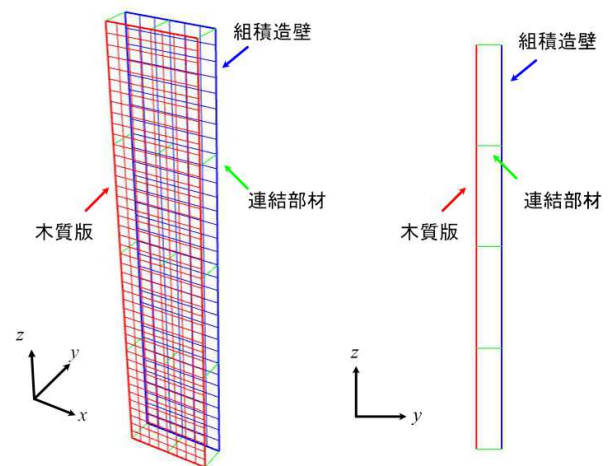


図1 組積造壁と耐震補強部材の構成

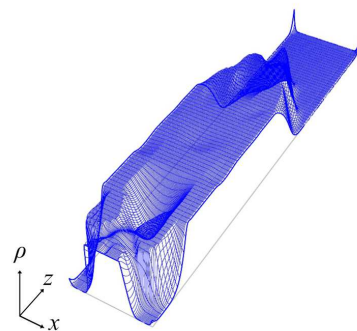


図2 パラメータ ρ の分布に関するイメージ

3.3 耐震補強部材の形状設計手順

本論文では、以下の手順により耐震補強部材の形状を求める。

- Step 1 対象となる組積造壁，耐震補強部材の諸元を定める。
- Step 2 最適化問題(3)を解き，パラメータ ρ の分布を求める (図 3(a))
- Step 3 厚さの下限値を定め，耐震補強部材の境界形状を決める (図 3(b))
- Step 4 得られた境界形状を基に耐震補強部材の位相を決定する(図 3(c))

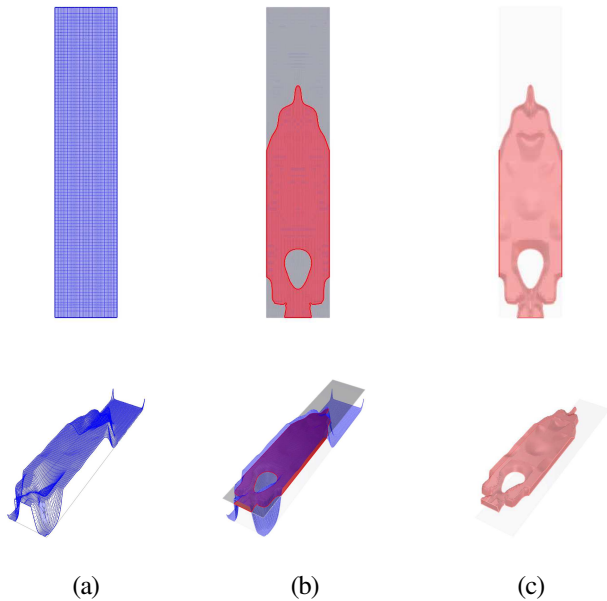


図3 位相決定の過程; (a) パラメータ ρ の分布の最適化, (b) 指定値の平面にて境界形状を作成, (c)得られた位相

4 数値解析例

既往研究[4]を参考し，2層1スパン構造物の部分モデルを最適化対象とする（幅1.2m，高さ6m，図4）。FEA汎用構造解析ライブラリの1つであるOpenSeesPy[22]を用い，線形静的解析を行う。組積造壁の材料特性を表1に示す。耐震補強部材はCLTパネル($t=30+40+30=100$ mm)を想定する。ヤング係数は長辺方向と短辺方向でそれぞれ $E_1=7020$ MPa, $E_2=4780$ MPa とする。いずれも平面シェル要素(ShellDKGQ)を用いて離散化する。接続鋼材は丸鋼 ($D=14$ mm, $E_s=220$ GPa) を想定し， y 方向は接続鋼材の軸剛性を持つバネ要素で接続する。 x 方向は組積造壁と耐震補強部材が同一変位となるように equalDOF で拘束する。また，耐震補強部材は壁脚でピン支持し，2F, RF レベルで y 方向の並進変位を拘束する。外力は自重に水平震度0.2を乗じた地震力を定め，方向毎に各節点に作用させて構造解析を行う。水平反力は x 方向加力時で最大変位 6.0 mm に到達した時点の値を算定する。

面外曲げモーメントの算定は y 方向加力時とする。スプライン関数の制御点は72個 ($N \times M=6 \times 12$)配置する。また， ρ の総和を制限する β は0.7とする。

本論文では，組積造壁の諸元の違いが解に与える影響を調べる。石を想定した場合の結果をケース1，中空ブロックの場合をケース2と呼ぶ。なお，石を材料とした組積造壁のみで反力は $R_x=35.1$ kN，中空ブロックの場合は $R_x=42.3$ kN となった。また，最適化前の補強パネルを設置した場合の水平反力 R_x と曲げモーメントの最大値 M_{\max} を調べると，ケース1は $R_x=139$ kN, $M_{\max}=0.577$ kNm/m が得られた。面外曲げモーメントに関する制約条件の上限値は $\sqrt[p]{\sum_i M_{x0i}^p} = 0.870$ kNm/m となった。同様に，ケース2では 152 kN, 0.217 kNm/m, 0.285 kNm/m となった。

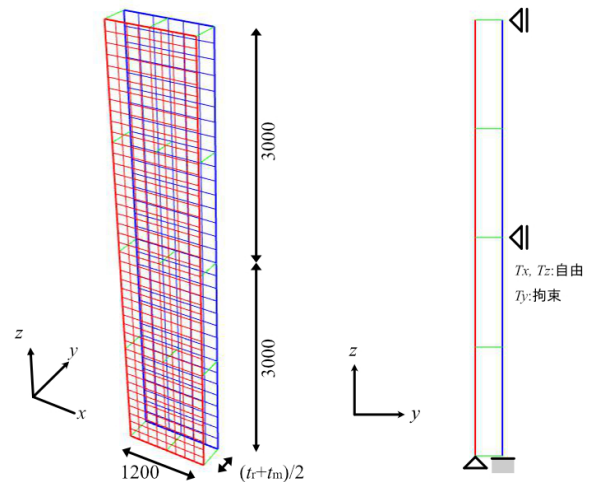


図4 対象モデルの諸元

表1 組積造壁の諸元

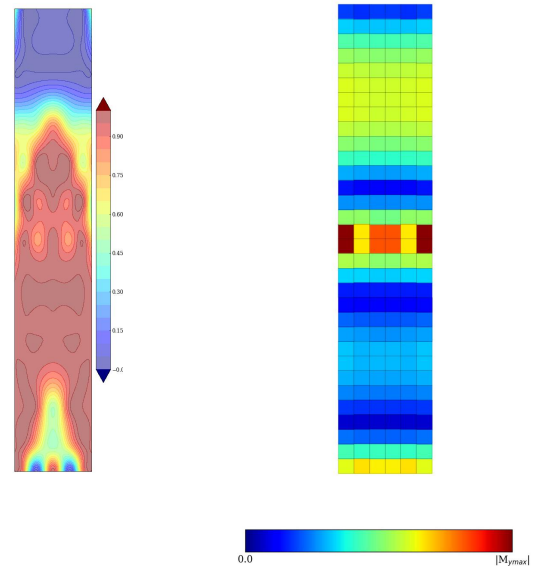
使用材料	石	中空ブロック
単位体積重量 γ (kN/m ³)	21.4	15.2
壁厚 t_m (m)	0.65	0.30
ヤング係数 E_m (MPa)	1740	4550

最適化はScipyを利用し，SLSQPを指定して実行した。各ケースにおけるパラメータ ρ と面外曲げモーメントの絶対値の分布を図6,7に示す。パラメータ ρ は1.0を赤，0.0を青，面外曲げモーメントの絶対値は最大値を赤，0.0を青としてカラーマップで図化している。図8に耐震補強部材の位相を示す。式(2)を基に板厚分布を算定し， $t=3$ mm を下限値として境界形状を決定している。

得られた結果を見ると、いずれもせん断抵抗するパネルの形態が得られており、高い水平反力を獲得している。脚部に着目すると、端部または中央の点を支点とする形状に変化していることがわかる。最大曲げモーメントが生じる $h=3.0\text{ m}$ の周辺は開口なく、密に配置されている。面外モーメントの上限を見るとケース 1 で増加しているが、増加量は微小値と判断できる。ケース 2 は上限値以下となる。総体積も 55~60% になり、軽量化ができていて、断面が変化する箇所の局所的な応力状態については正確にモデル化できていないため、詳細な性状を別途確認する必要がある。

5 結

構造最適化や DF を用いた脆弱建築物の耐震補強工法の提案を目的とし、本論文では、まず、DF 技術を用いた木質材料の加工方法を調査した。次に軽量で高性能な耐震補強部材の形状の導出を目的とした構造最適化問題を定式化し、数値解析例により有効性を検証した。今後は手法の高度化を図った後、得られた耐震パネルの形状を基に CNC ルーターを使って加工・部材製作を行い、製造・施工に関する検証を併せて行う。



$$R_x(P_\rho)=205 \text{ (kN)},$$

$$\sum_i \sum_j \rho_{ij} = 0.70$$

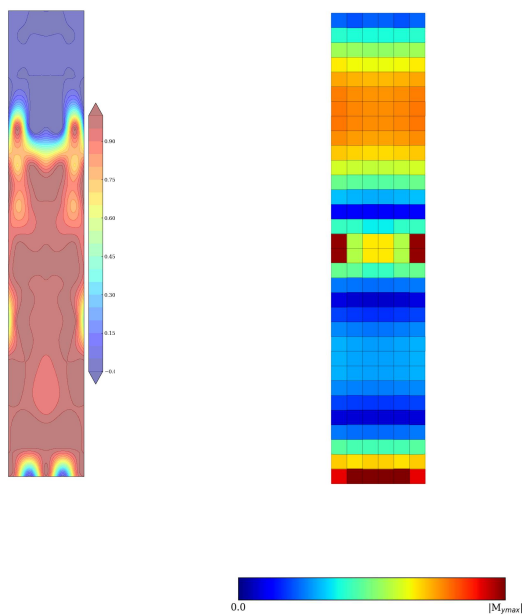
(a) パラメータ ρ

$$\sqrt[p]{\sum_i M_{xi}^p} = 0.282 \text{ (kNm)}$$

$$|M_{y\max}| = 0.215 \text{ (kNm)}$$

(b) 面外曲げモーメント (絶対値) の分布

図 7 最適化結果の例 (ケース 2)



$$R_x(P_\rho)=192 \text{ (kN)},$$

$$\sum_i \sum_j \rho_{ij} = 0.70$$

(a) パラメータ ρ の分布

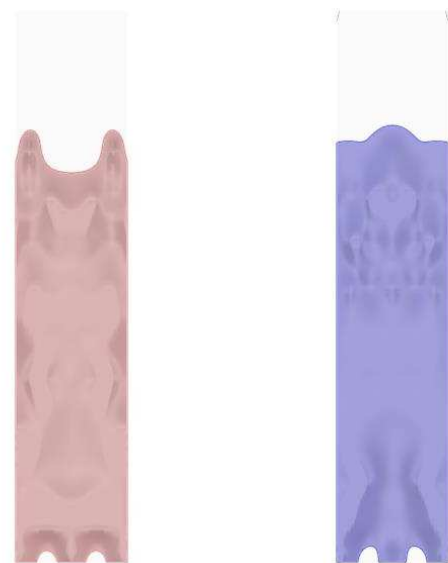
$$\sqrt[p]{\sum_i M_{xi}^p} = 0.870 \text{ (kNm)}$$

$$|M_{y\max}| = 0.580 \text{ (kNm)}$$

(b) 面外曲げモーメント

$|M_{y\max}|$ の分布

図 6 最適化結果の例 (ケース 1)



(a) ケース 1
 $V=0.43 \text{ m}^3$

(b) ケース 2
 $V=0.39 \text{ m}^3$

図 8 Step 4 で得られる耐震補強部材の位相

謝辞

本研究は科学研究費 21KK0076 の助成を受けました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 多幾山法子, 田井利幸, 林 康裕, 歴史的煉瓦造建築物の無補強壁の面外方向振動特性の評価, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 77, No. 673, pp. 475 - 483, 2012.
- 2) P. Wangmo, K. C. Shrestha, T. Aoki, M. Miyamoto, Pema, Strengthening Strategies for Existing Rammed Earth Walls Subjected to Out-of-Plane Loading, *Advances in Civil Engineering, CivilEng*, 1(3), 229-242, 2020.
- 3) D.A. Pohoryles, D.A. Bournas, F. Da Porto, A. Caprino, G. Santarsiero, T. Triantafyllou, Integrated seismic and energy retrofitting of existing buildings: A state-of-the-art review, *Journal of Building Engineering*, Vol. 61, Paper No. 105274, 2022.
- 4) M.R. Valluzzi, E. Saler, A. Vignato, M. Salvalaggio, G. Croatto, G. Dorigatti, U. Turrini, Nested buildings: an innovative strategy for the integrated seismic and energy retrofit of existing masonry buildings with CLT panels, *Sustainability*, 13(3), 2021.
- 5) P. Block, J. Ochsendorf, Thrust Network Analysis: A New Methodology for Three-Dimensional Equilibrium, *J. Int. Assoc. Shell Spatial. Struct.*, 48(3), 167-173, 2007.
- 6) M. Rippmann, T. Van Mele, M. Popescu, E. Augustynowicz, T. Méndez Echenagucia, C. J. Calvo Barentin, U. Frick, P. Block, The Armadillo Vault: Computational design and digital fabrication of a freeform stone shell, *Advances in Architectural Geometry 2016*, pp. 344-363, 2016.
- 7) S. Pillwein, J. Kübert, F. Rist, P. Musialski, Design and Fabrication of Elastic Geodesic Grid Structures, *SCF '20: Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Fabrication*, pp. 1-11, 2020.
- 8) K. Atsumi, T. Hanazato, O. Kato, Assembly and Fabrication of Double-Curved Panel Structures Using Japanese Wood Joints Created with Desktop 3D Printers, *XXV International Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics*, pp. 1245-1255, 2021.
- 9) R. Aitcheson, J. Friedman, T. Seebohm, 3-Axis CNC Milling in Architectural Design, 3(2), 2005.
- 10) S. Brell-Çokcan, M. Reis, H. Schmiedhofer, J. Braumann, Digital Design to Digital Production: Flank Milling with a 7-Axis CNC-Milling Robot and Parametric Design, In: *Proceedings of the 27th eCAADe Conference, Istanbul*, pp. 323-330, 2009.
- 11) A. J. de-los-Aires-Solís, F. Gonzalez-Quintal, A wood-wood joining system suitable for digital fabrication and its application in the design of a “wood-only” spatial module, *Frontiers of Architectural Research*, 12(3), 523-540, 2023.
- 12) G. Granello, T. Reynolds, R. Taleb, C. Prest, Lateral Load Capacity of WikiHouse Composite Walls from CNC-Cut Timber, *Journal of Structural Engineering*, 149(10), 2023.
- 13) D. Reisach, S. Schütz, J. Willmann, S. Schneider, Digital Fabrication for Circular Timber Construction: A Case Study, *Circular Economy*, 2(1), 2024.
- 14) G. Brugnaro, A. Figliola, A. Dubor, Negotiated Materialization: Design Approaches Integrating Wood Heterogeneity Through Advanced Robotic Fabrication, *Digital Wood Design 24*, pp. 135-158, 2019.
- 15) A. A. Krimpenis, M. Chrysikos, 3D parametric design and CNC manufacturing of custom solid wood electric guitars using CAD/CAM technology, 14(7), 1-15, 2017.
- 16) A. Lungu, M. Ispas, L. Brenci, S. Răcășan, C. Coșoreanu, Comparative study on wood cnc routing methods for transposing a traditional motif from romanian textile heritage into furniture decoration, *Appl. Sci.*, 11(15), 2021.
- 17) R. Johns, N. Foley, Bandsawn Bands: Feature-Based Design and Fabrication of Nested Freeform Surfaces in Wood, In: McGee, W and Ponce de Leon, M (eds) *Robotic Fabrication in Architecture, Art and Design*. pp 17-32. 2014.
- 18) A. Fernando de Vito Jr., W. Martins Vicente, Y. Min Xie, Topology optimization applied to the core of structural engineered wood product, *Structures*, pp.1567-1575, 2023.
- 19) J. Kayee Li, M. Matthias Hudert, L. Vabbersgaard Andersena, A study of internal stiffeners in wooden slab panels obtained by topology optimization, *Proceedings of the IASS 2024 Symposium*, Paper No. 357, 2024.
- 20) 杉本, 熊谷, 許斐, 高山, 木村, 大崎, 和多田, 自由形状の開口を持つ木合板耐震パネルの開発 その4: 材軸方向異方性線材要素とトポロジー最適化による木合板耐震パネルの創生, *日本建築学会学術講演梗概集, 構造 III*, pp. 787-788, 2024.
- 21) M. P. Bendsoe: Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol.1, pp.193-202, 1989.
- 22) Minjie Zhu, Frank McKenna, Michael H. Scott, OpenSeesPy: Python library for the OpenSees finite element framework, *SoftwareX*, Vol. 7, pp. 6-11, 2018.

固定荷重と地震荷重に対する総歪エネルギーの トレードオフ関係に着目したグリッドシェル構造の構造形態創生

金子亮太¹⁾, 寺澤友貴²⁾, 竹内 徹³⁾

1)(株)竹中工務店, 修士(工学), kaneko.ryoutaa@takenaka.co.jp

2)東京科学大学環境・社会理工学院建築学系, 助教, 博士(工学)

3)東京科学大学環境・社会理工学院建築学系, 教授, 博士(工学)

1 序

グリッドシェル構造の構造形態創生手法は、固定荷重に対する探索が主流であり、動的地震荷重に対する手法は未だ発展途上である。これに対して、一般化応答スペクトル解析法(GRSA)に基づく手法が提案され¹⁾、各荷重に対して探索される形態のトレードオフ関係が示唆されたが、対象は特定建物の単目的最適化に限定されていた。そこで本研究では、各荷重に対する総歪エネルギーを最小化する最適化を行い、地震荷重レベル、支持架構の剛性、制振部材による屋根部入力の低減効果に応じて探索された屋根形状とその動的応答特性を比較分析する。さらに最適屋根形状の座屈荷重安全率について検証する。

2 数値解析概要

2.1 GRSAに基づく構造形態創生手法

図1に構造形態創生手法を示す。提案手法は、一般化応答スペクトル解析(GRSA)²⁾と静的応力解析、最適化アルゴリズムの繰り返し計算により最適な屋根形状を探索する。NURBS 曲面生成、グリッド分割、部材割付けなど設計変数に基づく操作は3DCADの標準機能を用い、解析モデルへの変換、数値解析の実行、結果に基づく目的関数値の計算、最適化アルゴリズムによる設計変数の更新などプリ/ポスト処理はC#の自作プラグイン Titan^{1),3)}を用い、数値解析はFortran 90/95のプログラム⁴⁾を用いる。

2.2 想定建物の数値解析モデル

図2に想定建物の数値モデルを、表1に部材諸元を示す。検討対象は体育館や商業施設を想定した正方形平面を有する鉄骨造の3層支持架構付単層グリッドシェル構造とする。屋根架構は3mグリッドに直行材、斜材、外周材を割付け、支持架構外周部に弾性ブレースまたは座屈拘束ブレース(BRB)を配置する。屋根・外周荷重は1.2 kN/m²、床荷重は5.0 kN/m²とする。初期ライズを7.9 mとし、固定荷重と1次設計時の地震荷重に対して屋根架構安全率2.0、支持架構安全率1.5で許容応力度設計した。



図1 構造形態創生手法

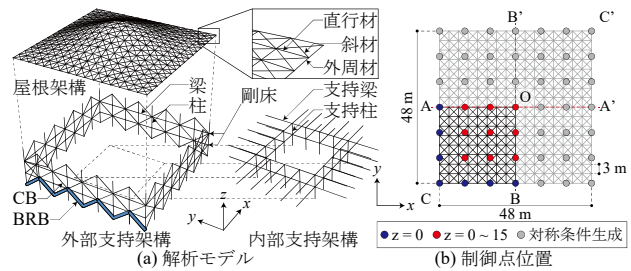


図2 想定建物

表1 部材諸元

(a) 弾性部材

部材名	def	soft	hard	
屋根架構	直行材	φ406.4×16		
	斜材	φ26		
	外周材	φ406.4×9.5		
支持架構	柱・梁	φ406.4×16	φ355.6×11.1	φ609.6×22
	耐震ブレース	φ216.3×12.7	φ216.3×5.8	φ355.6×12.7
	支持柱	φ406.4×9.5	φ318.5×10.3	φ558.8×19
	支持梁	φ267.4×6	φ216.3×5.8	φ355.6×12.7

(b) 座屈拘束ブレース(BRB)

Story	w [kN]	A _i	C _i	Q _u [kN]	Q _{un} [kN]	N [kN]	A _{eq} [mm ²]
3rd	11952	1.54	1.53	23176	5794	236	1676
2nd	11952	1.22	1.21	32858	8215	334	2376
1st	11376	1.00	1.00	38285	9571	389	2769

2.3 検討パラメータ

図3にモデル名規則を、図4に入力地震動を示す。本研究の検討パラメータは、①目的関数の数(単目的, 多目的), ②荷重条件(固定荷重 DL のみ, 地震荷重 EL_{xy} のみ, DL+EL_{xy}), ③地震荷重レベル(設計用加速度応答スペクトルのピーク値が1.0Gか0.5G), ④支持架構水平剛性(初期設計を標準 defとして1/2倍の soft, 5倍の hard), ⑤BRB

による支持架構の地震エネルギー吸収の有無とし、各パラメータから得られる屋根形状とその力学特性に与える影響を比較分析する。また、弾性ブレース付モデルをCBモデル、BRB付モデルをBRBモデルと呼称する。

2.4 目的関数と最適化問題の定義

設計変数は、図2に示す屋根形状を生成するNURBS曲面の制御点の鉛直方向Z座標 x_i とし、目的関数に固定荷重に対する総歪エネルギー U_{DL} または地震荷重に対する総歪エネルギー U_{ELxy} を適用し、単目的最適化問題P-Sと多目的最適化問題P-Mを式(1)~式(5)で定義する。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{MEM} \frac{A_k l_k}{E_k} (\sigma_N^2 + \sigma_M^{(i)2} + \sigma_M^{(j)2}) \quad (1)$$

$$\text{P-S) Minimize : } f(x) = U_{DL} \text{ or } U_{ELxy} \text{ or } U_{DL} + U_{ELxy} \quad (2)$$

$$\text{P-M) Minimize : } f_1(x) = U_{DL}, f_2(x) = U_{ELxy} \quad (3)$$

$$\text{P-S) \& P-M) Subject to : } 0 \text{ m} \leq x_i \leq 15 \text{ m} \quad (4)$$

$$\text{P-S) \& P-M) Variables : } x_i \quad (5)$$

ここにMEMは部材数、Aは断面積、lは部材長、Eはヤング率、 σ_N は軸応力度、 σ_M はi端の曲げ応力度である。 U_{ELxy} は各方向の総歪エネルギーを $1/\sqrt{2}$ 倍した和(斜め45度方向入力)として評価する。

また、本検討では粒子群最適化法(Particle Swarm Optimization, PSO)と、多目的粒子群最適化法(Multi-objective Particle Swarm Optimization⁹⁾, MOPSO)を用いる。粒子群は200、慣性定数wは1.0、個体ベストへの加速定数 c_1 は2.0、粒子群ベストへの加速定数 c_2 は2.0、繰り返し計算回数は50とする。

2.5 数値解析手法

数値解析手法は静的応力解析、振動固有値解析、時刻歴応答解析(NLRHA)、線形・弾性・弾塑性座屈解析、一般化応答スペクトル解析(GRSA)を用いる。静的応力解析は構造形態創生と得られた設計案の力学特性評価に用いる。振動固有値解析、NLRHA、線形・弾性・弾塑性座屈解析は設計案の力学特性評価に用いる。NLRHAの増分変位はNewmark β 法($\beta=1/4$)で計算し、弾性・弾塑性座屈解析は弧長増分法を用いる。GRSAは構造形態創生に用いる。GRSAは複素固有値解析と応答スペクトル法の収斂計算を中核とする数値解析群であり、最大変位応答時に対応する振動系の地震応答を評価する。図5にNLRHAとGRSAにおける支持架構を含む稜線AOA'の地震応答値の比較例を示す。地震応答は図4に示すスペクトル適合3波に対する平均値である。GRSAは架構全体の変位応答を良好な精度で評価する。

Single-DL		① 目的関数の数 (Single, Multi)	③ 1G
① ②		② 荷重条件 (DL, ELxy, DL+ELxy)	④ def
(-0.5G-soft-BRB)		③ 地震荷重レベル (1G, 0.5G)	⑤ CB
③ ④ ⑤		④ 支持架構の水平剛性 (def, soft (def×1/2), hard (def×5))	
		⑤ 支持架構の地震エネルギー吸収の有無 (CB, BRB)	

図3 モデル名規則

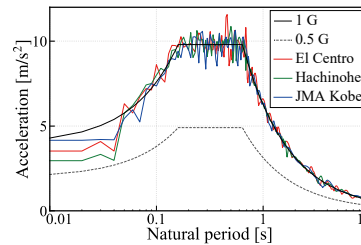


図4 入力地震動

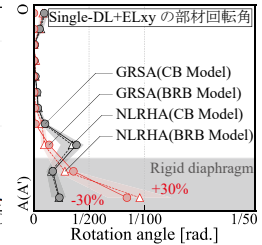


図5 GRSAの精度

3 支持架構の地震エネルギー吸収が無い時の形態創生

3.1 荷重条件と単目的最適化が最適形状に与える影響

図6に単目的最適化より得られた最適屋根形状を示す。以降、視認性の都合より屋根架構の斜材と支持架構の一部を省略して示す。固定荷重のみに対する最適屋根形状(図6(a), Single-DL)は、従来から固定荷重に対する有効性が知られるライズの高い逆さ吊り形状となる一方、地震荷重のみに対する最適屋根形状(図6(b), Single-ELxy)は、水平力に対して面内剛性で抵抗する扁平形状となる。図7の部材力分布に示すように、探索時の対象荷重に対する最適屋根形状の部材応力は効果的に抑えられるが、探索時に考慮しない荷重に対する部材応力は増大する。固定荷重と地震荷重に対する最適屋根形状(図6(c), Single-DL+ELxy)は、両者の中間かつ空間構造特有の逆対称一波モードに抵抗するような局部的隆起を有する形状となる。このように最適屋根形状の特にライズの間にはトレードオフ関係が示唆され、各荷重組合せの単目的最適化はそのパレート解の一部を探索している可能性がある。

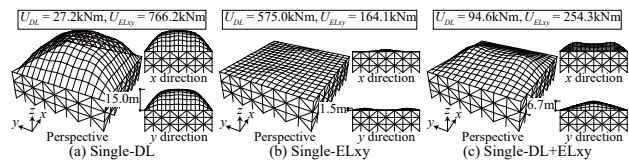


図6 単目的最適屋根形状

	固定荷重下の部材力		地震荷重下(x方向)の部材力	
Single-DL		引張、圧縮 →100 kN		最大軸力 →100 kN
C.L.				
Single-ELxy		曲げ モーメント →100 kNm		曲げ モーメント →100 kNm

図7 部材力分布

3.2 荷重条件と多目的最適化が最適形状に与える影響

図 8(a)に多目的最適化の解集合を示す。単目的最適屋根形状はパレート解の一部であり、Single-DL、-ELxyはその端部に位置する。また、各荷重の総歪エネルギーの下限(赤色一点鎖線)に対する傾きを総歪エネルギー比 U_0 と定義し、 U_0 を指標として最適屋根形状を抜粋して分析する。図 9(a)にパレート解のライズを、図 10(a)に代表的な最適屋根形状を示す。パレート解のライズは U_0 に対して対数的に増加し、 U_0 が大きいほど全体が膨らむ屋根形状、 U_0 が小さいほど局部的隆起を有する扁平形状となる。図 11(a)にパレート解の鉛直たわみ角を示す。鉛直たわみ角は U_0 の効率性に偏る($U_0 < 約 0.25$)と設計クライテリア $1/300 \text{ rad}^6$ を超える。以上に示したように、単独荷重に対して屋根形状を最適化すると非現実的な設計案が生成されるため、実務設計では荷重組合せの単目的最適化が多目的最適化のパレート解から U_0 を指標に設計クライテリアを満足する屋根形状を採用することが望ましい。

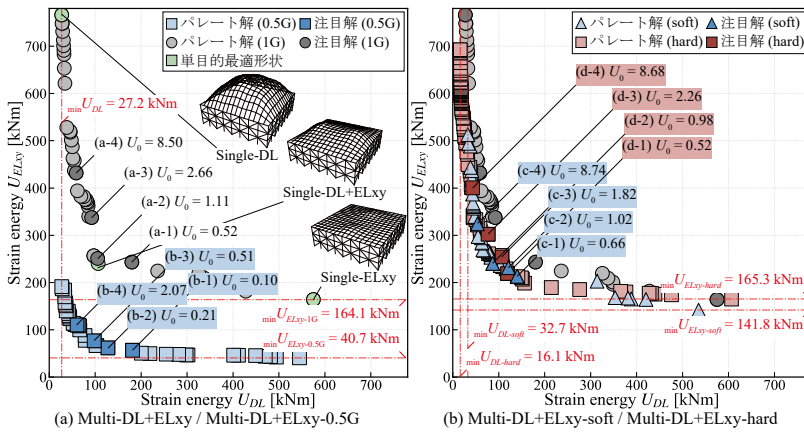


図 8 パレート解集合

3.3 地震荷重レベルが最適屋根形状に与える影響

地震荷重レベルが最適屋根形状に与える影響を分析する。最大加速度が 0.5G の地震荷重に対する探索結果 (0.5G モデル)は、日本より地震荷重レベルの低い地域や、弾性ブレース付き支持架構のまま剛性が変動せず付加的な減衰機構により屋根部入力が半減された場合に対応する。図 8(a)に多目的最適化の解集合を示す。0.5G モデルでは、 U_{ELxy} の下限値が 1G モデルの約 0.25 倍(式(1)より荷重比の 2 乗)となる。ただし、 U_{DL} は変動しないため図 9(a)と図 10(b)に示すように、同じ U_0 で比較すると 0.5G モデルのライズが相対的に高くなる。また、0.5G モデルの最適屋根形状は、その U_0 を約 4.0 倍(0.25 倍の逆数)した 1G モデルの最適屋根形状と概ね対応する。支持架構剛性が変動しない場合では、各種の地震荷重レベルに対する最適屋根形状は、ある地震荷重レベルに対する最適屋根形状と U_0 から類推できる可能性を示唆していると考えられる。

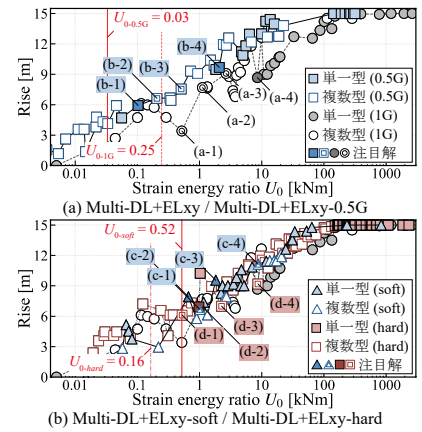


図 9 ライズ-総歪エネルギー関係

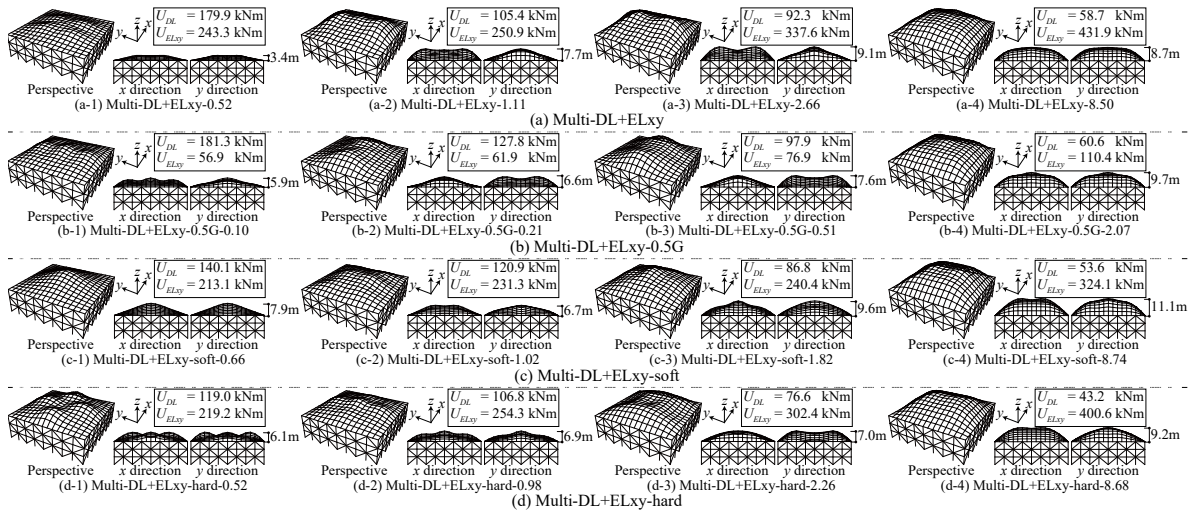


図 10 探索最適屋根形状

図 11(a)にパレート解の鉛直たわみ角を、図 12(a)に地震応答値を示す。パレート解の各応答値は地震荷重レベルに対して概ね等価な U_0 を有するパレート解の結果から低減する。

3.4 支持架構の水平剛性が最適屋根形状に与える影響

支持架構の水平剛性が最適屋根形状に与える影響を分析する。図 8(b)に多目的最適化の解集合を、図 9(b)、図 11(b)にパレート解のライズと鉛直たわみ角を示す。標準設計(DEF)の0.5倍(soft)~5倍(hard)の範囲の支持架構剛性がパレート解の総歪エネルギー分布や U_0 とパレート解のライズの関係性に与える影響は小さい。図 10(c)に代表的な最適屋根形状を示す。同程度の U_0 を有するパレート解の最適屋根形状を比較すると、支持架構剛性が高い方(hard)が局部的隆起を有する場合が多い。図 13の固有振動特性に示すように、これは支持架構剛性が高い場合の周期比 R_T が低次から高次の屋根地震応答が励起されやすい範囲内(0.5~1.0)であり、振動性状に抵抗する屋根形状がパレート解に選択されやすくなったためと考えられる。また、図 12(b)の地震応答値に示すように、同程度の U_0 を有する最適屋根形状を比較すると、同様の理由で支持架構剛性が高い方が屋根部入力が増幅し、地震応答値は大きくなる。

4 支持架構の地震エネルギー吸収がある時の形態創生

支持架構による地震エネルギー吸収がある場合について、荷重条件と目的関数の数が最適屋根形状に与える影響を分析する。地震エネルギーを吸収する支持架構のBRBの諸元は2.2節に示す。

4.1 荷重条件と単目的最適化が最適形状に与える影響

図 14 に単目的最適化により得られた最適屋根形状を示す。図 6 の最適屋根形状と比較すると、支持架構による地震エネルギー吸収がある場合では、ない場合と比べて地震荷重に対する総歪エネルギーが顕著に低下する。これは 3.2 節の地震荷重レベルの調整で模擬できるような付加減衰効果だけでなく、支持架構(BRB)の塑性化に伴う長周期化の効果により、屋根部の変位応答が劇的に低減されるためである。支持架構の地震エネルギー吸収により地震荷重のみに対する最適屋根形状(Single-ELXy-BRB)は局部的隆起を有する扁平形状が選ばれ、固定荷重と地震荷重に対する最適屋根形状(Single-DL+ELXy-BRB)は固定荷重のみに対する最適屋根形状(Single-DL)とはほぼ同等な屋根全体で膨らむ形状が選ばれた。

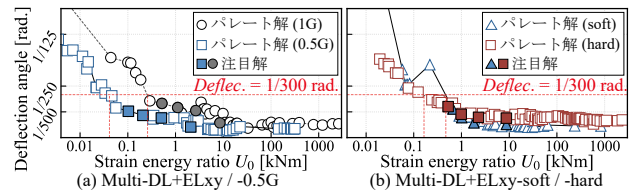


図 11 最大鉛直たわみ角

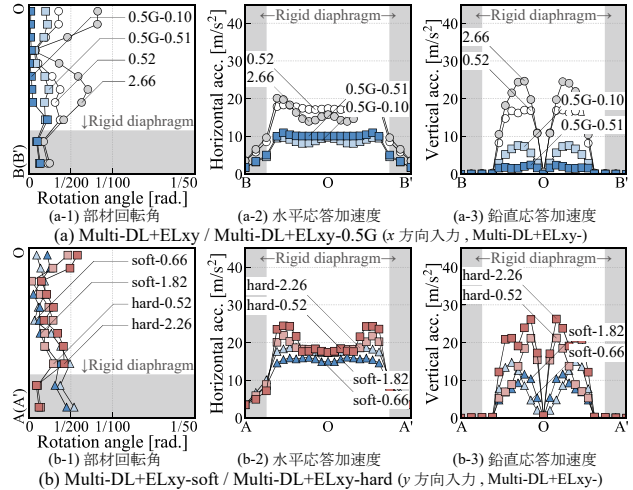


図 12 地震応答値

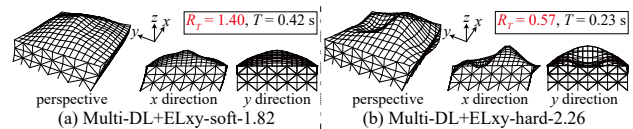


図 13 固有振動特性

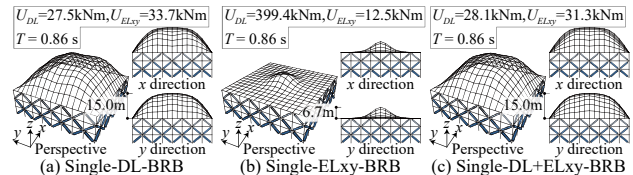


図 14 BRB モデルの単目的最適形状

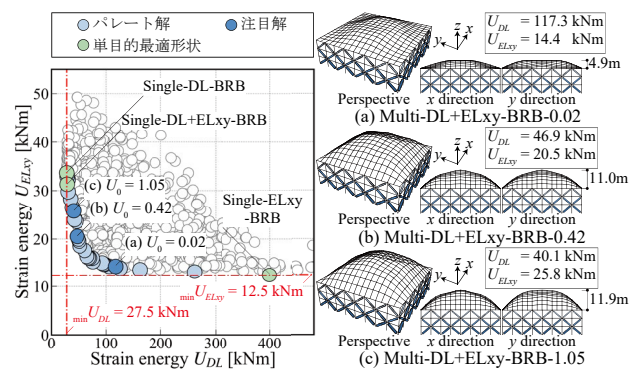


図 15 BRB モデルのパレート解集合

4.2 荷重条件と多目的最適化が最適形状に与える影響

図 15 に多目的最適化の解集合を示す。パレート解の最適屋根形状は殆どが屋根全体で膨らむ形状となる。複雑な隆起のない単純な形状がパレート解となる一方、地震応答が効果的に低減されていることを考慮すると、同

図中の白色マーカーに示すパレート解近傍の解は、意匠上望ましい屋根形状の設計案として十分実現可能と考えられる。図 16 に同等の U_0 を有する弾性ブレース付き支持架構(CB モデル)と BRB 付き支持架構(BRB モデル)のパレート解の地震応答を示す。BRB の付加減衰効果と屋根根部の剛体振動モードを誘発する長周期化の効果により、加速度だけでなく変位の屋根部応答も低減する。

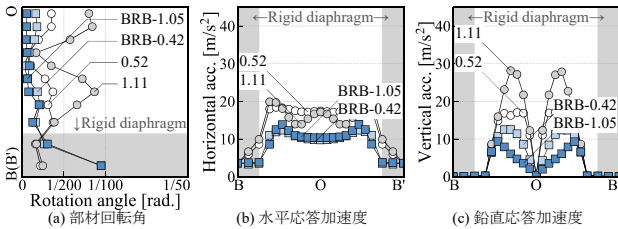


図 16 BRB モデルの地震応答値
(x 方向入力, Multi-DL+ELxy-)

5 探索した最適屋根形状の座屈荷重係数

各種座屈解析を行い探索したパレート解の最適屋根形状の線形座屈モードと座屈荷重係数を分析し、弾塑性座屈荷重係数の簡易評価法の適用性を検証する。座屈解析は屋根部を抽出したモデルに対して実行する。線形座屈荷重係数 λ_{cr}^{lin} は線形座屈解析の固有値、弾性座屈荷重係数 λ_{cr}^{el} は弾性座屈解析の固有値が 1.0 時点の荷重係数とする。弾塑性座屈荷重係数 λ_{cr}^{el-pl} は弾塑性座屈解析時の荷重変位関係の極大点、または解析刻みを調整しても計算が収束しない場合、その時点の荷重係数とする。屋根モデルは中間節点を設けて個材座屈を表現する。斜材と外周材は弾性とし、屋根外周部をピン支持とする。非線形座屈解析では、最大振幅を屋根スパンの 0.1%(本検討では 48 mm)に調整した線形座屈モード形状の初期不整量を節点座標に与える。特に弾性座屈解析では弾性座屈荷重低減係数 α_0 (λ_{cr}^{el} に対する λ_{cr}^{el-pl} の低減率)の初期不整敏感性を調査するため、0.1%以上の不整量も検討する。

5.1 線形座屈モードと座屈荷重係数

図 17 に 1 次線形座屈モードと座屈パターン(+が山, -が谷)を示す。対象とする最適屋根形状は前節までに探索された屋根形状から様々な屋根形状の例として選択した。線形座屈モードは、平面を循環する逆対称一波モード系のパターン A, 一方向の逆対称一波モード系のパターン B, 平面中央から全方向に広がる逆対称半波モード系のパターン C に大別され、局部的隆起を有する場合(図 17(a)(b)(c)(e))やライズが 10 m 以下の扁平形状の場合(図

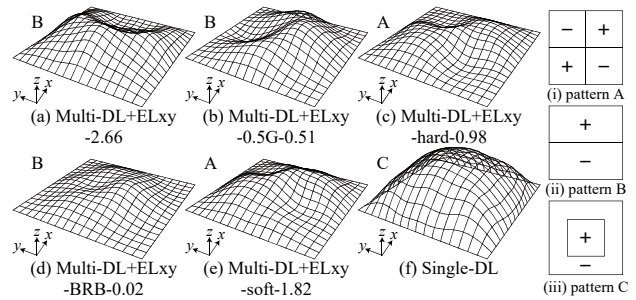


図 17 1 次線形座屈モード

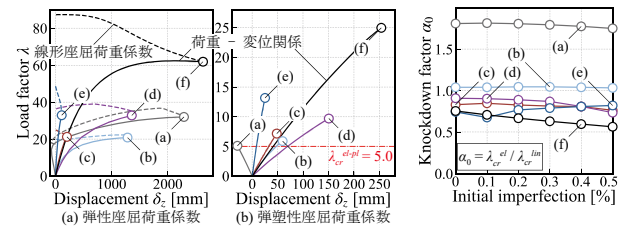


図 18 釣り合い曲線

図 19 弾性座屈荷重低減係数 α_0

17(d))にパターン A またはパターン B, ライズが約 10 m 以上の屋根全体が膨らむ形状の場合(図 17(f), Single-DL)にパターン C に分岐する。図 18 に屋根中央部の鉛直変位-荷重係数関係を示す。図中の点線は弾性座屈解析の各ステップの固有値に荷重係数を乗じた線形座屈荷重係数 λ_{cr}^{lin} を示しており、点線と実線が交差する点が弾性座屈荷重係数 λ_{cr}^{el} を意味する。 λ_{cr}^{lin} は、ライズが高く固定荷重に対する総歪エネルギー U_{DL} が小さいほど概ね大きくなり、 U_{DL} 最小の Single-DL で最大となる傾向にある。また、弾塑性座屈荷重係数 λ_{cr}^{el-pl} (座屈安全率)は、本検討の範囲では最低 5.0 以上確保できる。図 19 に初期不整量-弾性座屈荷重低減係数 α_0 関係を示す。 α_0 は、スパンの 0.5%の初期不整量まで約 0.6~0.9 であり、指針⁶⁾の推奨下限値 0.5 を上回る。一方、鞍部を有する最適屋根形状(図 17(a))では鞍型 HP シェルの場合と同様に引張軸力を受ける部材の存在により λ_{cr}^{el-pl} が λ_{cr}^{lin} を上回り、 α_0 が 1.0 を超える。

図 21 に各座屈荷重係数 λ_{cr} と固定荷重に対する総歪エネルギー U_{DL} の関係を示す。 U_{DL} が小さい程 λ_{cr} は上昇するため総歪エネルギー最小化を目的関数にすることは座屈性能を高めることにつながる。一方、相関関係は存在するが U_{DL} 最小形状と λ_{cr} 最大形状は完全には一致しない。

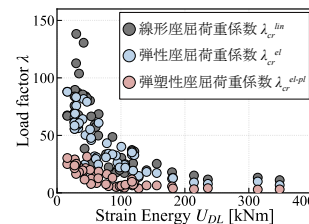


図 21 λ - U_{DL} 関係

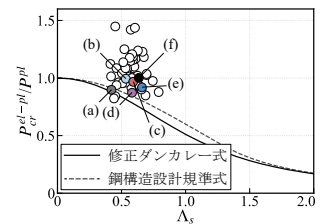


図 22 P_{cr}^{el-pl} の評価

5.2 弾塑性座屈荷重の簡易評価法の適用性

弾塑性座屈荷重の簡易評価法の適用性を検証する。指針⁶⁾では、弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} と幾何学的線形・材料非線形の静的増分解析の降伏荷重 P^{pl} から正規化細長比 Λ_S を計算し、長柱の曲げ座屈荷重と同様な手続きで弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{el-pl} を求める簡易評価法が提案されている。また、そのカラムカーブには修正ダンカレー式(6)や鋼構造許容応力度設計規準⁸⁾に準ずる式(7)が提案されている。

$$P_{cr}^{el-pl} = \frac{2P^{pl}}{\sqrt{k_{SB}^2 \Lambda_S^4 + 4 + k_{SB} \Lambda_S^2}} \quad (6)$$

$$\therefore \Lambda_S = \sqrt{\frac{P^{pl}}{P_{cr}^{el}}}$$

$$\frac{P_{cr}^{el-pl}}{P^{pl}} = \begin{cases} \frac{1 - 0.24\Lambda_S^2}{1 + \frac{4}{15}\Lambda_S^2} \text{ for } \Lambda_S \leq \frac{1}{\sqrt{0.6}} \\ \frac{9}{13\Lambda_S^2} \text{ for } \Lambda_S \geq \frac{1}{\sqrt{0.6}} \end{cases} \quad (7)$$

ここに k_{SB} は弾性座屈の部分安全率(=13/9)である。

図 22 に弾塑性座屈荷重の解析結果と評価式の比較を示す。同図には、前章までに確認した最適屋根形状を白色マーカーで示している。修正ダンカレー式では解析結果を概ね安全側に評価する。

以上より、提案手法を用いて探索した自由形状グリッドシェル座屈荷重は、各種座屈解析により弾性座屈荷重低減係数や修正ダンカレー式を用いて十分安全側に簡易評価できることが確認された。

6 結

本研究の範囲で得られた結論は以下の通りである。

- 1) 固定荷重と地震荷重に対する総歪エネルギーを最小化する最適屋根形状間にはトレードオフ関係があり、単目的最適屋根形状は、パレート解端部を構成する。
- 2) パレート解は、固定荷重に効果的な時は屋根全体が膨らみ、地震荷重に効果的な時は局部的隆起を有する扁平形状となる。ただし、支持架構剛性や支持架構による地震エネルギーの吸収の有無に依存して変動する。
- 3) パレート解の応答値は総歪エネルギー比 U_0 で整理でき、設計クライテリアと組合せた設計案選択の指標になる。支持架構剛性が変動しない場合、各種の地震荷重レベルに対するパレート解はある地震荷重レベルに対するパレート解と U_0 から類推可能と考えられる。
- 4) 支持架構の地震エネルギー吸収がある場合、減衰効果

と長周期化によって地震荷重に対する総歪エネルギー U_{ELy} は激減する。従ってパレート解には固定荷重に効果的な形状が多く含まれる。一方、地震応答は低減されるためパレート解近傍にある意匠上望ましい屋根形状も設計案として十分実現可能と考えられる。

- 5) 自由曲面を有するグリッドシェルのパレート解の弾性座屈荷重低減係数は、スパンの 0.5% の初期不整量まで約 0.6~0.9 であり、推奨下限値 0.5 を上回る。また、弾塑性座屈荷重は、修正ダンカレー式を用いて安全側に評価することができる。

参考文献

- 1) Y. Terazawa, A. Niimi, D. Nair, T. Takeuchi : Generalized response spectrum analysis based computational morphogenesis for metal gridshells with buckling-restrained braces subjected to seismic loading, Computers and Structures, No.275, 106914, 2023.1
- 2) Y. Terazawa, T. Takeuchi : Generalized Response Spectrum Analysis for Structures with Dampers, Earthquake Spectra, EERI, 2018.5
- 3) Y. Terazawa, R. Kaneko, A. Niimi, T. Takeuchi : Form-finding of metal gridshells focusing on the tradeoff relationship between total strain energy for dead load and seismic load, Journal of Structural and Construction Engineering, Vol.89, No.823, pp.967-978, 2024.9
- 4) Y. Terazawa, T. Takeuchi : Optimal damper design strategy for braced structures based on generalized response spectrum analysis, Japan Architectural Review, Vol.2, No.4, pp.477-493, 2019.10
- 5) C. A. C. Carlos, G. T. Pulido, M. S. Lechuga : Handling multiple objectives with particle swarm optimization, IEEE Transaction on Evolutionary Computation, Vol.8, No.3, pp.256-279, 2004.6
- 6) 日本建築学会 : ラチスシェル屋根構造設計指針, 2016.11
- 7) T. Takeuchi, K. Okada, Y. Terazawa : Seismic response evaluation of freeform lattice shell roofs with supporting substructures, Journal of Structural and Construction Engineering, Vol.81, No.727, pp.1467-1477, 2016.9
- 8) 日本建築学会 : 鋼構造許容応力度設計基準, 2019.10

線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的として 2段階で形状最適化された単層ラチスシェルの信頼性解析

茂田 暁¹⁾, 柳 杏美²⁾, 小野倫太郎³⁾, 熊谷知彦⁴⁾, 加藤史郎⁵⁾

1) 明治大学大学院 大学院生

2) 元明治大学 学部生

3) 株式会社 銭高組, 修士(工学) (元明治大学大学院 大学院生)

4) 明治大学 理工学部 建築学科, 教授・博士(工学)

5) 豊橋技術科学大学, 名誉教授・工学博士

1 序

空間構造物は、力学的構造が建築形態に表れ、形状と力学的合理性が密接に関係する。力学的に根拠を持った形状を有する空間構造物は、本来持つべき機能である構造安定性を獲得し、かつ意匠的な要求を実現可能であることから、最適化手法を用いた形状決定の研究が数多くなされている¹⁾³⁾⁷⁾。しかしながら、同一の初期形状の構造物に形状最適化を行った場合にも、用いる目的関数によって得られる最適形状は異なる¹⁾。力学的指標を目的関数とした形状最適化は、力学的合理性を持つ建物の実現に貢献してきた。例えば、ひずみエネルギーの最小化は剛性の向上に、線形座屈荷重の最大化は座屈による不安定現象に対する安全性の向上に繋がる。このことから既往の研究では、力学的指標を目的関数とした様々な手法を用いた最適形状が求められている¹⁾⁴⁾。

一方、力学的な視点から形状最適化を行った場合、部材長にばらつきが発生し、施工性の悪化が予想される²⁾。部材長一様化を目的関数として部材長の種類を減らすことで、接合部の取り合い種類や網目形状をパターン化でき、コスト削減につながる³⁾。

一方で、空間構造物では、荷重を受けた際の座屈に対する検討が重要となる。欧米では、信頼性理論に基づく限界状態設計法が定着しつつある⁵⁾。信頼性設計を導入することにより、設計者は与えられた基準に基づき設計するのではなく、設計者自身やクライアントが設定する安全性を基準にして、よりフレキシブルに構造物の設計を行うことが可能になる⁶⁾。

日本でも、空間構造物を対象とする信頼性設計に関する研究が行われている⁷⁾。形状最適化された空間構造物の信頼性設計に関する研究として、熊谷らによる単層ラチスシェルの最適形状を対象として座屈に対する信頼性解析を行なった研究⁸⁾がある。しかし、その数は少なく、

また、対象構造物が変わると、信頼性設計において重要な信頼性指標も変わると考えられるため、種々の形状の構造物を対象とする研究の蓄積が重要である。

そこで本研究では、数理計画法である逐次二次計画法を用いて単層ラチスシェルを対象とした形状最適化を行い、求められた最適形状を対象とした信頼性解析により信頼性指標 β と荷重係数 γ の関係を明らかにすることを目的とする。形状最適化は2段階に分けて行う。1段階目では線形座屈荷重係数最大化を、2段階目では1段階目で得られた最適形状を初期形状として、部材長一様化のため、格子部材の最大値と最小値の差の最小化を目的とした最適化を行う。最適化を行う際のプログラムは、最適化アルゴリズムをPythonにより記述し、Fortran77/90で記述された既存の静的弾塑性座屈解析プログラムをF2PYによりPythonで呼び出す構成とする。最適化計算にはSciPy⁹⁾に含まれる逐次二次計画法のソルバーSLSQPを用いる。その結果得られた最適形状を対象に、破壊モードの生起確率を算定するための最も有力な方法の一つであるAFOSM法(Advanced First-Order Second-Moment method)⁹⁾を用いて、等分布雪荷重を受ける際の β と γ の関係を求める。

2 部材長一様化に関する形状最適化

2.1 最適化問題の定式化

線形座屈荷重係数 μ_r は、以下のように求める。基準荷重ベクトル P_0 を定め、荷重係数 μ をパラメータとして、載荷荷重 μP_0 を作用させる。線形剛性行列、幾何剛性行列をそれぞれ K_L, K_G とおくと、 r 次座屈モード Φ_r とこれに対応する μ_r は、式(1)に示す固有値問題の解である。

$$(K_L + \mu_r K_G)\Phi_r = 0 \quad (1)$$

線形座屈荷重は、 μ^* を μ_r の正の最小値(1次線形座屈荷重係数)とすると $\mu^* P_0$ と定義される。

2.2 対象とする単層ラチスシェルの概要

図1に初期形状を、表1に部材諸元を示す。対象とするモデルは、境界においてアーチ形状であるA-modelとする。また、x,y方向に配置される部材を格子材、斜め45度方向に配置される部材を斜材とし、これら2種類の部材でラチスシェルを構成する。境界条件は全周ピン支持とし、荷重条件は図2に示す節点の支配面積変化を考慮した分布とする。基準荷重は式(2)に示すように、1節点の支配面積 A_{node} と単位面積あたりの重量 p_{d0} ($=1.18\text{kN/m}^2$)の積として求める。

$$P_0 = A_{node} \cdot p_{d0} \quad (2)$$

また、初期形状における線形座屈荷重係数 μ^c 、格子部材長の最大値と最小値の差 $L_{max}^{lat} - L_{min}^{lat}$ 、斜材部材長の最大値と最小値の差 $L_{max}^{dia} - L_{min}^{dia}$ 、ライズ h_{int} を図1中に示す。

2.3 単層ラチスシェル曲面の記述法

曲面の記述法として、 $n \times m$ 次テンソル積ベジエ曲面（以下、ベジエ曲面）を用いる。曲面形状を定義する実空間座標内の制御点ベクトルを $R'_{\alpha,\beta}$ とし、 u, v ($0 \leq u, v \leq 1$)をパラメータとすると、ベジエ曲面 $X(u, v)$ は、バーンスタイン基底関数 B_α^n および B_β^m ($\alpha=1 \dots n, \beta=1 \dots m$)を用いて式(3)で表され、パラメータ値 (u, v) により定められる。

$$X(u, v) = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^m R'_{\alpha,\beta} B_\alpha^n(u) B_\beta^m(v) \quad (3)$$

ここに、式(3)における次数 n, m を $n=m=5$ とする。また、

$R'_{\alpha,\beta}$ はアフィン変換行列 T と正規化された空間内の制御点ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ により、式(4)のように定義される。

$$R'_{\alpha,\beta} = TR_{\alpha,\beta} \quad (4)$$

なお、最適化問題において、制御点ベクトルを設計変数とする場合には $R_{\alpha,\beta}$ を用い、アフィン変換行列 T は、最適化過程において固定する。

形状最適化は、9つの制御点の座標ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ (dx, dy, dz)を設計変数として行う。図3に制御点ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ の自由度を示す。制御点の自由度は、12または20とする。モデル命名規則を図4に示す。

図5にベジエ曲面におけるパラメータ u, v の設定方法を示す。 u, v は u_{ij}, v_{ij} ($i, j=1 \dots 6$)と表し、ラチスシェルの平面に対応するパラメータ空間に等分割して配置する。曲面は $u=0.5, v=0.5$ において対称とし、 $u_{ij}=v_{ij}$ の制約条件を与える。

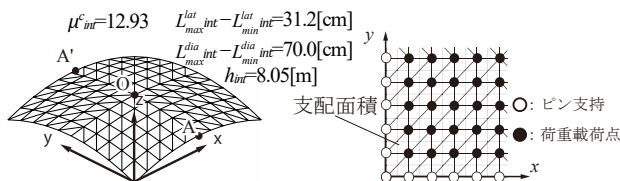


図1 初期形状鳥瞰図

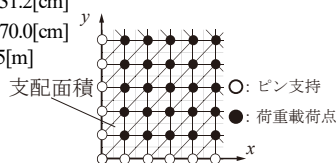


図2 節点の支配面積

表1 部材諸元

モデル	部材細長比		外径 ϕ [cm]	厚さ t [cm]	断面積 A [cm ²]	断面二次 モーメント I [cm ⁴]	断面二次 半径 i [cm]	ヤング係数 E [N/mm ²]	降伏応力度 σ_y [N/mm ²]
	格子材 λ_x	斜材 λ_s							
A-model	45.5-48.3	64.3-70.1	31.85	0.69	67.5	8200	11.0	206000	300

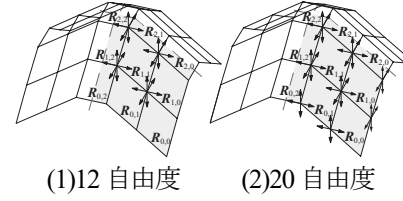


図3 制御点ベクトルの自由度

A 12

制御点ベクトルの自由度

12 : 12 自由度

20 : 20 自由度

図4 モデル名

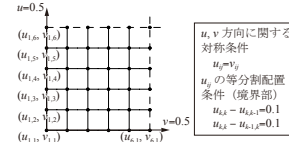


図5 節点位置を決めるパラメータ u, v

2.4 形状最適化問題

本研究では、1次線形座屈荷重係数を最大化、または、部材長一様化する形状最適化を行う。

2.4.1 座屈荷重係数最小化 (P-1)

後述するP-2において線形座屈荷重に対する制約を設けるために、まず前節で定義した線形座屈荷重係数を目的関数とした最適化問題P-1を実行する。制約条件は制御点ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ の上限値 $R_{\alpha,\beta}^{max}$ 、下限値 $R_{\alpha,\beta}^{min}$ とする。設計変数は、制御点ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ とする。

P-1	Maximize : μ^c	(5)
	Subject to : $R_{\alpha,\beta}^{min} \leq R_{\alpha,\beta} \leq R_{\alpha,\beta}^{max}$	(6)
	Design variables : $R_{\alpha,\beta}$	(7)

2-4-2. 線形座屈荷重を制約条件とした部材長一様化 (P-2)

部材長一様化のために格子部材の最大値と最小値の差 $L_{max}^{lat} - L_{min}^{lat}$ の最小化を目的とした最適化問題を以下に示す。制約条件はP-1と同様の制御点ベクトル、および1段階目の最適化により得られた座屈荷重係数 $\mu^c_{opt(P-1)}$ の一定の割合以上の保持とする。設計変数は、制御点ベクトル $R_{\alpha,\beta}$ とする。

P-2	Minimize : $L_{max}^{lat, P-2} - L_{min}^{lat, P-2}$	(8)
	Subject to : $s\mu^c_{opt(P-1)} \leq \mu^c$	(9)
	$R_{\alpha,\beta}^{min} \leq R_{\alpha,\beta} \leq R_{\alpha,\beta}^{max}$	(10)
	Design variables : $R_{\alpha,\beta}$	(11)

ここに、 s は任意の実数である。

2.5 最適化プログラム

前節で示した最適化問題に対し、本研究では、FortranとPythonを接続した最適化プログラムを使用して形状最適化を行う。接続には、Pythonの科学技術計算ライブラリNumpy¹⁰)に同梱されているモジュールF2PYを用いる。Fortranで記述された副プログラムをF2PYによりコンパ

イルし、Pythonでの実行ファイルを作成し、それら呼び出し実行する。また、最適化計算には、Pythonの科学技術計算ライブラリScipy⁸⁾に同梱されている、逐次二次計画法のソルバーであるSLSQPを用いる。

2.6 最適化結果

最適化問題P-1では、 dvz_{max} は3.0、 dvz_{min} は初期値 $\times 0.9$ とする。最適化問題P-2では、 dvz_{max} は3.0、 dvz_{min} はP-1を初期形状としたときの初期値 $\times 0.8$ 、 0.7 とする。また s の値は、 0.9 、 0.8 とする。最適化問題P-1、P-2の最適化結果を表2に、P-1、P-2における最適形状をそれぞれ図6、図7に示す。また、図にはモデルの固定荷重下における応力分布図を示す。軸力分布図における赤色は圧縮材、青色は引張材を表す。各図表中の①-④は、制御点ベクトルの自由度、下限値、 s の以下の組み合わせを示す。

- ①: 12自由度, $dvz_{min} \times 0.7, 0.9$, ②: 12自由度, $dvz_{min} \times 0.8, 0.8$,
- ③: 20自由度, $dvz_{min} \times 0.7, 0.8$, ④: 20自由度, $dvz_{min} \times 0.8, 0.8$

表2 P-1およびP-2の最適化結果

モデル 最適化問題	A12			A20		
	P-1	①	②	P-1	③	④
dvz_{min} (初期値 \times)	0.9	0.7	0.8	0.9	0.7	0.8
s		0.9	0.8		0.8	0.8
μ^c	90.99	82.68	72.79	92.81	75.24	77.08
L_{max}^{lat} [cm]	644.8	607.3	578.8	603.5	558.9	561.5
L_{min}^{lat} [cm]	500.4	500.4	500.4	492.4	550.2	558.8
L_{max}^{dia} [cm]	887.9	857.9	802.5	906.6	920.7	956.1
L_{min}^{dia} [cm]	765.5	771.9	770.3	798.1	785.4	796.4
$L_{max}^{lat} - L_{min}^{lat}$ [cm]	144.4	106.9	75.4	111.3	8.4	2.7
$L_{max}^{dia} - L_{min}^{dia}$ [cm]	122.4	86.0	32.3	108.5	135.3	159.7
L^{lat} グループ数	28	28	28	25	10	4
L^{dia} グループ数	14	14	12	13	15	15
h [m]	20.33	19.13	16.75	21.72	20.79	21.72

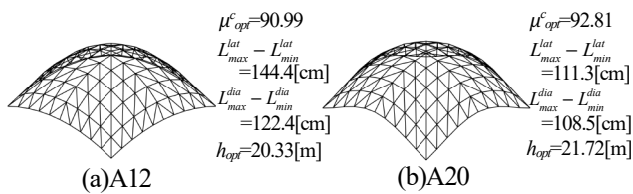
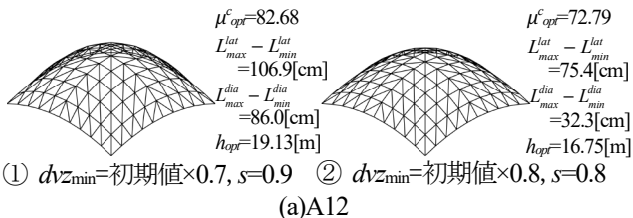
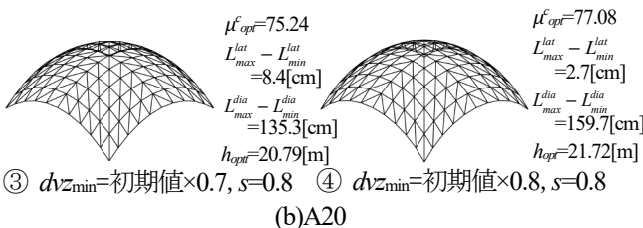


図6 最適形状(P-1)



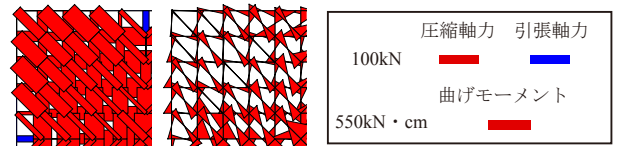
① dvz_{min} =初期値 $\times 0.7, s=0.9$ ② dvz_{min} =初期値 $\times 0.8, s=0.8$



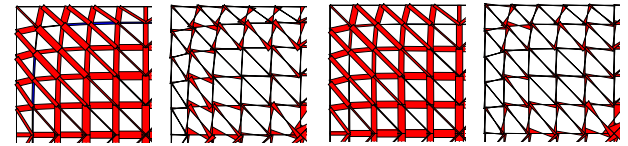
③ dvz_{min} =初期値 $\times 0.7, s=0.8$ ④ dvz_{min} =初期値 $\times 0.8, s=0.8$

図7 最適形状(P-2)

左: 軸力分布 右: モーメント分布

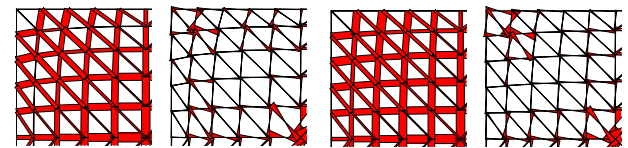


(a) 初期形状

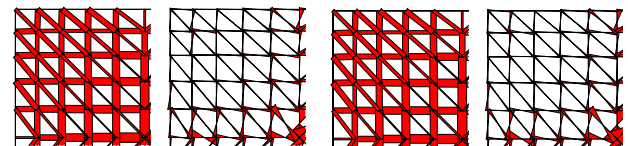


(1) A12 (2) A20

(b) 最適化問題 P-1



① A12, dvz_{min} =初期値 $\times 0.7, s=0.9$ ② A12, dvz_{min} =初期値 $\times 0.8, s=0.8$



③ A20, dvz_{min} =初期値 $\times 0.7, s=0.8$ ④ A20, dvz_{min} =初期値 $\times 0.8, s=0.8$

(c) 最適化問題 P-2

図8 初期形状、最適形状の固定荷重下における応力図

A12 モデルでは、①の場合、格子材の部材長差が 144.4cm から 106.9cm に約 26%減少しており、目的関数としていない斜材の部材長差においても、122.4cm から 86.0cm に約 30%減少している。また、②の場合、格子材の部材長差は 144.4cm から 75.4cm に約 48%減少しており、斜材の部材長差は 122.4cm から 32.3cm に約 74%減少している。一方、A20 モデルでは、③の場合、格子材の部材長差は 111.3cm から 8.4cm に約 92%減少しているが、斜材の部材長差は 108.5cm から 135.3cm に約 25%増加している。また、④の場合、格子材の部材長差は 111.3cm から 2.7cm に約 98%減少しており、斜材の部材長差は 108.5cm から 159.7cm に約 47%増加している。以上より、制御点ベクトルが 20 自由度の場合は、12 自由度の場合より格子部材の部材長差を最小化できるが、斜材の部材細長比は大きくなる。また、表 2 中に示す部材長について、部材長の差の許容誤差を 0.6cm とした場合を同一グループとみなしてグループ分けした際の、各最適化結果のグループ数について検討する。A12 モデルでは、P-1 での最適形状と P-2 での最適形状におけるグループ数は、②の斜材のみで変化し、14 種類から 12 種類に減少する。一方、A20 モデルでは、格子材において 25 種類から③の場

合 10 種類に、④の場合 4 種類まで減少するが、斜材では③、④共に 13 種類から 15 種類に増加する。また、線形座屈荷重係数 μ^e は初期形状に対して P-1 では A12 で 7.04 倍、A20 で 7.18 倍となり、P-2 では A12 の①で 6.39 倍、②で 5.63 倍、A20 の③で 5.82 倍、④で 5.96 倍となり、全ケースで式(9)の制約を満たす範囲において P-1 に比較して小さくなっている。最適形状を見ると、全体形状の概形は A12、A20 共に似ているが、図 6(b)、図 7(b)に示すように、制御点ベクトルの自由度を大きくすることで初期形状から変化の大きい形状を得ることができている。また、最適形状の応力分布は初期形状に比べて曲げモーメントが小さくなり、軸力場となっている。

3 信頼性解析

3.1 荷重の算定

信頼性解析において対象とする荷重は、固定荷重および雪荷重とする。雪荷重は、100年再現期間に対して積雪深 $h_{s(n)}=0.5\text{m}$ と仮定し、単位積雪重量 ρ_s 、公称積雪荷重 $S_{(n)}$ は次式¹¹⁾より算定する。

$$\rho_s = 0.72 \sqrt{h_{s(n)} / h_{ref}} + 2.32 \quad (12) \quad S_{(n)} = \rho_s \cdot h_{s(n)} \quad (13)$$

ここに、 h_{ref} は基準積雪深であり、1m である。下添字の「(n)」は公称値を表す。

積雪荷重係数 γ_s 、単一荷重係数 γ_n ¹²⁾ については次式を用いて算定する。

$$\gamma_s = \frac{p_{v0(n)} - \gamma_d \cdot p_{d0(n)}}{\rho_s h_{s(n)}} \quad (14)$$

$$\gamma_n = \frac{\gamma_d \cdot p_{d0(n)} + \gamma_s \cdot \rho_s h_{s(n)}}{p_{d0(n)} + \rho_s h_{s(n)}} \quad (15)$$

ここに、 $p_{v0(n)}$ は単位面積当たりの終局用設計荷重、 γ_d は固定荷重に関する荷重係数 (=1.1) であり、 $p_{d0(n)}$ は固定荷重である。

p_{v0} は降伏荷重 $\sigma_y=235\text{N/mm}^2$ を想定して設計するときに必要な耐力とし、式(16)より算定する。その際に用いる $\alpha_{cr(FEM)}$ は式(17)より求める。

$$p_{v0} = (\alpha_{cr(FEM)} \cdot P_{cr(c)}) / A_{node} \quad (16) \quad \alpha_{cr(FEM)} = \frac{P_{cr(FEM)(235)}}{P_{cr(FEM)(300)}} \quad (17)$$

ここに、 $P_{cr(c)}$ は耐力の平均値、 A_{node} は 1 節点の支配面積である。また、下付き () 内の数値は、降伏応力度を表す。

3.2 座屈耐力の算定

3.2.1 弾塑性座屈荷重 P_{cr} の算定

信頼性解析では、確率変数の変動性を考慮するために、

確率変数を関数の変数として含む座屈荷重算定式が必要となる。そこで、弾塑性座屈荷重 P_{cr} を次式の修正ダンカレー式により設定する。

$$P_{cr} = \omega \cdot \frac{2}{\sqrt{\Lambda_s^4 + 4 + \Lambda_s^2}} \cdot P_{SQ} \quad (18)$$

ここに、 ω は座屈荷重比、 P_{SQ} は降伏荷重、 Λ_s は次式により算定する正規化細長比である。

$$\Lambda_s = \sqrt{P_{SQ} / P_{cr}^{el}} \quad (19)$$

P_{cr} の算定式で用いる座屈荷重比 ω 、降伏荷重 P_{SQ} 、弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{el} の算定式は、次項以降で順次誘導する。

3.2.2 座屈荷重比 ω の算定

式(18)は近似式であるため、座屈荷重比 ω を算定し、これを信頼性解析に用いる。最初に正解値として扱う弾塑性座屈荷重 $P_{cr(FEM)}$ を幾何学的非線形性を考慮した弾塑性座屈解析により求める。また、同様に降伏荷重 $P_{SQ(FEM)}$ および弾塑性座屈荷重 $P_{cr(FEM)}^{el}$ を求める。 $P_{SQ(FEM)}$ 、 $P_{cr(FEM)}^{el}$ を用いて次式より正規化細長比 $\Lambda_{s(FEM)}$ を求める。

$$\Lambda_{s(FEM)} = \sqrt{P_{SQ(FEM)} / P_{cr(FEM)}^{el}} \quad (20)$$

降伏荷重 $P_{SQ(FEM)}$ および式(20)により求められた $\Lambda_{s(FEM)}$ を用いて式(21)に示す修正ダンカレー式により弾塑性座屈荷重 $P_{cr(D)}$ を算定する。

$$P_{cr(D)} = \frac{2}{\sqrt{\Lambda_{s(FEM)}^4 + 4 + \Lambda_{s(FEM)}^2}} \cdot P_{SQ(FEM)} \quad (21)$$

座屈荷重比 ω は、式(21)により求められた弾塑性座屈荷重 $P_{cr(D)}$ に対する $P_{cr(FEM)}$ の比であり、次式により算定する。

$$\omega = P_{cr(FEM)} / P_{cr(D)} \quad (22)$$

3.2.3 降伏荷重 P_{SQ} の定式化

P_{SQ} は式(23)のように降伏応力度 σ_y と部材断面積 A の関数として仮定する。

$$P_{SQ} = P_{SQ} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y(n)}}, \frac{A}{A_0} \right) \quad (23)$$

ここに、 A_0 は設計値、 A は設計値に対応する確率的性質を持つ実数値である。

全てのパラメータにおいて設計値と実数値の差が小さい場合には、式(23)を次式のように展開する。

$$P_{SQ} = P_{SQ(n)} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{y(n)}} \cdot g \quad (24) \quad g = 1 + q \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \quad (25)$$

ここに、 $P_{SQ(n)}$ は降伏荷重の公称値、 g はパラメータによる影響係数であり、係数 q は、次式により微小量 ΔA に対す

る変化量として求まる。

$$q = \frac{1}{P_{SQ(n)}} \left\{ P_{SQ} \left(1, \frac{A_0 + \Delta A}{A_0} \right) - P_{SQ(n)} \right\} \cdot \frac{A_0}{\Delta A} \quad (26)$$

3.2.4 線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} の定式化

P_{cr}^{el} の算定に用いる P_{cr}^{lin} は式(27)のようにヤング係数 E_s , 部材断面積 A , 部材細長比 λ の関数として仮定する。

$$P_{cr}^{lin} = P_{cr}^{lin} \left(\frac{E_s}{E_{s(n)}}, \frac{A}{A_0}, \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \quad (27)$$

ここに, λ_0 は設計値である。

式(23)と同様に式(27)は式(28), (29)のように展開される。

$$P_{cr}^{lin} = P_{cr(n)}^{lin} \cdot \frac{E_s}{E_{s(n)}} \cdot f \quad (28) \quad f = \frac{1 + a \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right)}{1 + b \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right)} \quad (29)$$

ここに, f はパラメータによる影響係数, 係数 a, b は1次摂動の解である。係数 a, b は次式によって線形座屈解析により決定する。

$$a = \frac{1}{P_{cr(n)}^{lin}} \left\{ P_{cr(n)}^{lin} \left(1, \frac{A_0 + \Delta A}{A_0}, 1 \right) - P_{cr(n)}^{lin} \right\} \cdot \frac{A_0}{\Delta A} \quad (30)$$

ここに, $\Delta A, \Delta \lambda$ は, A, λ と比較して微小な変化量である。

$$b = \left\{ \frac{P_{cr(n)}^{lin}}{P_{cr}^{lin} \left(1, 1, \frac{\lambda_0 + \Delta \lambda}{\lambda_0} \right)} - 1 \right\} \cdot \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda} \quad (31)$$

3.2.5 弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} の算定

弾性座屈荷重は, 式(27)により求まる線形座屈荷重および弾性座屈荷重低減係数 α_0 を用いて次式により算定する。

$$P_{cr}^{el} = \alpha_0 P_{cr}^{lin} \quad (32)$$

本研究では形状初期不整を考慮しないため, 弾性座屈荷重低減係数 α_0 を $\alpha_{noimp(FEM)}$ と見なし, 式(33)により求める。

$$\alpha_{noimp(FEM)} = P_{cr}^{el(FEM)} / P_{cr}^{lin(FEM)} \quad (33)$$

表3に各モデルにおける $\alpha_{noimp(FEM)}$, ω を示す。

3.3 信頼性解析手法の概要

破壊確率 P_{fl} の計算には, 次の性能関数 Z を用いる。

$$Z = P_{cr} - \left(P_0 + A_{node} \cdot \rho_s h_{s(n)} \right) \quad (34)$$

ここに, P_{cr} は式(18)により求まる弾塑性座屈荷重であり, P_0 は1節点あたりの固定荷重 (基準荷重) である。

AFOSM 法 (Advanced First-Order Second-Moment method)¹¹⁾ によって, 次式により信頼性指標 β が式(35)のように得られ, 破壊確率 P_{fl} は式(36)で計算される。

$$\beta = \mu_Z / \sigma_Z \quad (35) \quad P_{fl} = 1 - \Phi \left(\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \right) \quad (36)$$

ここに, μ_Z, σ_Z は, それぞれ $Z=0$ を満たす設計点における性能関数 Z_{fl} の平均値, 標準偏差, Φ は標準正規確率分布関数である。

信頼性解析に用いる確率変数の平均値, 変動係数, 公称値, 確率分布を表4に示す。また, 係数 a, b, q については表5に示す。ただし, 全ての確率変数に関して, 平均値は公称値と等しいと仮定する。確率変数の確率分布は対数正規分布とする。変動係数は文献^{2), 13)}に従って仮定する。また, 積雪深 h_s の変動係数は, 0.2, 0.4, 0.6 とする。ただし, これらの確率変数は互いに独立であるとする。

3.4 信頼性解析結果

表6に各モデルにおける固有の信頼性指標 β を, 図1に単一荷重係数 γ_n と信頼性指標 β の関係を, 図10に積雪荷重係数 γ_s と破壊確率の関係を示す。 h_s の変動係数が小さいほど同一の β を満たすための γ_n, γ_s は小さく, 大きいほど曲線の勾配が大きく目標とする β によって必要となる γ_n の差は大きくなる。一方, モデルによらず β の変動は小さい。また,

表3 低減係数 $\alpha_{noimp(FEM)}$ および座屈荷重比 ω

最適化問題	モデル	$\frac{dv_z}{(初期値 \times)}$	s	$\alpha_{noimp(FEM)}$	ω	
P-1	A12	0.9		0.7824	1.5727	
	A20	0.9		0.7831	1.7678	
P-2	A12	①	0.7	0.9	0.8634	1.6896
		②	0.8	0.8	0.6737	1.8292
	A20	③	0.7	0.8	0.7567	1.8424
		④	0.8	0.8	0.8175	1.7955

表4 信頼性解析に用いる確率変数の詳細

確率変数	平均値	変動係数	公称値	確率分布
σ_c (N/mm ²)	300	0.081	300	対数正規分布
λ/λ_0	1.00	0.04	1.00	
A/A_0	1.00	0.03	1.00	
a	表5	表5	表5	
b	表5	表5	表5	
q	表5	表5	表5	
E (N/mm ²)	206000	0.087	206000	
ω	表3	0.001	表3	
h_s (m)	0.5	0.2, 0.4, 0.6	0.5	

表5 信頼性解析に用いる係数の詳細

最適化問題	モデル	$\frac{dv_z}{(初期値 \times)}$	s	a		b		q		
				平均値	変動係数	平均値	変動係数	平均値	変動係数	
P-1	A12	0.9		2.948	0.018	2.972	0.041	0.770	0.374	
	A20	0.9		2.880	0.008	2.911	0.033	0.784	0.423	
P-2	A12	①	0.7	0.9	2.769	0.045	2.796	0.046	0.795	0.164
		②	0.8	0.8	2.371	0.019	2.388	0.042	0.860	0.390
	A20	③	0.7	0.8	2.240	0.021	2.292	0.078	0.810	0.589
		④	0.8	0.8	2.285	0.012	2.347	0.082	0.852	0.388

表6 各モデルにおける固有の信頼性指標 β

最適化問題	モデル	$\frac{dv_z}{(初期値 \times)}$	s	β (h_s の変動係数ごと)			
				0.2	0.4	0.6	
P-1	A12	0.9		-	6.94	5.02	
	A20	0.9		-	7.06	5.10	
P-2	A12	①	0.7	0.9	11.96	6.69	4.85
		②	0.8	0.8	-	6.76	4.90
	A20	③	0.7	0.8	-	6.73	4.87
		④	0.8	0.8	-	6.73	4.88

	A12	A20	h_s の変動係数と色分類
P-1	□	◇	
P-2	① □ $dh_{s_{max}} = \text{初期値} \times 0.7, s=0.9$	③ ◇ $dh_{s_{max}} = \text{初期値} \times 0.7, s=0.8$	0.6 0.4 0.2
	② □ $dh_{s_{max}} = \text{初期値} \times 0.8, s=0.8$	④ ◇ $dh_{s_{max}} = \text{初期値} \times 0.8, s=0.8$	

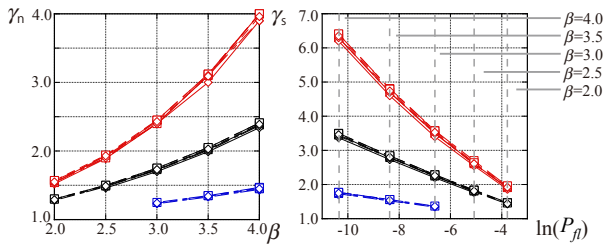


図9 単一荷重係数 γ_n と信頼性指標 β の関係

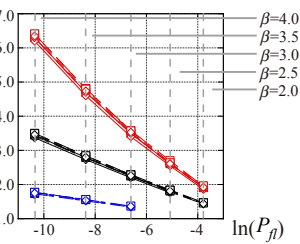


図10 積雪荷重係数 γ_s と破壊確率 P_f の関係

P-2 による最適形状の線形座屈荷重係数 μ^c は P-1 から20%程度減少するが、 β における減少率は約4%と小さい。

4 結

- 1) 1 段階目に線形座屈荷重係数 μ^c の最大化を目的とした形状最適化(P-1)を行い、2 段階目に μ^c を制約条件とし、最大部材長差を最小化する形状最適化(P-2)を行うことで、線形座屈荷重を考慮しながら、部材長差を最小化した最適形状が得られる。
- 2) 最適化問題 P-1 と P-2 による最適形状が有する信頼性指標 β を比較すると、P-2 による最適形状の μ^c は P-1 から20%程度減少するが、 β における減少率は約4%と小さい。

参考文献

- 1) 大内紫雲, 山本憲司: 曲げ歪エネルギーまたは線形座屈荷重について形状最適化されたラチスシェルの弾塑性座屈耐力, 構造工学論文集, Vol62B, pp.69-74, 2016.3
- 2) 小河利行, 大崎 純, 立石理恵: 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, 第570号, pp.129-136, 2003.8
- 3) 藤田慎之介, 大崎 純: パラメトリック曲面で定義されたラチスシェルの部材長一様化と剛性最大化を目的とした形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, 第685号, pp.495-502, 2013.3
- 4) 杉崎友哉, 臼井亮平, 熊谷知彦, 加藤史郎, 小河利行: 形状変化に伴う節点の支配面積変化を考慮して

形状最適化された単層ラチスシェルの信頼性解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸, B-1 分冊, pp.785-786, 2019.9

- 5) 森崎 啓, 久保田大祐, 白木 渡, 井面仁志: Multi State System を用いた構造物の信頼性評価法に関する研究, 材料, Vol.57, No.3, pp.277-284, 2008.3
- 6) 宇賀田健: 確率分布の歪み度を考慮した信頼性解析手法: 荷重係数および耐力係数の簡便な評価法, 日本建築学会構造系論文集, 第529号, pp.43-50, 2000.3
- 7) 加藤史郎, 岩元貴幸, 大屋貴徳: ラチスドームの座屈耐力に関する単一荷重係数と信頼性指標の関係の試算—荷重係数に対する積雪荷重と初期不整の大小の影響—, 日本建築学会構造系論文集, 第83巻, 第743号, pp.135-145, 2018.1
- 8) The SciPy community 「SciPy Documentation」: (<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference>)
- 9) 星谷 勝, 石井 清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 2007.2
- 10) NumPy「Numpy Documentation」: (<https://numpy.org/doc/>)
- 11) 日本建築学会: 建築物荷重指針・同解説 (2015), 2016.6
- 12) Shiro Kato, Toshimasa Yanagisawa, Shoji Nakazawa: Re-Consideration of Global Load Factor in Buckling Load Evaluation for Reticulated Spherical Domes Related to Reliability Index, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.56, No.3, pp.199-215, 2015.9

双安定四辺形境界モジュールを用いた変形する曲面の設計

田中一成¹⁾, 舘知宏²⁾

1) 東京大学工学系研究科建築学専攻, 修士課程, tanaka-issei@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2) 東京大学総合文化研究科広域科学専攻, 教授, 博士(工学), tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

折紙構造は、平坦な素材にヒンジを設けることで作られ平坦な状態と立体状態を行き来できることから、運搬性や保管性に優れるとともに、軽量で再利用可能などの利点から様々な分野での応用が期待されている。

展開可能な折紙構造には大きく二つの種類がある。ひとつは、剛体パネルがヒンジによって連結された展開構造である剛体折り構造である。これは、変形動作を剛体パネルとヒンジによって厳密にモデル化することができ、パネルが弾性変形しないため、変形動作にパネルの剛性を考慮する必要がない。そのため剛体折紙構造は、様々な分野への応用が期待されている。

一方、剛体折りが不可能な折り目パターンをもつ折紙構造ではパネルに弾性変形が発生することで多安定構造となる場合がある。クレスリングパターン[1]や折紙ハイパー[2]は2つの状態間を飛び移りする多安定構造として知られている。

剛体折り構造を用いて建築スケールの構造物を考える場合、ある任意の形状で固定するためには、展開後に新たな拘束を加える必要がある。一方、多安定折紙構造を用いれば、展開後に拘束を増やす必要がない展開構造を設計することができる。

多安定折紙構造の設計において Melancon ら[3]は展開動作の異なる折紙を結合することによって双安定構造の設計法を提案した。また Lee ら[4]、宮脇ら[5]は四辺形境界をもったリンク機構と折紙構造の展開動作のズレを用いて直線方向に変形する多安定折紙構造を設計した。これらの研究により、双安定モジュールをつなげてアーチなどの形状をもつ双安定構造を設計できるようになり、双安定構造の硬さの設計が可能となった。しかし、3次元自由曲面などより多様な三次元形状の設計方法については議論の余地がある。

本研究では、Lee らが用いた四辺形境界をもつ折紙構造のみを用いて、任意の四辺形形状間を飛び移る双安定折紙機構の設計を行う(図1)。また、双安定折紙構造を組み立てモジュールとして使用し、平面・柱面・ドーム

型・鞍型を目的形状とした曲面構造の設計を行う。

第2節では、ターゲットとして用いる四辺形境界の概念と、四辺形境界を作るための折紙モジュールとその展開動作の記述法について紹介する。第3節では、折紙モジュールを双安定構造にするための設計手法について。第4節では、双安定モジュールの探索時の設計変数及び目的関数とその設計例を示す。第5節では、曲面をターゲットとした組み立て方法について述べる。

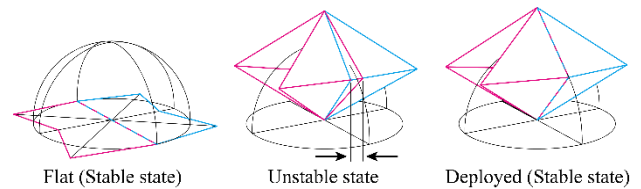


図1. 剛体折紙を組み合わせた双安定折紙機構

2 四辺形境界モジュール

2.1 四辺形境界

展開動作が異なる2つの剛体折紙を設計するにあたって、Lee らが用いた四辺形境界を展開動作の基準として使用する。この「四辺形境界」とは3次元空間上における、等長な4つの辺からなる、閉じたポリラインのことを言う(図2)。等長な4つの辺からなる四辺形境界は対角線の距離2つを決定すると形状が決定するため、2自由度で表すことができる。

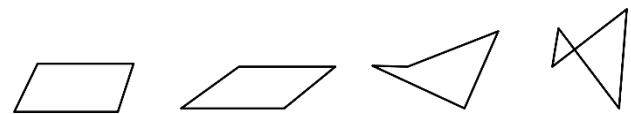


図2. 様々な形の四辺形境界

2.2 鏡面对称バイコニカルモジュール

鏡面对称バイコニカルモジュールとは、四辺形境界を埋める折紙構造を言う(図3)。鏡面对称バイコニカルモジュールはある鏡面上にポリラインと頂点を与えると、一意に定めることができる。図3のように鏡面上のn個の頂点 V_0, V_1, \dots, V_n を結ぶポリラインと点 O_1 を考える。このとき、点 $V_i (0 < i < n)$ と点 O_1 を結んでできる三角形 $V_i V_{i+1} O_1$ による $n-1$ 枚の三角形パネルを鏡面に対して反

転させできた構造を鏡面対称バイコンカルモジュールと呼ぶ。これは一自由度の剛体折りが可能な構造である。また、この時のポリライン $O_1V_0O_2V_n$ を四辺形境界モジュールの四辺形境界と呼ぶ。

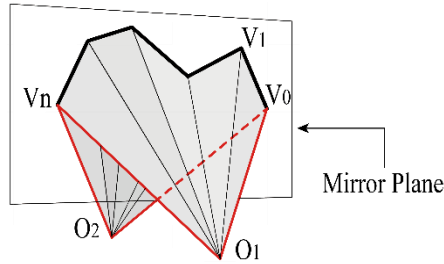
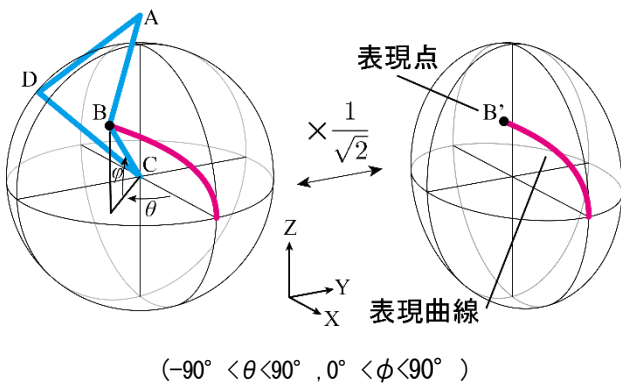


図3. 鏡面対称バイコンカルモジュール

2つの剛体折紙の展開動作の違いによって多安定性を設計するため、四辺形境界の展開動作を記述する必要がある。四辺形境界自体の自由度は2自由度であるのに対し、鏡面対称バイコンカルモジュールは1自由度の剛体折り構造であるため、四辺形境界の変形は二次元の座標空間における一次元のパスとして表すことができる。

四辺形境界の変形の例を図4に示す。このとき、図3の点 O_1, O_2 は点 A, C に対応する。点 C が常に原点に点 A が常に Z 軸上にあり、直線 BD が常に X 軸に平行のまま四辺形境界が展開変形する。このとき点 B, D は四辺形境界の一边と等長な半径をもつ球面上を移動する。ここで、等価なひずみエネルギーの値を求めるために全体を Y 軸方向に $1/\sqrt{2}$ 倍にし[4]、点 B を点 B' とする。このとき点 B' は四辺形境界の形を記述しており、これを表現点と呼ぶ。そして四辺形境界の展開動作中における表現点の軌跡を表現曲線と呼び、これを四辺形境界の変形動作の記述方法とする。



($-90^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ < \phi < 90^\circ$)
図4. 四辺形境界と表現曲線

3 双安定四辺形境界モジュール

3.1 双安定機構の設計

第2節で述べた表現曲線を用いて双安定構造の設計を

行う。2つの四辺形境界モジュールそれぞれの表現曲線が一致するとき全体が剛体折り可能な折紙構造となり、異なるとき剛体折り不可能になる。

剛体折り不可能な場合、パネルが弾性変形する必要がある、このときのひずみエネルギーが障壁となることで多安定構造となる場合がある。多安定構造になるためには、安定状態が2つ以上存在する必要がある。図5の2色の表現曲線と点 P_0, P_1 のように、結合される2つの鏡面対称バイコンカルモジュールの表現曲線が交わっている場合、その交点において2つの四辺形境界形状が一致しており、全てのパネルに弾性変形が生じていない。これを安定状態と呼ぶ。

図5の d_1 は、2つの安定状態間で表現曲線同士の距離を示す。 d_1 が大きくなるほど、パネルに生じる弾性変形は大きくなり、飛び移りに必要な外力が大きくなる。また、本論文ではヒンジの剛性を設計段階で考慮しない。

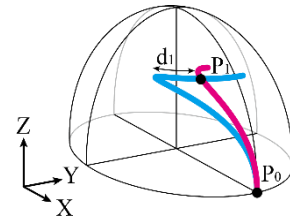
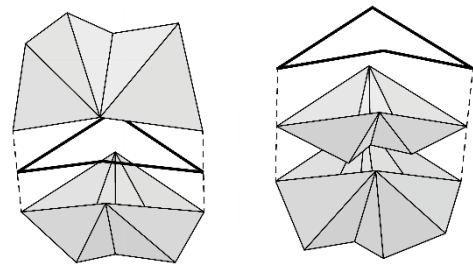


図5. 2つの表現曲線と2つの安定状態

3.2 双安定四辺形境界モジュール

四辺形境界に対して2つの四辺形境界モジュールを接続する場合、四辺形境界の表と裏からモジュールを向かい合わせにして接続させるものと、同じ側から覆いかぶさるように接続するものの2種類が考えられる。それぞれを両側タイプと片側タイプとする(図6)。片側タイプの場合、2つの四辺形境界モジュールが干渉しないよう設計するため探索時の拘束条件が増える。しかし、ターゲットの四辺形境界が視覚的にわかりやすくなり、建築を作成するにあたっては建築空間の気積を大きくすることができる。



左: 両側タイプ 右: 片側タイプ

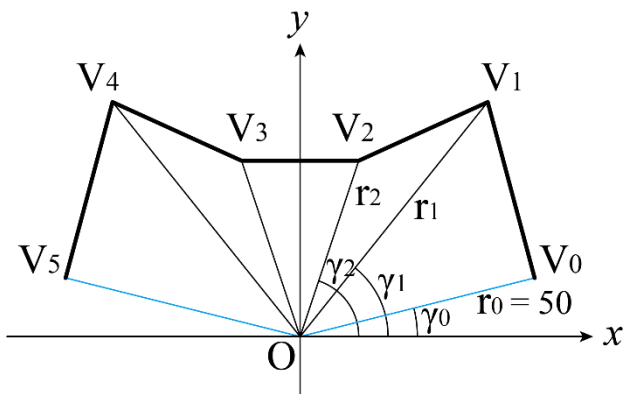
図6. 双安定四辺形境界モジュールの構成

3.3 設計変数

ターゲットとなる四辺形境界の展開前後の2つの表現点を入力として、その表現点を通り、かつ表現曲線が異なる四辺形境界モジュール1組を設計する。探索にはRhinceros内アプリケーションGrasshopperのGalapagos[6]による遺伝的アルゴリズムを用いる。

バイコンカルモジュールは鏡面上のポリラインと頂点により定まる。

平坦状態における、モジュールのポリラインの頂点を設計変数とする。ここでは頂点数を6点とし、探索時間の削減のため、ポリラインをY軸対称とした。また、 r_0 は四辺形境界の一边の長さであり変数にならない。直線OV₀とX軸の角度 γ_0 は目的の設計によって変数となる場合とならない場合がある。両側タイプの場合は $\gamma_0=0$ で固定し、片側タイプの場合は平坦折り状態の時にターゲットとなる四辺形境界形状に依存する。よって、本研究での設計変数は($r_1, r_2, \gamma_1, \gamma_2$)の4変数である。



$$(0^\circ < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < 90^\circ, 0\text{mm} < r_1, r_2 \leq 100\text{mm})$$

図7. 設計変数。

3.4 目的関数と制約条件

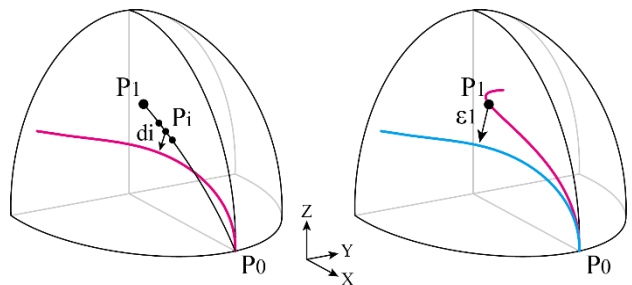
既往研究では、探索中にリンク機構の表現曲線は変化せず、四辺形モジュールの表現曲線のみ変化する。本研究では、2つの四辺形境界モジュールとその表現曲線が変化する。

一組のターゲット表現点に対し表現曲線の異なる2つの四辺形境界モジュールを設計しなければならない。そのため、それぞれのモジュール設計時に目的関数を変える必要性があり、2つのモジュールを順々に探索する。

1つ目：主とする目的関数は、変形前後2つのターゲット表現点と探索中バイコンカルモジュールの表現曲線との最小距離 ϵ_i の二乗の総和の最小化である。(図8右) この目的関数のみでは解が一に定まらないため、副次的

な目的関数を追加する。2つのターゲット表現点間に球面上の測地線を引く。測地線を m 分割した各頂点と、探索中バイコンカルモジュールの表現曲線との最短距離 d_i の二乗の総和の最小化、を目的関数に追加する。本論文では測地線の分割数 $m=900, c=0.9$ とした。(図8左)

2つ目：表現曲線をずらす為のダミー表現点を追加し、ターゲット表現点を3つとして1つ目の主とする目的関数と同様の目的関数を設定する。ダミー表現点は、展開後の表現点をZ軸回りに任意の角度回転させて設定する。このとき本来の表現点から離れるほど、飛び移りに必要なエネルギーの大きい解の探索に期待できる。また、ダミーではない表現点に10倍の重みづけを行う。



$$G(r_1, r_2, \gamma_1, \gamma_2) = 10 \cdot \sum_{i=0}^n \epsilon_i^2 + \epsilon_d^2 + \frac{\sum_{i=0}^m d_i^2}{c \cdot (m+1)} \quad (1)$$

図8. 目的関数

また、片側タイプを探索する場合、展開動作中にモジュール同士が干渉してはならない。展開動作中の干渉を防ぐ必要条件として、平坦折り状態にて2つのポリラインが交差しないようにした。

4 設計の検証

4.1 代表モデルの設計

代表的な設計例を得るために、3種類の双安定四辺形モジュールの探索を行う。ターゲット表現点P₁のZ座標を固定し、Y座標が負、0、正のモジュールを探索する。

最適化の結果、頂点間距離が0に近づくものや3つの頂点が一直線上に並ぶような解に関しては、探索後に手動で変更を加え、目的関数に変化しないことを確認した後に製作した。

変形動作中のひずみエネルギーを縦軸にとり、蛇行している表現曲線のモジュール(図10における(1b),(2b),(3b))の展開度を横軸にとったものを図10に示す。2つ目に探索した表現曲線を900分割した頂点から1つ目に探索した表現曲線との最短距離を取りその2乗の和をひずみエネルギーとする。また、表現曲線が蛇行

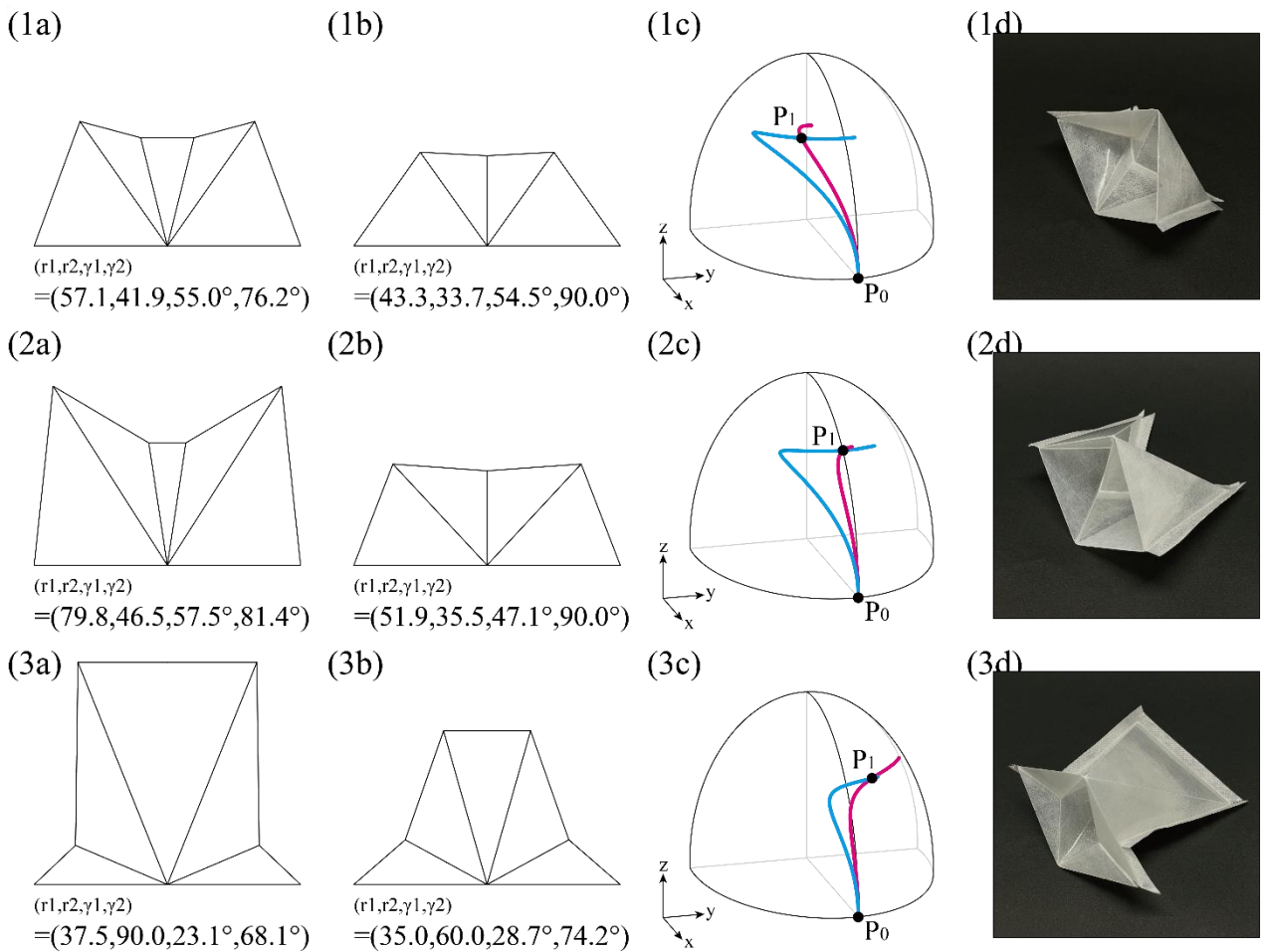


図9. 探索の結果得られた鏡面对称バイコニカルモジュール((1a), (2a), (3a))組立時外側になるモジュール, ((1b), (2b), (3b))組立時内側になるモジュール, ((1c), (2c), (3c))赤色が外側モジュール/青色が内側モジュールの表現曲線, ((1d), (2d), (3d))プロトタイプを展開時の写真

しているため、最短距離が正しく測定されているかを確認する。

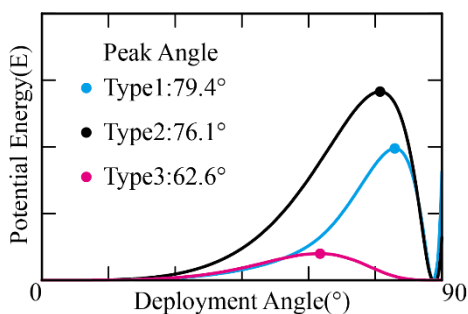


図10. ひずみエネルギーと展開角 (Typeは図9を参照)

4.2 プロトタイプの製作

探索によって得られたモジュールを製作し、設計の妥当性を検証する。ラミネートフィルムと不織布を張り付けることで、ラミネートフィルムをパネル材、不織布をヒンジとするプロトタイプを作成した。まず、カッティ

ングプロッターを用いてラミネートフィルムに山折りに1本の切り込み、谷折りに幅0.7mmの切り込みを入れる。次にアイロンを用いて不織布に熱圧着する。モジュールの外周部など細かい組み立てには熱可塑性接着シートを用いた。

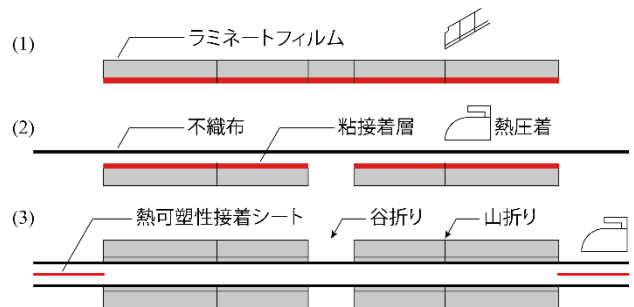


図11. プロトタイプの製作方法

製作したモデルを変形させることで平坦状態と立体状態を飛び移る双安定構造になっていることを確認した。エネルギー障壁の高さの違いによるモジュールごとの硬

さの違いも設計通りであった。Type1,2については目的の四辺形形状となっていたが、Type3 についてはしかし、ダミー表現点による双安定性の設計は厳密ではなく、課題が残されている。また、任意の四辺形境界かつ任意の双安定性の設計には至っていない。

ポリラインが凹になっている部分が2つあるモデルでは、折り畳む際に力を加える方向によってモード分岐が発生し、平坦に畳めなくなるものがあつた(図12)。

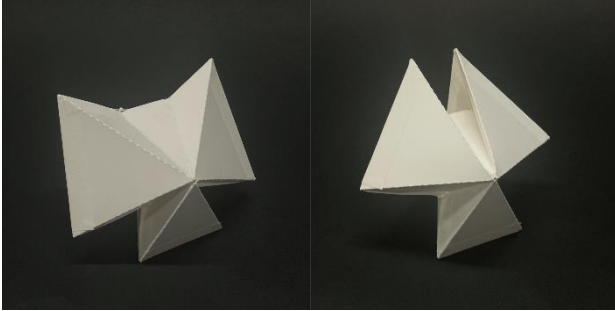


図12. 意図しないモード変化の例

5 曲面の設計

5.1 曲面のメッシュ化

双安定四辺形境界モジュールを用いて曲面を設計するとき、曲面の近似方法が問題となる。本論文で扱う四辺形境界は、4つの辺が等長であり変形途中にもその性質は失われない。そこで、目的の曲面を四角形メッシュに分割するとき、曲面の近似方法として、チェビシェフネット[7]を採用した。(図13)チェビシェフネットとは、伸びない縦糸と横糸によって布をモデル化する方法である。縦糸と横糸で作られた四角形メッシュの辺が等長となる特徴がある。四角形はねじれを含んでよいため、四辺形境界として表現可能である。

目的となる曲面をチェビシェフネットによって四角形メッシュとし、これを入力とする。そして、メッシュ内の各四辺形境界をターゲットとして、その四辺形境界と平坦状態とを飛び移る双安定四辺形境界モジュールを設計し、連結することで、双安定な曲面構造を構成する。

それぞれのモジュールを展開することで、四角形メッシュのそれぞれの面の形状が決定する。一方、面と面の間は回転可能なヒンジでつながっているため、面材が剛な四価頂点メッシュと同等の機構となる。四価頂点メッシュの場合、配置によっては変形自由度を持つため展開後の構造は安定しない場合がある。

展開後に構造全体が安定するための分割方法として、3価頂点を基本とした四辺形メッシュ分割を提案する。

日本の麻の葉模様ヒントを得た四角形メッシュを用いると平面を図14のように分割できる。図14中の赤い四角形がモジュールで埋める四辺形境界である。3価頂点 P_1 周りの3つのモジュールは自由度が0になる。頂点 P_2 は6価頂点であるが、 P_1 周りの3モジュールが一体となることで、六角形パネルの3価頂点とみなすことができ、全体が0自由度となる。モジュールの配置の特性上平坦折りすることはできないが、平面メッシュと曲面メッシュを行き来することは可能である。

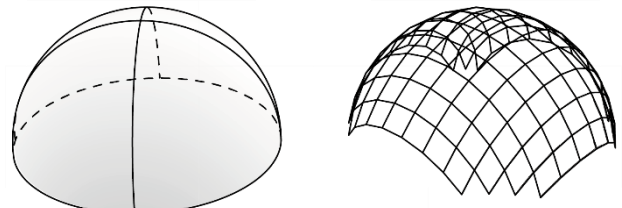


図13. チェビシェフネット

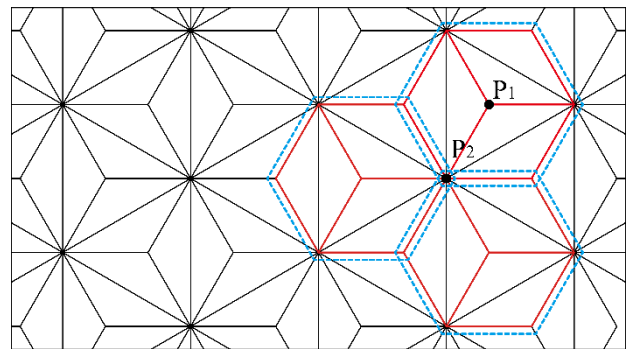


図14. 麻の葉模様を基にした四角形メッシュ

5.2 設計例

平面、柱面、ドーム型、鞍型の4種類の曲面に対して平坦と立体を行き来するものを設計し、メッシュへの変換と、各四辺形境界に対して双安定四辺形境界モジュールを設計し、それらを連結した展開構造を作成した。(図15)

探索に当たっては、新たな目的関数を追加した。連結/展開することを考えるとき、四辺形境界に対してモジュールの幅が大きくなると、モジュール同士が干渉してしまう。そこで、平坦折り状態のときポリラインが四辺形境界の幅より大きくならないようにした。ただしドーム型では、この拘束条件により探索が収束しかつたため、除いた。モジュール間の連結にはモジュール本体と同様熱可塑性接着シートとアイロンを用いて熱圧着した。

5.3 考察

全ての頂点が4価頂点となっているチェビシェフネットでは双安定モジュールが展開した後に自由度が0にならないことを確認した。チェビシェフネットによる設計例は平坦折り可能であるが、双安定モジュールをつな

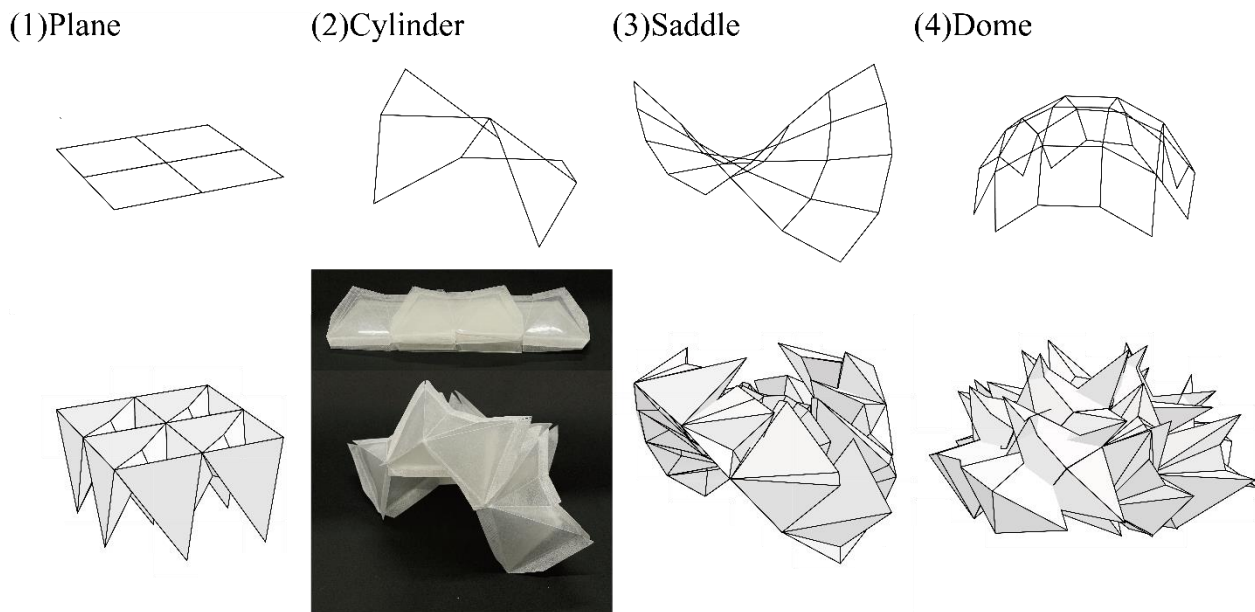


図 15. 探索の結果得られた双安定モジュールの連結による曲面（左から、平面、柱面、鞍型曲面、ドーム型曲面）

げた分だけ平坦状態での長さが長くなる。

平面モデルでは入力メッシュが菱形タイリングとなり展開後にヒンジが直線状に連続してしまうので自由に折れ曲がるのが可能になる。柱面モデルは、平面モデルと同様に1種類のモジュールの繰り返して設計できる。ドーム型曲面と鞍型曲面では、各四辺形境界にフィットする双安定モジュールは設計できるものの、展開後モジュール同士が干渉してしまう。

麻の葉モデルでは、展開後に0自由度になることを確認した。展開前の四辺形境界が平面を形成している段階では、微小変形が可能であった。

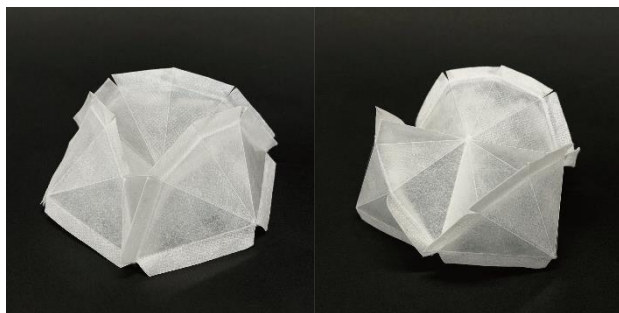


図 16. 麻の葉四角形メッシュによるドーム型曲面

6 まとめ

本研究では2つの四辺形境界間を飛び移ることのできる双安折紙構造を設計し、実作によってその設計方法の妥当性を確認した。また、この双安定折紙構造をモジュールとし、つなぎ合わせることによって平坦折可能な双安定性のある曲面の設計手法を提案した。

参考文献

- 1) Jianguo, C., Xiaowei, D., Ya, Z., Jian, F., and Yongming, T., “Bistable Behavior of the Cylindrical Origami Structure With Kresling Pattern,” ASME J. Mech. Des., 137(6), p. 061406. 2015
- 2) Liu, K., Tachi, T., and Paulino, G. H., “Invariant and Smooth Limit of Discrete Geometry Folded From Bistable Origami Leading to Multistable Metasurfaces,” Nat. Commun., 10(1), pp. 1–10. 2019,
- 3) David Melancon, Benjamin Gorissen, Carlos J. García-Mora, Chuck Hoberman, Katia Bertoldi : “Multistable inflatable origami structures at the metre scale”, Nature592, 545-550, 2021
- 4) Lee Munkyun, Yuki Miyajima, Tomohiro Tachi : Designing and Analyzing Multistable Mechanisms Using Quadrilateral Boundary Rigid Origami, J.Mechanisms Robotics, 2024
- 5) 宮寫祐生, 館知宏 : 四辺形境界剛体折紙を用いたマルチステイブル機構の設計, 東京大学広域科学専攻広域システム科学系修士論文, 2021
- 6) David Rutten. Galapagos: On the logic and limitations of generic solvers. Architectural Design, 83(2):132–135, 2013.
- 7) Takatera.M, Shimizu.Y, Shinohara.A: “Sphere Surface Construction with Woven Fabric Polyhedron”, SEN'I Gakkaishi Vol.59, No.2,p.76-79,2003

■ 一般講演 一技術報告一

最適設計された大変形弾性合金板の引張実験

内田乙葉¹⁾, 廣山幸樹²⁾, 澤田樹一郎³⁾

1) 島根大学総合理工学部建築デザイン学科

2) 島根大学総合理工学部建築デザイン学科

3) 島根大学総合理工学部, 教授, 博士 (工学)

1 はじめに

大変形弾性部材とは、鋼板を特殊な形状に加工し弾性限を拡大したものであり、建物の内部に組み込むことにより、大地震時に大変形しても壊れない巨大なバネのような特殊部材である(鹿児島大学より、2015年に特許出願、2017年に特許公開されているが、査定申請されていないため、現在、この技術は誰のものでもない¹⁾)。この部材を活用することにより、地震応答の軽減が期待できる。大変形弾性部材はこれまでの制震構造、耐震構造、免震構造といった手法とは異なる、新たな第4の手法である。これまでの3つの手法とは異なり、金属の弾性復元力を利用した手法である。この部材を建物内部に組み込むことにより地震時に大変形が発生したとしても、金属の弾性復元力により建物の残留変形を低減させることが可能となる。これまでの研究では鋼材に限定されていた²⁾。そこで、文献3)では、鋼、アルミ合金、チタン合金を使用した大変形弾性部材の圧縮実験について報告した。本研究では、大変形弾性部材に鋼とアルミニウム合金を使用した試験体の引張実験を行ったので、技術報告する。

2 制震, 耐震, 免震と大変形弾性部材

従来の制震構造、耐震構造、免震構造と大変形弾性部材の違いについて述べる。制震構造は主に、制震装置(履歴ダンパー)を設けることにより、地震による建物の揺れを吸収し、建物の損傷を最小限にする手法である。耐震構造は柱梁の強度を高め、地震に耐える手法であり、柱梁の損傷は許容するが建物の倒壊は防ぐことが可能である。免震構造は建物と基礎との間に柔らかい免震層を設け、地震による揺れが直接建物に伝わらないようにする手法である

。一方、大変形弾性部材は、これまでの3つの構造とは異なり、金属の弾性復元力を利用した手法である。この部材を建物内部に組み込むことにより、地震時に大変形が発生したとしても、金属の弾性復元力により、建物の残留変形、すなわち、地震終了後の建物の変形を低減させることが可能になる。大変形弾性部材の効果や有用性については、文献²⁾³⁾で述べている。大地震が発生し、主架構が塑性化したとしても大変形弾性部材の弾性勾配により、一定の二次剛性を示す。それにより建物の残留変形を低減させることが可能となる。

3 試験体の形状決定に採用されている最適化手法

連続体構造のトポロジー最適化には存在要素と空白要素で表現する一般的な手法があり、研究が進められている。ここでは、文献4)に示すFour-column法による定式化を用いて、降伏荷重最大化と降伏変形最大化の多目的最適化をNS-GAII⁷⁾により行った結果(パレートフロント解)の中から、後述する二つの形状タイプを選定し、その2分の1縮小試験体をアルミニウム合金(比較のため、鋼板試験体も製作)で製作している。

引張降伏変形 U_y と引張降伏荷重 P_y を二目的関数として使用し、Four-column法による定式化に対して、次の最適化問題を計算している³⁾。

$$f_1 = U_y = U \frac{\sigma_0}{\sigma_{M \max}} \quad \text{and} \quad f_2 = P_y = P \frac{\sigma_0}{\sigma_{M \max}}$$

U : 線形弾性解析による荷重点最大変位

P : 線形弾性解析で与えた引張荷重

σ_0 : 単軸降伏応力度

$\sigma_{M \max}$: ミーゼス応力のすべての評価点での最大値

4 大変形弾性合金板の引張実験

表1は、引張実験の試験体名称、使用材料、形状を示している。形状は、3節の方法から選定し、1/2に縮小した図1に示すAとBの2タイプである。ただし、鋼板試験体の板厚は6mm、アルミ合金板試験体の板厚は5mmで製作依頼した。実験で使用した鋼材および合金の降伏点（または耐力）の規格値とヤング係数の目安を表2に示す。また、鋼材、アルミ合金の降伏点又は耐力の値は製作工場から受け取ったミルシートより引用した。

引張実験は、島根大学建築構造実験室内の万能試験機（写真1）に設置して行われた。試験体の設置状況を写真2に示す。

50mm容量の変位計を2台左右に設置した。写真3は、載荷時の試験体の様子（S-A試験体）を示している。図2は、各試験体の荷重変形関係を示している。

表2 鋼材またはアルミ合金の素材特性⁵⁾⁶⁾

金属の種類	名称	降伏点又は耐力 (MPa)	ヤング係数 (GPa)
鋼材	SM490	430	205
アルミ合金	A7075P	486	70.7

表1 試験体名称、使用材料、形状

試験体名称	使用材料	形状
S-A	鋼材 (SM490)	A
S-B	鋼材 (SM490)	B
A-A	アルミ合金 (A7075P)	A
A-B	アルミ合金 (A7075P)	B

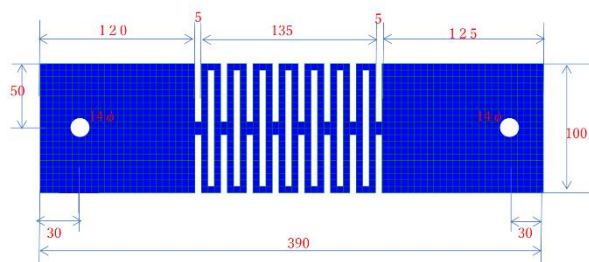


図1(A) 試験体寸法（形状A）

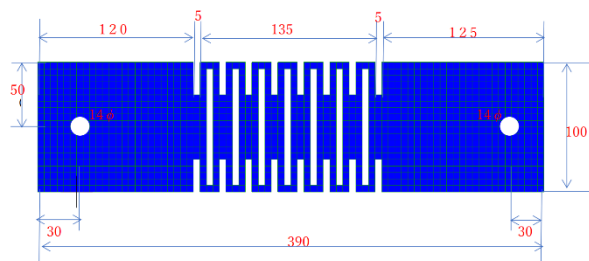


図1(B) 試験体寸法（形状B）



写真1 万能試験機



写真2 試験体設置状況（S-A試験体）



写真3 載荷時の試験体の様子 (S-A 試験体)

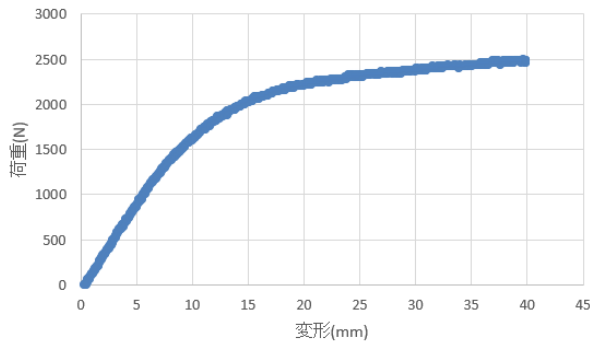


図 2(A) 荷重変形関係 (S-A 試験体)

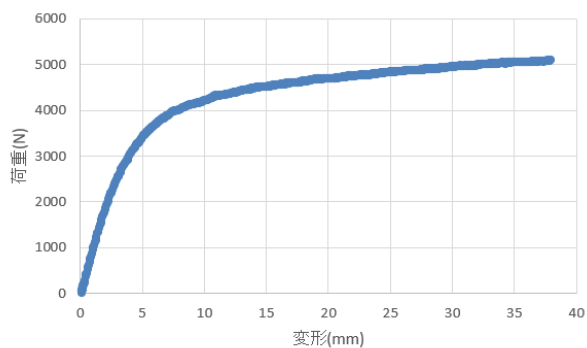


図 2(B) 荷重変形関係 (S-B 試験体)

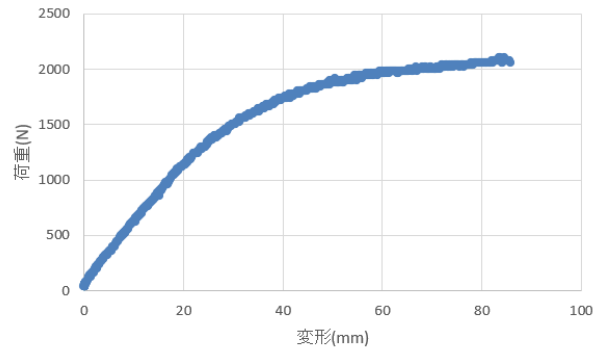


図 2(C) 荷重変形関係 (A-A 試験体)

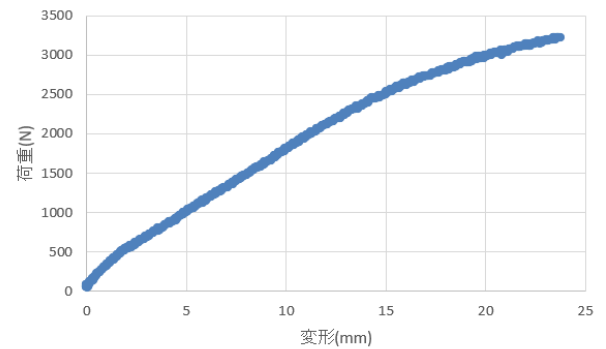


図 2(D) 荷重変形関係 (A-B 試験体)

鋼材試験体 S-A、S-B に比較してアルミ合金試験体 A-A、A-B は弾性限変形が大きく拡大している。ただし、鋼材試験体は引張実験中に 150 mm 程度の塑性変形まで破断しなかったが、アルミ合金 A-A 試験体は 80 mm 程度で試験体が破断した (写真 4)。その要因として、アルミ合金は鋼より大きな弾性限を有するが、鋼材より小さい破断伸びの素材であったため。載荷時に大きな曲げ変形があったためだと考察する。また、アルミ合金 A-B 試験体では試験体の破断までには及ばなかったが、A-A 試験体と同様、大きな曲げ変形を確認した (写真 5)。アルミ合金試験体で大きな曲げ変形が生じた要因として試験体つかみ部の滑りによるものと推測する。

表 3 は、荷重変形関係のカーブから、各試験体の弾性限荷重、弾性限変形 (ここでは、グラフの傾きが 10% 低下する点を弾性限と定義する。) を算定したものである。図 3(A) は形状 A の試験体の弾性限荷重と耐力又は降伏点の関係を表している。図 3(B) は形状 A の試験体の弾性限変形と (耐力/ヤング

係数)又は(降伏点/ヤング係数)の関係を表している。青の直線は、大変形弾性部材の圧縮実験結果を示す。橙色のプロットは本研究での引張実験結果を示す。図3(A)(B)より、2色のプロットが概ね一致していることから、大変形弾性部材のような複雑な形状でも、弾性限変形は、どれか一種の金属板の弾性限がわかれば、素材特性の比率から、他の金属板のものが予想できることがわかる。

表3 弾性限荷重と弾性限変形

試験体	弾性限荷重(N)	弾性限変形(mm)
S-A	740	4.245
S-B	1220	1.335
A-A	960	16.24
A-B	2080	11.76



写真4 破断したA-A試験体



写真5 大きな曲げ変形の生じたA-B試験体

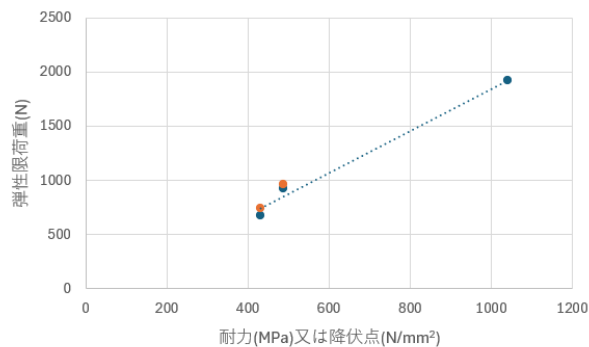


図3(A) 弾性限荷重と耐力又は降伏点の関係

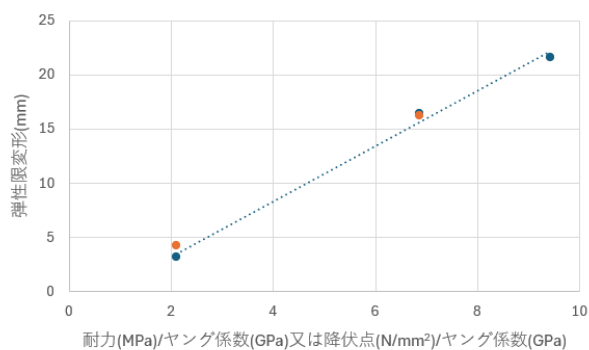


図3(B) 弾性限荷重と(耐力/ヤング係数)又は(降伏点/ヤング係数)の関係

5 まとめ

本研究では、合金を使用した大変形弾性部材の引張実験を行った。得られた知見を以下に示す。

- (1) 形状Aの試験体では弾性限荷重と耐力、弾性限変形と(耐力/ヤング係数)の関係がおおむね対応した。
- (2) 形状Bの試験体では、弾性限変形は、形状Aより小さくなったが、弾性限荷重は高くなった。

- (3) 鋼材試験体は、降伏後も大きな塑性変形まで破断や亀裂は見られなかった。
- (4) アルミ合金試験体は、鋼材試験体よりも弾性限が大きく拡大したが、降伏後の塑性挙動で破断が確認された (A-A 試験体)。
- (5) 大変形弾性部材のような複雑な形状でも、弾性限荷重と弾性限変形は、どれか一種の金属板の弾性限がわかれば、素材特性の比率から、他の金属板の弾性限が予想できる。

謝辞：

本研究プロジェクトは、JST による高大連携事業「島根大学グローバルサイエンスキャンパス」の活動の一環として行われた。また、本研究にご協力いただきました島根大学総合理工学部建築デザイン学科影山結様、梶谷奎伍様、廣山幸樹様、NGUYEN TRAN THI HONG NHUNG 様、技術専門職員 坂本和博様に深く感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 発明者：澤田 樹一郎ほか、出願人：国立大学法人鹿児島大学、「耐震性向上用弾性部材、耐震性向上用構造体、及び耐震性向上用弾性部材の製造方法」、特願 2015-218453、特開 2017-089714
- 2) 岸添将至，澤田樹一郎，大変形弾性部材をブレースとして組み込んだ鋼構造骨組の地震応答，鋼構造論文集 第 27 巻第 105 号，2020 年 3 月
- 3) 内田乙葉，澤田樹一郎，最適設計された大変形弾性合金板の圧縮実験，18 回コロキウム構造形態の解析と創生 2023 講演論文，2023，11，17
- 4) Sawada, K et.al., A Study on Multi-Objective Optimization of Large Deformable Elastic Plates. Buildings 2022, 12, 1323.
- 5) http://www.titanjapan.com/technology/physical_properties.html (日本チタン協会 Web ページ)
- 6) <https://kikakurui.com/h4/H4000-201701.html> (日本産業規格より)
- 7) Deb, K.; Pratap, A.; Agarwal, S.; Meyarivan, T.A. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Trans. Evol. Comput. 2002, 6, 182-197.

大規模木造建築に適用することができる大変形弾性部材の研究

廣山幸樹¹⁾，澤田樹一郎²⁾

1)島根大学総合理工学部建築デザイン学科、学部生

2)島根大学総合理工学部建築デザイン学科、教授

1 はじめに

木造建築は、RC造、S造に比べて耐震性が不足気味で、大規模木造建築においても、特に、大地震での接合部の耐力確保が課題である。近年では、接合部に、鋼製の金物を使用されることが多いが、接合部の鋼製金物、木部部材のいずれが先行降伏したとしても、建物全体としての変形能力不足に悩むことになる。本研究では、大きな弾性限を有する柔な部材「大変形弾性部材」を接合部に用いることで上記の問題の解決策を探る。大変形弾性部材を大規模木造建築にも適用できるように、形状と接合部ディテールを試設計・開発し、大変形弾性部材に限定して、解析を行ったので報告する。

2 大変形弾性部材とは

大変形弾性部材とは澤田等が開発した部材の造語である。大変形弾性部材は、大地震のような大変形が起こるようなレベルでも弾性の性質を維持し、塑性化しない特殊な部材である¹⁾。

普通鋼の鋼板では荷重と変形が比例し、荷重が除かれると変形がほぼ0になる弾性の範囲は非常に小さく、変形がその範囲を超えると荷重は増加しないが変形が増大する塑性域に入る。塑性域に入ると荷重が除荷されたとしても変形が0には戻らず、残留変形が生じる。しかしながら、大変形弾性部材では鋼板をぐにやぐにやした形に切断加工することによって大変形でも弾性の性質を維持することが可能である。また、形状の違いによって耐力が高く降伏変形が小さいものから、耐力が低い降伏変形が大きくなる形状まで作成することが可能であり、用途によって使い分けることが可能である。

3 大変形弾性部材を適用した大規模木造建築柱梁接合部の一例

大変形弾性部材を適用した大規模木造建築柱梁接合部の一例は以下の図1である。この例では、まずはじめに大変形弾性鋼板をレーザー加工した後、上下のダイヤフラムと溶接接合し、鉄骨柱梁接合部を製作する。このようにすることによって鉄骨製作工場の接合部溶接技術を

最大限生かすことができる。大変形弾性板端部と木部の接合は、ドリフトピン接合やボルト締めを考えている。大変形弾性部材の弾性変形や降伏を先行させるため、溶接部、ドリフトピンまたはボルト、木部の破壊は生じない。

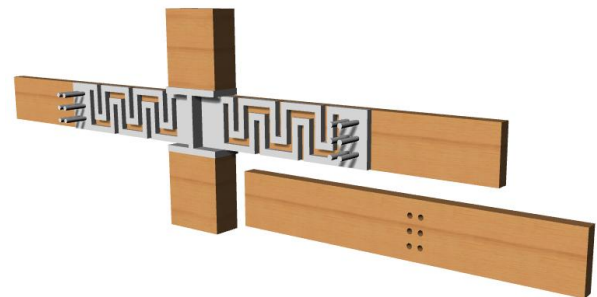


図1 大変形弾性部材を適用した大規模木造建築柱梁接合部の一例

4 新たな大変形弾性部材の形状

本研究ではまず、先行研究で最適設計によって作成された大変形弾性板のうち、図2の降伏変形の値が大きな部材 A-1 と図3の降伏荷重の値が比較的大きな部材 A-2 を出発点とし、以下の種々の形状を検討する²⁾。図2や図3は、方杖ブレースに用いることを想定し、両端つかみ部に引張又は圧縮が作用する荷重条件としていたが、本研究では、図1の木造柱梁接合部内に組み込むことを想定しているため、両端つかみ部にせん断力が作用する荷重条件を考える。

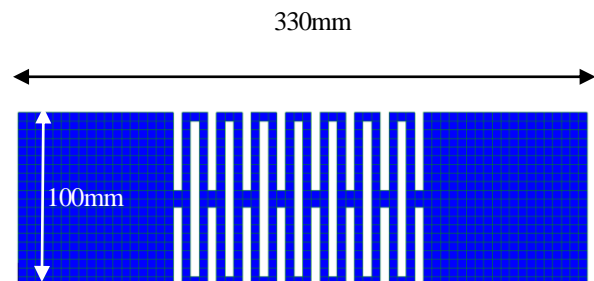


図2 降伏変形の値が大きな部材 A-1

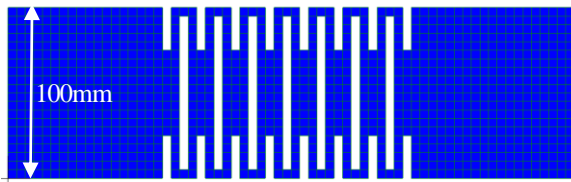


図3 降伏荷重の値が比較的大きな部材 A-2

図4は図3の形状を右に近づくにつれ図2に近づけるように作成し、A-3とする。図5のように大変形弾性部材の変形部分を二つにすることによってより普通の大変形弾性部材より耐力を増加するのではないかと予想し、A-4とする。図6は図5の形状と図4の形状を合わせることでより降伏荷重の値が増えるのではないかと考え形状を作成し、A-5とする。なお、いずれの試験体も板厚を4.5mmとする。

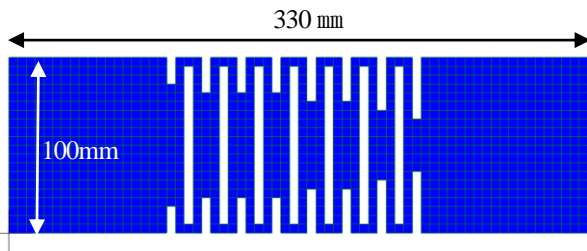


図4 A-3 部材



図5 A-4 部材

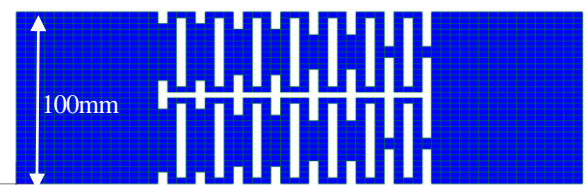


図6 A-5 部材

5 解析結果

5-1 境界条件と荷重条件

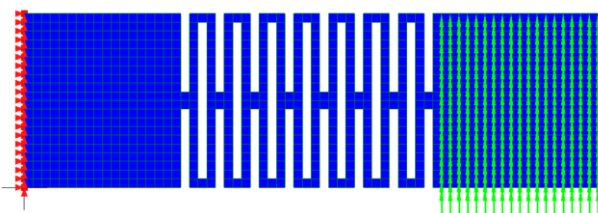


図7 境界条件と荷重条件

本研究では全ての試験データにおいて図7のように同条件の境界条件と荷重条件でLISA8.0を用いて解析を行っている。まず、境界条件は図7のように左端をx軸、y軸、z軸を固定している。荷重条件では右側の部分に鉛直上方向に対して1000Nの荷重を与えている。

5-2 解析結果

それぞれの試験体の解析を行い1000N荷重時の変形とボンミーゼス応力の2つの解析結果についてまとめ、試験体同士の比較を行っていく。試験体はSM490を使用すると想定し、解析の後に降伏変位や降伏荷重を算定する際の単軸降伏応力度を325(N/mm²)とする。

図8と図9はA-1試験体の解析結果である。A-1試験体の1000N荷重時変形の最大値は123.3mm、ボンミーゼス応力は最大値が2969 N/mm²で変形部分の左端の中心部分に高い応力が集まっていることが分かった。降伏変形(応力分布がミーゼスの降伏条件をぎりぎり一杯満足するときの鉛直変形量最大値)は13.497mmであり、降伏荷重(応力分布がミーゼスの降伏条件をぎりぎり一杯満足するときの鉛直荷重の合計)は109.464Nである。

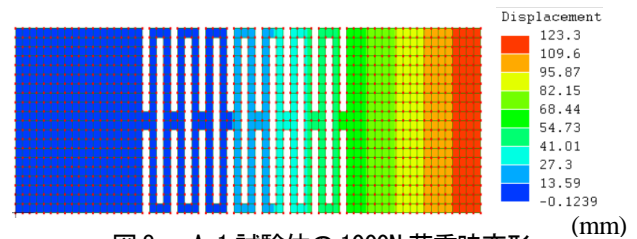


図8 A-1 試験体の1000N 荷重時変形

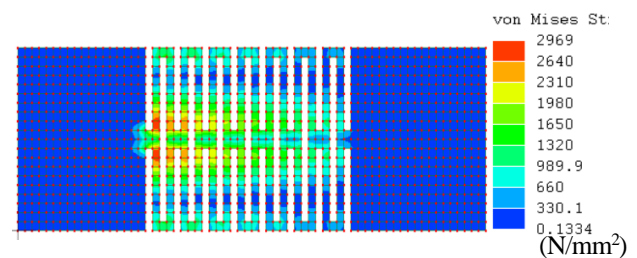


図9 A-1 試験体のボンミーゼス応力

図10と図11はA-2試験体の解析結果である。A-2試験体の1000N荷重時変形の最大値は15.25mmであり、ボンミーゼス応力の最大値は1098 N/mm²でありA-1試験体と同様に左端の中心部分に応力が集まっている。降伏変形は4.514mmであり、降伏荷重は295.993Nである。

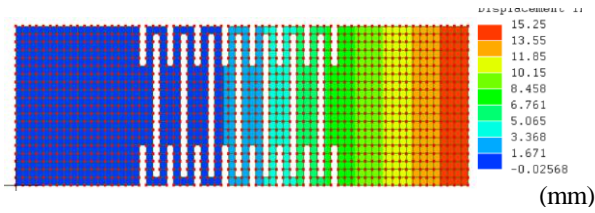


図 10 A-2 試験体の 1000N 荷重時変形

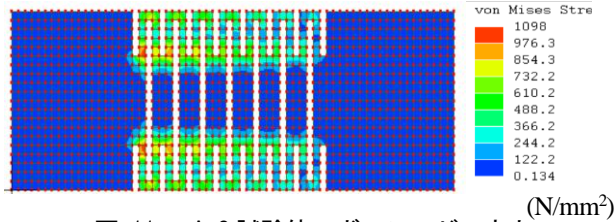


図-11 A-2 試験体のボンミーゼス応力

図 12 と図 13 は A-3 試験体の解析結果である。A-3 試験体の 1000N 荷重時変形の最大値は 10.29mm であり、ボンミーゼス応力の最大値は 724.5 N/mm² である。ボンミーゼス応力の分布が前述の A-1 試験体と A-2 試験体より分散されていることが分かった。また、降伏変形は 4.616mm、降伏荷重は 448.585N である。

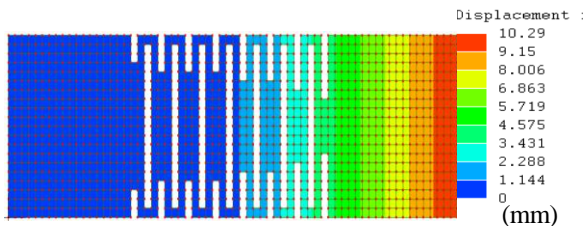


図 12 A-3 試験体の 1000N 荷重時変形

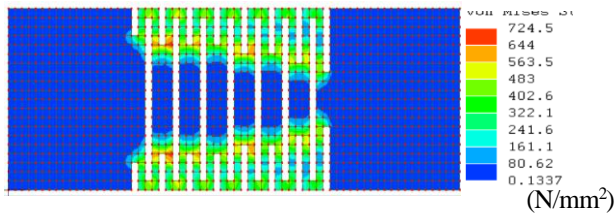


図 13 A-3 試験体のボンミーゼス応力

図 14 と図 15 は A-4 試験体の解析結果である。A-4 試験体の 1000N 荷重時変形の最大値は 13.85mm であり、ボンミーゼス応力の最大値は 1167 N/mm² である。ボンミーゼス応力の分布が前述の A-1 試験体と A-2 試験体と同様に变形部分の左端に集中していることが分かる。また、降伏変形は 3.857mm であり、降伏荷重は 278.492N である。

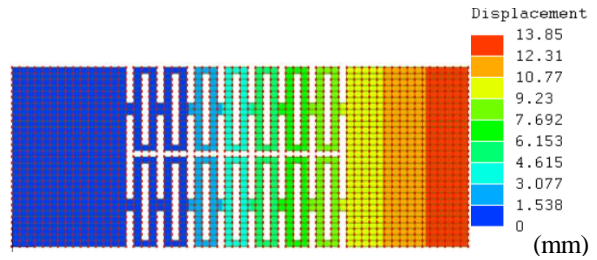


図 14 A-4 試験体の 1000N 荷重時変形

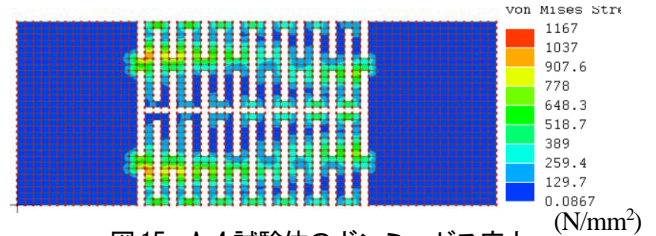


図 15 A-4 試験体のボンミーゼス応力

図 16 と図 17 は A-5 試験体の解析結果である。A-5 試験体の 1000N 荷重時変形の最大値は 2.529mm であり、ボンミーゼス応力の最大値は 334.5 N/mm² である。ボンミーゼス応力の分布が分散されていることが分かる。降伏変形は 2.457mm であり、降伏荷重は 971.599N である。

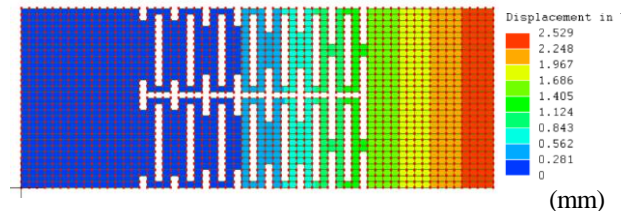


図 16 A-5 試験体の 1000N 荷重時変形

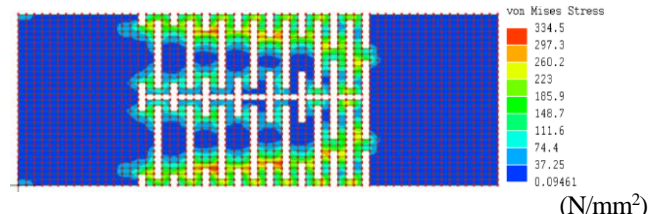


図 17 A-5 試験体のボンミーゼス応力

表 1 と図 18 は、得られた降伏変形と降伏荷重の関係をまとめたものである。

表 1 降伏変形と降伏荷重

	降伏変形(mm)	降伏荷重(N)	剛性 (N/mm)
A-1	13.50	109.5	8.110
A-2	4.514	296.0	65.57
A-3	4.616	448.6	97.18
A-4	3.857	278.5	72.20
A-5	2.457	971.6	395.4

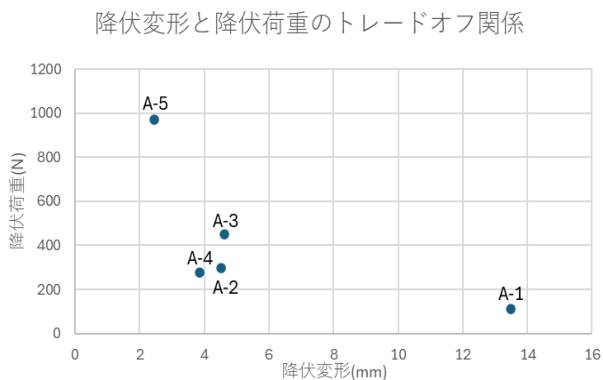


図 18 降伏変形と降伏荷重のトレードオフ関係

5-3 考察

大規模木造建築を実現するために接合部として大きな弾性限を有する大変形弾性部材を作成することが目的である。実現するために大きな降伏変形と降伏荷重のバランスが重要であり、応力が分散されていることも重要である。そのことから本研究で作成した試験体のうち A-3 が比較的バランスが良いと考えられる。

6 まとめと今後の研究

本研究では大変形弾性部材を大規模木造建築にも適用できるように、形状と接合部ディテールを試設計・開発し、大変形弾性部材に限定して、解析を行いそれぞれの結果を基にして比較を行った。降伏変形と降伏荷重のバランスと応力が分散されている試験体 A-3 が本研究では適当であると考察した。

今後の研究では以下の研究を行っていきたいと考えている。

(1) 試験体データの数を多目的最適設計などにより増やし、試験体 A-3 よりも適している大変形弾性部材を見つける。

(2) 弾塑性の変位型有限要素法を用いて変位増分解析を行い、有限要素解析を行う。

(3) (1) で作成した試験体について実験を行い (2) で行った有限要素解析との比較を行う。

以上の研究を行い、大変形弾性部材を大規模木造建築にも適用できる大変形弾性部材を作成していく。

謝辞：

本研究を進めるにあたり、(株) MNQ 構造デザインの寺本道彦氏にご助言をいただきました。この場を借りて謝意を表します。

7 参考文献

- 1) 澤田樹一郎：耐震・免震・制震に次ぐ第4の技術「大変形弾性部材」．「建築士しまね」2020/No.4
- 2) Sawada, K.; Kajitani, K.; Uno, T.; Teramoto, J.; Komatsu, S. A Study on Multi-Objective Optimization of Large Deformable Elastic Plates. Buildings 2022, 12, 1323. <https://doi.org/10.3390/buildings12091323>

■第 19 回 形態創生コンテスト 2024

□ コンテスト概要

1. コンテストの趣旨

形態創生における種々のアイデアを適用して、建築空間や構造物などの「新しいかたち」や「独創的な形態創生手法」を提案いただくコンテストです。専門分野にかかわらず、多くの方々に参加いただいて、形態創生のおもしろさや可能性を感じていただければと思っています。本コンテストでは、形態創生のフリーウェアも提供しています。一方、コンピュータプログラムや汎用ソフトによらない手法で、「かたち」を創生するアイデアも可能です。

2. 課題(テーマ)

第19回形態創生コンテストの課題(テーマ)は、下記のとおりです。

「シェアラブル」

なお、応募要項の詳細は、「第19回コロキウム構造形態の解析と創生 2024 ホームページ」

<https://kozokeitaisosei.com/形態創生コンテスト/>

に掲載しました。

3. 審査委員(敬称略・50音順)

・審査委員長:

満田 衛資(京都工芸繊維大学)

・審査員:

鳴川 肇(慶應義塾大学)

平野 利樹(東京大学)

横須賀 洋平(鹿児島大学)

・特別審査員(特別講演講師):

名和 研二(なわけんジム)

堀川 淳一郎(建築系プログラマー)

4. コンテストの経過

2024年09月18日: 応募エントリー締切

2024年09月27日: 作品応募締切

2024年10月02日: 一次審査(於:オンライン会議システム)

2024年10月08日: 一次審査結果の通知

2024年11月07日: 「第19回コロキウム構造形態の解析と創生 2024」にて二次審査および表彰

(於: 建築会館ホール)

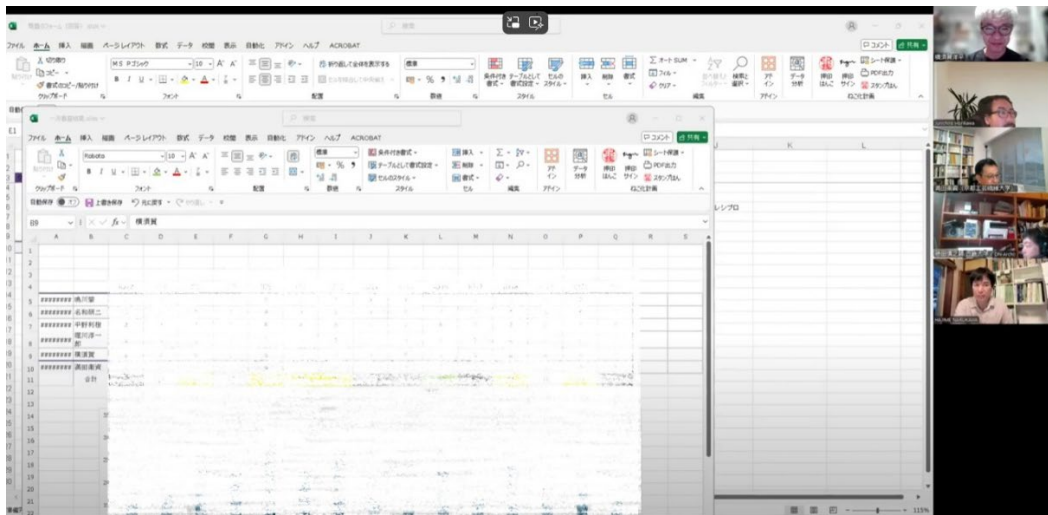


写真 1 一次審査の様子

5. 審査の方法

一次審査は、特別審査員を含む審査員全員によりオンライン会議システムを使い、実施しました。所定の時刻に応募者に参加していただき、プレゼンテーション動画視聴の後、質疑応答を行いました。作品は匿名とし、課題(テーマ)に対する作品の満足度のほか、創生された形態(かたち)そのものの独創性や形態創生プロセスに関するアイデア性などを総合的に勘案して評価しました。なお、二次審査において、審査員と同じ所属研究室や関係者である場合には、投票権を無効とみなすことで公平性を保つこととします。

6. 応募状況および一次審査での選出作品数

エントリー数：22件
 応募総数：15作品
 入選作品数：6作品
 佳作作品数：1作品

—入選作品—

エントリー No.	タイトル	氏名・所属〔○印:代表者〕
2	Multi-stable Rhombus	○高室航平 堺雄亮 (ソニーコンピュータサイエンス研究所)
5	桶箱工法_ver3	○金子太一 (東京藝術大学)
7	Foldable Honeycomb	○齋藤魁利 (株式会社 AMDlab)
10	シザース構造の応用による開閉可能な任意の三次元曲面	○浅岡小百合 (慶應義塾大学)
18	曲率の反転 ～双曲面レシプロカル構造による空間デザイン～	樫田啓吾 三好健太 山本怜生 三田沙也乃 ○村瀬怜奈 伊藤世玲奈 (株式会社大林組)
21	Newspaper Pavilion ～新聞紙を材料とした3D プリント建築～	○土井究太 大場風太 前田駿 土居颯真 小田原紫音 志々目慧大 (広島工業大学)

—佳作作品—

エントリー No.	タイトル	氏名・所属〔○印:代表者〕
16	ハリメンシエル 重ね代を調節して同形状面材 を貼り合わせ接合することで 作る曲面	○古賀大誠(東京大学(木質材料学研究室))

7. 応募全作品の講評

本コンテストは、今年度で第19回目を迎える。昨年同様、一次審査はオンラインで実施した。多数の大学・企業のグループから応募があり、形態創生に多くの興味が集まっていることが感じられる。皆様に深く感謝申し上げたい。

今年度のコンテストテーマは「シェアラブル」である。シェアリングエコノミーは、個人間や個人と企業でサービス等を共有・交換する経済モデルで、所有よりも「シェア」を重視することで、多くの業界に変化をもたらしている。建築の構造体も、荷重を支持するといった本来の機能に加え、構造躯体が持つポテンシャルを「シェア」することで、より多機能で合理的な存在価値を見出すことができると考えられる。建築に要求される様々な用途や機能を「シェア」できる構造・しくみの提案を期待した。

応募作品には、応募者が考える様々なシェアの形が表現された。

空間をシェアする、複数の構造体の一部が共有されている、異なる種類の力が形態変化によってシェアされる、異なる展開機構で一方が展開すると他方も連動して展開する、空気・光・水の流れがシェアされる、片方の変形によって連動して他方も変形するシザーズ構造、多種多様な人・場面が共有できる、小さな部材がお互いを支えあうレシプロカル構造、材料を地域からのシェアで補う、など同じ「シェア」であっても、捉え方が非常に多様であった。

これだけ多様性があり、自由な提案が数多くみられる点は、本コンテストにみられる魅力の一つである。例年に比べ特に魅力的な作品が多く、審査は難航を極めた。4時間に及ぶ審査の結果、審査員全員の総意によって昨年度より入選作品を1つ増やすこととし、6つ作品が入選作品に選定され、さらに、近年では選ばれていなかった佳作を復活させ、1つの作品が佳作作品に選定された。

入選作品の中には、実現可能性について現段階ではやや懐疑的な作品も含まれているが、各作品に対し、審査員からリクエスト・コメントを伝えている。入選者においては、それらのリクエスト・コメントを参照の上、二次審査までの間にも試行錯誤を続けて頂き、作品のブラッシュアップを強く期待したい。

(以下、[]はエントリー番号を示す)

[2] Multi-stable Rhombus

面内変形が可能なひし形の機構を面外変形が可能な帯状に製作することで、面外に曲げた時に多段階の安定状態をもつユニットを利用し、それらを相互に繋いで曲面構造を製作する提案である。面内と面外の力の伝達の切り替わり、形状のスマートさ、スナップスルー座屈により安定形状が瞬時に切り替わることなどが評価された。一方で、大きく変形するため、製作した小さなモデルであれば可能であるが、対象を大きくした場合に想定する動きをするのか、どのような材料を使用するのか、など、実サイズで製作する場合の具体性が求められた。

[3] Shared Space and Forces

感情の変化を時間経過によって変わる波のように捉え、波の形を折れ線の構造体で模し、外乱(風, 地震に加え人力)によって変形する柔らかい構造の提案である。自然風や人力によって無理なく変形する程度に構造材の剛性を選定している。人力で変形するほど柔らかい建築は斬新で評価された。作成された模型による実験で柔軟な変形を表しており、その点も評価された。一方で、格子状に構成した箱型の形態はコンセプトに合わず、形態の工夫が求められた。人力を想定する場合、複数個所に同時に力が加わる可能性があり、その点も検討が求められた。

[5] 桶箱工法_ver3

箱型のユニット部材の中にテンション材を通し、ユニットの仕口形状とテンション材を通す位置を操作し、テンション材に与えたポストテンションによって、帯状に並べたユニットを立体的な形態へと変化させる提案である。さらに、複数の帯状構造物の並べて接する位置に共有するユニットを用いることで多様な形態を作ることができる。斬新な構法で多様な形態を作ることができる点や、実物大の模型が作成されている点、支持部の製作精度を評価された。一方で、桶箱という名称を使用した理由や、支持点を減らすことでよりシェアラブルな形態が得られるのではないかと、等の質疑があった。

[6] Glocal Hub

3本の斜め柱を片面が吊り出したリングガーダーで高さを変えながら接続し、斜め柱のスラストをリングガーダーで相互の柱に伝達させ、安定した形態を作る提案である。リングガーダーの形状や3本の柱が集まる位置などを変えることで多様な形態を生み出している。柱が太く見えリングガーダーも厚いため軽やかに見えない、リングガーダーをスロープ状にしない理由はなぜか、リングガーダーが閉じていないとリング効果が出ないのではないかと、などの指摘があった。

[7] Foldable Honeycomb

厚みのあるハニカム構造で曲面構造を作る手法である。剛体折りを基本とし、内側と外側で辺の長さを変え、六角形の開角が120度となる制約を外し、潰れた六角形も許容することで、展開可能な曲面構造を構築している。また、精緻に論理が構築されており、高度な逆解析を行っている。ハニカム構造は弾性曲げを考慮すると曲面化できるにも関わらず剛体折りを採用した理由や、ワイヤーを通す位置の決め方などの指摘があった。

[10] シザース構造の応用による開閉可能な任意の三次曲面

傘の骨部分をシザース構造とし、傘の展開機構と同期させることで、傘を開くという一つの動作によって傘の膜面に任意の曲面構造を構成させる提案である。シザース構造で曲面を作る方法は、ピボットの位置を変えることで実現している。実寸で製作した例もあり、実現のために機構や材料を十分に検討されていることが評価された。一方で、膜材の張力までは検討されておらず、シザースの展開過程で皺ができるのでは、という指摘や、膜材と骨組みの接合や膜材同士の接合が適切ではなく、雨仕舞も検討すべきでは、という指摘があった。平面形状を展開に即した形状にする、柱間隔を最適化することでより複雑な曲面を構成できるのでは、という指摘があった。

[14] シェアノバ～人々やアイデアが交差する新しいシェアリングの場～

正多角形をずらして重ねることで生まれるシザーズ構造で円弧状のアーチを作成し、それらの間もシザーズでつなぐことで、2方向に展開可能なシザーズ構造を構築する提案である。人力で展開することで個別空間を生み出せる点が評価されていた。一方で、展開後に特定の位置で固定するためにシザーズを拘束する方法や、提案方法は1方向に展開後にアーチを展開しており、2方向に同時展開できない点、展開後にアーチの面外への抵抗要素がない点などの質疑があった。

[15] 流促

肺の気管支のような分岐構造を建築デザインの発想源としている点が独創的である。流体の流れをモチーフにしなが、設計者の意図を反映させるための操作性も備えている。しかし一方で、実際の構造形式については具体的な提示が十分になされておらず、特に分岐部分の構造ディテールに関する説明があるとより説得力のある提案になったであろう。分岐部での流体の流れを損なわない構造とされているが、本提案の根幹をなす分岐構造の構築方法の具体化とその実現方法については今後さらなる検討が必要と思われる。

[16] ハリメンシエル 重ね代を調節して同形状面材を貼り合わせ接合することで作る曲面

バックミンスター・フラーのプラインドームの発想を自由曲面へ拡張した独自性のある提案であり、重ね代の制御方法にも工夫がある点が特徴である。長方形のユニットを組み合わせることで、五角形や六角形のユニットも表現可能である。解析モデルでは三角形のメッシュで曲面を分割し、頂点に対応するユニット同士の接合部に生じるせん断力を確認している。ベーシックな部分からモックアップによる確認などを積み重ねながら提案内容を検証できている点は高く評価された。一方で、フラーとの違いが明確でないため新規性に欠ける点や、さらにモックアップのスケールを拡張した際、厚み・面外剛性を持つ素材への適応の可能性が示されていない点が指摘され、全体的に高い評価を得ながらも惜しくも佳作作品に選定された。

[17] RomBox

提案されたユニットは正方形の角パイプと引張材で構成されており、このユニットを組み合わせることで任意形状を実現しようとするものである。ユニットの大きさや配置を変えることで、様々な形状への対応が可能であることが示された。一方で、ユニットの変形機構について質疑があり、マクロ的な視点で見た際のユニット剛性に関するメカニズムが明確でないとの指摘があった。モックアップによる性能確認が行われているとの説明があったが、それらが提案書に示されていない点もやや評価が得られづらい結果となった。

[18] 曲率の反転 ～双曲面レシプロカル構造の空間デザイン～

双曲面状の形状を、レシプロカル構造とベンディングアクティブによる部材を組み合わせることで実現しようとする大変興味深い提案である。アイス棒を用いた鞍型タイプの模型や柱型の解析モデルでの検証はなされており、CGによるイメージも非常に魅力的である。しかし、実大サイズで実現する際の課題が何点か指摘された。柱型では、摩擦抵抗のみで軸力を伝達するかについては疑問視されたものの、自立するだけでも魅力があるとの意見もあった。形状の自由度が高く意匠性に富む反面、構造的な課題が残されており、より具体性を持ったさらなる発展を期待したい作品である。

[19] ScissorScissorS

シザーズ構造を用いた可変空間は非常に挑戦的なアイデアであり、自由な空間づくりができそうな期待感が持てる作品である。特に柱を回転させながら捻ることによって、天井高さを自在に変化させる案は予想外の動きを生み、これらの点が評価された。一方で、シザーズ構造変形後の床面・天井面の構成方法について具体性に欠ける点が指摘された。また、主架構である大梁をシザーズ構造とした際、伸縮時に変化する梁部材としての性能に考えが及んでおらず、別ストラクチャーなしに実現が可能かという疑問も投げかけられた。

[20] 樹木と処をシェアする架構

レシプロカルフレーム構造を 3D プリント部材と一般的な木材加工で組み合わせて構築する方法が提案されている。施工現場での作業効率を重視し、3D プリント部材は精密な角度決めを使い、木材は簡易的な加工で済ませる設計となっている。これにより、図面を介さず設計者自身が現場で組み立てていく「セルフビルド」を想定している点が特徴的である。一方で、モックアップはジョイント加工のみであるということから、全体を組み上げることが実際に可能かについての疑問が出された。セルフビルドの可能性は魅力的だが、施工の現実性について、さらなる検討が求められる提案であった。

[21] Newspaper Pavilion～新聞紙を材料とした3D プリント建築～

本提案は、短冊状の新聞紙とボンド、割りばしを三角錐に組んだスパイクを順番に積層していくという非常に挑戦的なプロジェクトであり、理論と形状を突き詰めていくという立ち位置からは大きく距離を取った数少ない作品の一つである。数学的なスマートさとは異なるが、それでもしっかりと形態を作っていくという、現在の建築技術への新しい提案も含まれている点が評価された。新聞紙を骨材、接着剤をグラウトと考えると、違う意味のコンクリート造のようなものの作り方の提案ともとらえることができ、建築スケールの形態を成立させることを目指した、さらなる発展を期待したい。

[22] クッツキクツケ

面ファスナーの原理を用いた構造システムの提案であり、誤差を許容しながら作ることができる点は非常に可能性を感じさせる作品である。一方で、スケールアップ時の具体的な課題と対策が不明確であり、面ファスナーの性能そのものに制約があるのではないかと指摘があった。面ファスナーでなぜ形が維持されるかについて力学的な説明がなされていなかったが、接合部にわずかな隙間ができることで適度な曲げ剛性が生まれ、形状が維持できる可能性があるとの興味深い見解が示され、さらなる検証が求められるところである。

以上



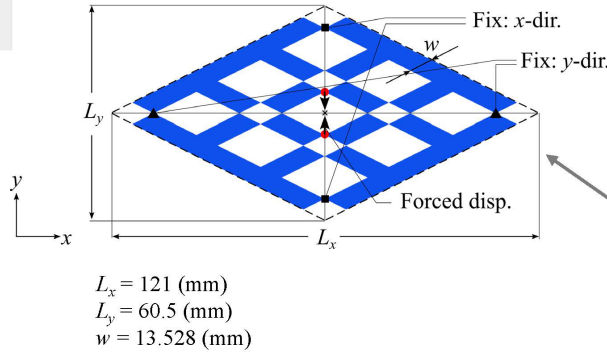
Multi-stable Rhombus

多段階のエネルギー安定状態をもつ曲面ユニットをブロックのように繋いで製作する、複雑怪奇な曲面構造を提案する。曲面ユニット生成時の面内から面外への力のシェア、接続に伴うユニット間の境界部分のシェア、クリエイター間での曲面ユニットのシェア、曲面を創造するときのアイデアのシェア、生成した曲面の使い方のシェア…。シンプルなかたちと機能が多段階のシェアリングを生み、我々の創造活動それ自体をシェアラブルにする。

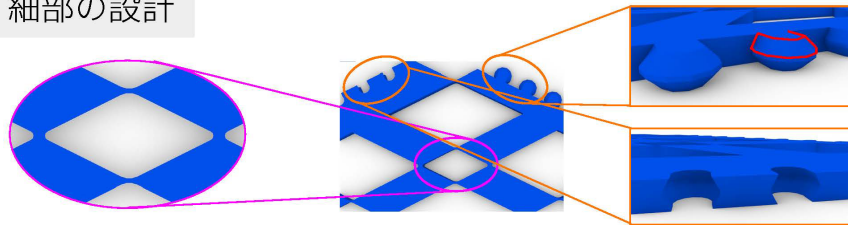
<p>Tie</p> <p>面内から面外への力をシェア</p> <p>面内変形する四辺形機構</p> <p>面外変形する帯状部材</p> <p>プリンタブルな菱形シート構造</p>	<p>ローカルな変形状態を"+"と"- "で表現</p> <p>安定状態A</p> <p>安定状態B</p> <p>安定状態C</p> <p>HPシェルに似た形状</p> <p>平面から弾性変形して得られた曲面ユニットは"ぺこぼこ"変形する。スナップスルー座屈によりエネルギー安定状態を瞬時に行き来する。</p> <p>一つのユニットを複数の安定状態がシェア</p> <p>マルチステーブル性をもつ曲面ユニット</p>	<p>曲面ユニットを帯状部材の境界で接続する。ユニットどうして境界をシェアし、スケールと形態を拡張する。</p> <p>曲面ユニットの接続</p>	<p>足りないユニットはみんなでシェア</p> <p>つくり方をシェア</p> <p>使い方をシェア</p> <p>どんな曲面をつくる？アイデアをシェア</p> <p>複数ユニットを組み合わせた曲面</p>
--	---	---	---

菱形シートのご設計

青色領域で示す菱形シートは点線の菱形境界から大小2種類の相似な菱形領域を削除して得る。大小の菱形と菱形境界の相似比は1:2.10とする。 L_x と L_y の比は任意に調整でき、部材幅 w はその比に依存する。



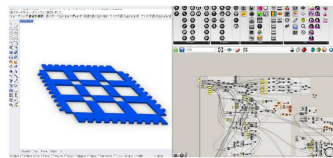
細部の設計



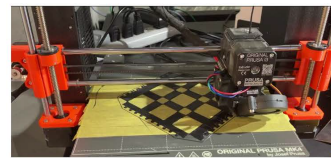
菱形シート構造の四辺形機構の頂点間や外部の帯状部材間の節点は、製作性の観点から菱形空隙の角にフィレットをつけ小さな幅を与える。菱形空隙の内角の大きい方のフィレット半径を2.5、小さい方を0.6と定める。

凸部と凹部をもつ嵌合型の接続機構を帯状部材の境界に配置する。凸部は円柱を2つの鏡映な円錐台で挟んだ形状とし、凹部は元の領域からくり抜いた形状とする。接続機構の取り付けのため菱形シートには十分な厚みを与え、ここでは3 mmとする。

製作の手順



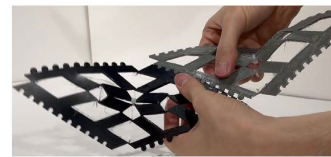
Rhinoceros/Grasshopper上で設計した菱形シートのG-codeを出力する。サポート材は不要である。



3DプリンターにはOriginal Prusa i3 MK3S (Prusa Research)を使用し、材料にはTPU95A (e-SUN)を用いる。



結束バンドを用いて中央の2点を結び曲面ユニットを生成する。



複数ユニットを接続するには、接続機構の凸部を凹部に差し込む。

数値シミュレーション

Rhinoceros/GrasshopperのプラグインKangaroo2を用いて曲面ユニットの生成過程と安定状態の推移を再現し、計算可能にする。

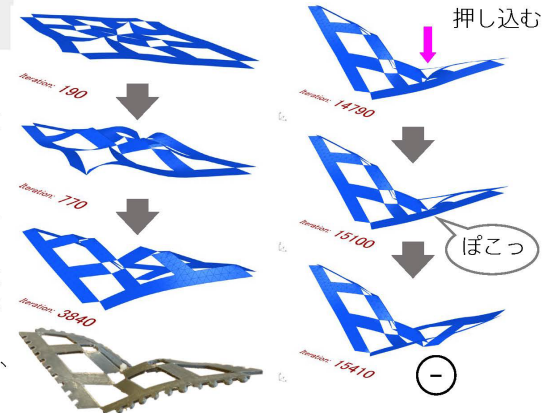
左図内の四角形と三角形のマーカーで示した節点は、それぞれx方向とy方向のみを拘束したローラー支持とする。曲面ユニットの生成には、赤色のマーカーで示した2節点を、それらを結んだ線分の中点まで変位させる。変位と同時に、これら2節点を通る直線の周りにおける程度大きな回転変位を与えて曲面の生成方向を指定する。

ヤング係数 E を35 MPa、ポアソン比を0.4とする。シートの厚みを t で表すと、面内剛性と面外剛性はそれぞれ Ewt 、 $Ewt^3/12$ と書ける。



形状のスタディ

曲面ユニットのマルチステーブル性と複数ユニットの組み合わせにより膨大な種類のかたちが生まれる。その一部を以下に示す。



曲面ユニットの生成。収束値は 1.0×10^{-6} とする。計算は数秒で収束し、模型と近い形状が得られる。

安定状態から別の安定状態への推移。模型と同様に、スナップスルー座屈の発生を確認した。

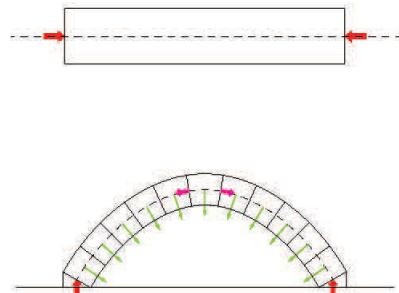
菱形シートのBrepをコンポーネント[Combine & Clean] → [TriRemesh]で分割する。エッジ長さの目標値は5 mmとする。

桶箱工法_ver3

桶や樽のように、複数の板を外から締め上げて成立する構造体では、平面幾何だけでなく、立体的な自由曲線も描けるのではないか。そんな問いから始まったこの提案は、中に通っているテンション部材を締め上げる事でこの形状が成立している。
この工法を私は「桶箱工法」と名付けた。

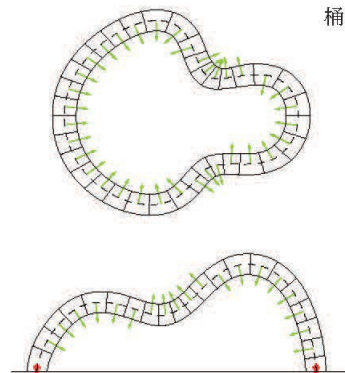


Concept



ポストテンション工法

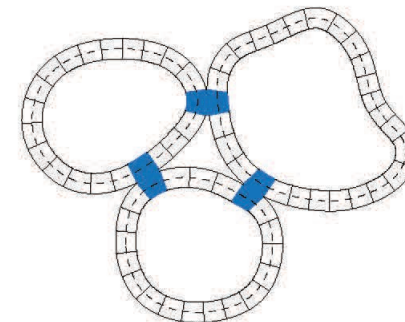
- ・一物体に対して1軸方向のプレストレスを与え、引張応力に対する強度を上げる
- ・複数の物体に対してテンションを与えることで連続体として扱う
- ・この場合、力の集中心が一点に収束することが理想である



桶箱構法におけるポストテンション

- ・テンションを与えた結果、力のベクトルが内外入れ替わる、変曲点をもつ自由曲線であった場合でもこの工法が可能であること
- ・パネルとして近似する際、その向きやテンション部材の位置によって回転モーメントに対する最適化を行う事で成立を目指す

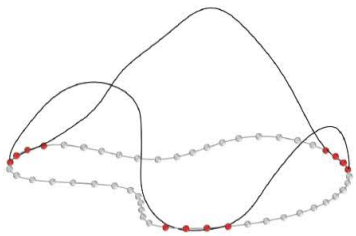
シェアラブルに展開させる



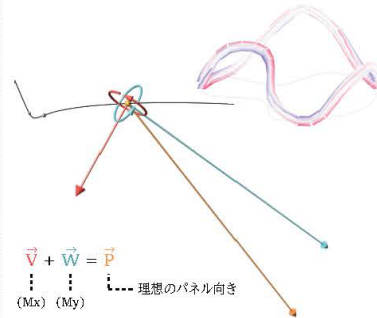
本提案では、桶箱工法による形状を面として展開していく。三次自由曲線の各交点において、その接線方向が同一平面上にある場合、1つのパーツを共有することで自由曲線が連結していく。また、曲面を作る上で、自由曲線による近似について考えることもできる。これにより、様々な諸条件によって変化していくことができ、形態のパリエーションに対して、建設工法が単純であるのもこの工法の特徴といえる。

Design1 & Analysis

modeling

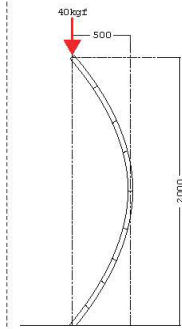


平面の自由曲線をインプットとし、これに対して操作を行っていく。長さによって曲線を等分割し、アンカーポイントを決定後、kangarooを用いて曲線を立ち上げる。その際、各点における曲率が、一定の範囲内に収まるよう制約を加え、制作可能な曲線として立ち上げる。

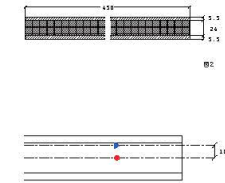


optimization - panel

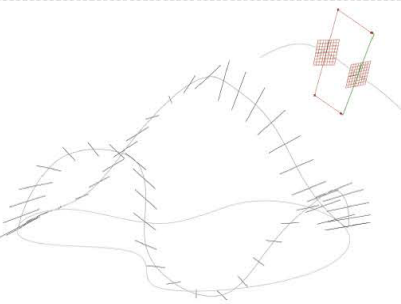
曲線を平面に近似していくにあたって、理想の切断線の向きを考えていく。曲線を一体化した梁として構造計算した際、各点に置ける回転モーメント (M_x, M_y) を合成したベクトルにパネルの強軸を向けることで、圧縮された際の応力荷重を引き上げられると考える。



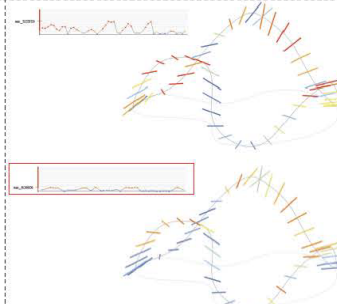
optimization - tension



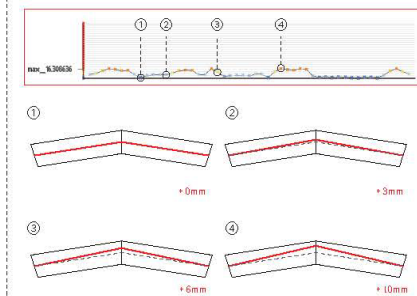
テンション位置を偏心させることによる応力の変化について考える。図1,2のような条件の場合、オイラーの式を用いると、約200kgのテンションをかけたとき、応力応力内に収まる。そこで、図3のようにテンション材を芯を通した場合は10mm 偏心させた場合を考えると、約1.7倍の許容応力を得ることができることが計算結果からわかった。



立ち上げた曲線を等分割した点において、各点における接線方向と主法線方向からなる plane を定義し、これを基に曲線をパネル化するよう近似していく。スタートの plane を設定し、その平面内における任意の角度の直線を次の plane に対してプロジェクトする操作をループさせることでパネルのモデリングを行う。

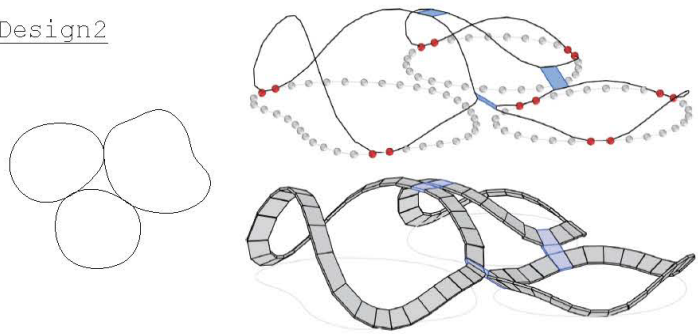


理想のパネル方向と前手順から得られた切断線の内積の最大値を最適化する。この時のパラメーターは、曲線のコントロールポイントの振動とした。結果としてグラフのように、各点における変形量が減少する傾向が確認できた。



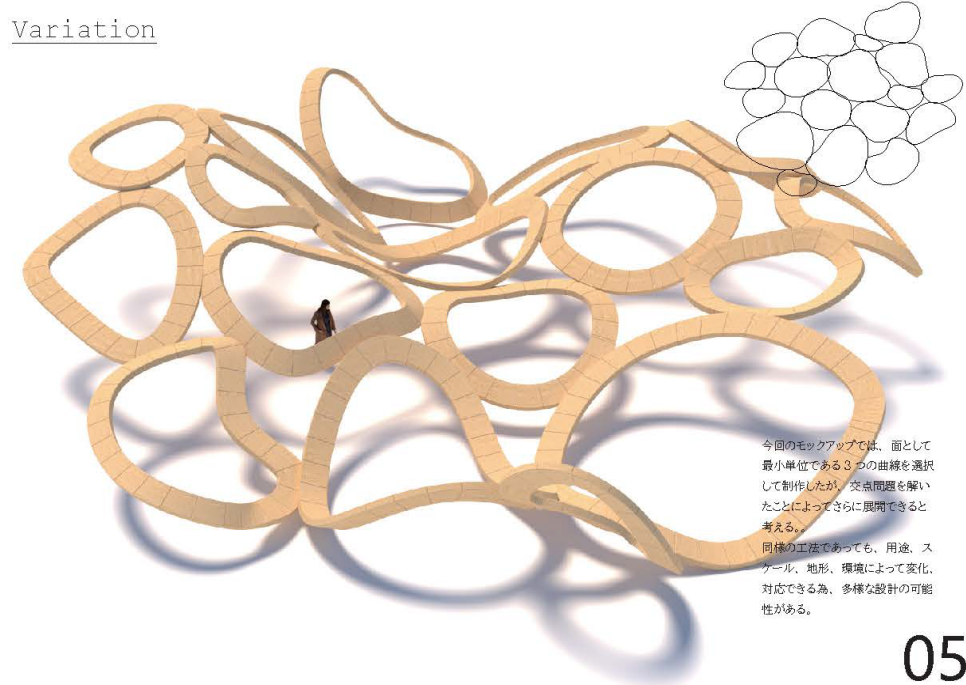
上記の計算結果から、各部位において、圧縮面におけるテンション位置を調整することで、応力荷重を引き上げる事が可能ではないかと考える。最適化から得られたグラフを参考に、変形量によってテンション位置を4段階に分けて調整する。統一してすぎないのは、テンションをかけていく工程の、作りやすくなるからである。

Design2



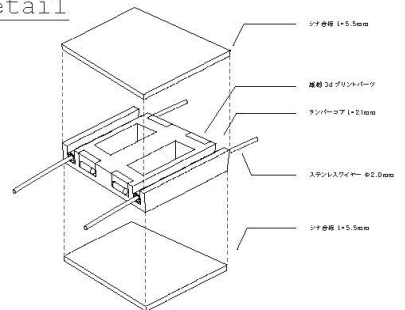
本提案では、複数の有曲線が共有する同一平面をもったまま立ち上がることで、面として展開させることに挑戦した。今回はその中で、最小単位となる3つの曲線を選択し制作する。kangarooを用いて平面の状態から立ち上げる際に交点を形成する4点に拘束をかけた。この際、交点の同一平面をキープしながら、制作可能なパネルングを行うためのパラメーターが、構造最適化のパラメーターと一致してしまうことが問題点としてある。

Variation



今回のモックアップでは、面として最小単位である3つの曲線を選択して制作したが、交点問題を解決したことによってさらに展開できると考える。同様の工法であっても、用途、スケール、地形、環境によって変化、対応できる為、多様な設計の可能性はある。

Detail



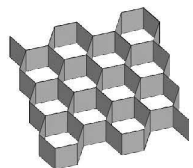
今回のモックアップでは、テンション材にワイヤーを用いている。段階的にテンションをかけられるようラチェットタイプの巻き取り金物を用いている。モックアップでの失敗として、
・圧縮が強すぎて、面内に割れが生じてしまうこと。
・ワイヤーの終端において、パネルと鋭角に引っ張ってしまうと、パネル端部に不要な圧がゆかり割れてしまうなどが起こった。



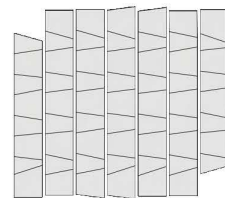
Foldable Honeycomb

ハニカム構造は、剛性を大きくしたい、費用・材料を少なくしたいといった目的がある中での1つの解だと思われる。さらに先行研究^[1]において、ハニカム構造をセルの壁が120°で接するねじれのない立体的な構造として研究され、設計方法の紹介と設計できる限界を議論している。そのような機能がある中で、セルの壁が120°で接する条件を緩和し、設計者の負担の軽減、必要部材の削減、折り畳み>運搬>展開のしやすさといった機能をより共有できる形態創生を曲面からの逆解析で行った。

提案するハニカム構造は、設計者が曲面やハニカムの密度を入力することで形態創生を行うため、設計の負担が軽減される。そして、帯状へ折りたたむことができるため、歩留まりがよく、折りたんで運搬しやすくなる。さらに、展開時にはセルの壁がねじれのない平面であるため、ねじることのできる特殊な部材は必要ない。



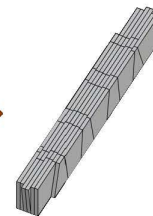
機能の共有
 ・設計者の負担の軽減
 ・必要部材の削減
 ・折りたたみ>運搬>展開のしやすさ



必要部材の削減



組立



折りたたみ>運搬>展開のしやすさ

展開



折りたたみ



[1] Jiang, Caigui, et al. "Freeform honeycomb structures." *Computer Graphics Forum*. Vol. 33. No. 5. 2014.

形態創生の手法

ハニカムの構成と制約条件

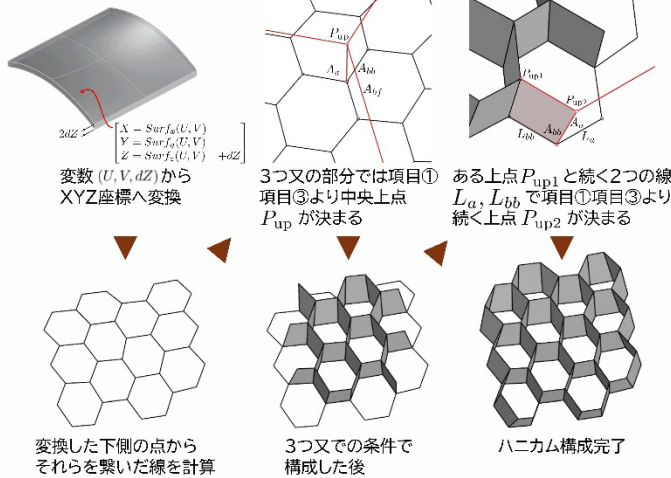
今回のハニカムを構成するとき、以下の条件が必要となる。

- ・部材幅は一定になる 項目①
 - ・入力した面形状へ展開される 項目②
 - ・ハニカムの A_a, A_{bf}, A_{bb} は $A_{bf} = A_{bb} = 180^\circ - A_a$ とすることで、折り畳むことができる角度となる 項目③制約③
 - ・展開時、セルの壁が平面である 制約④
 - ・ハニカムの六角形の辺のうち、折り畳みで分けられる前辺3つと後辺3つのそれぞれの合計長さが同じ 制約⑤
 - ・折り畳み時に形状が帯状となる 制約⑥
 - ・辺の長さが指定した長さより短い 制約⑦
 - ・入力した面形状の四辺側にある点は四辺上へ固定させる 制約⑧
- 以上でハニカムを構成し、制約関数の値を算出する。

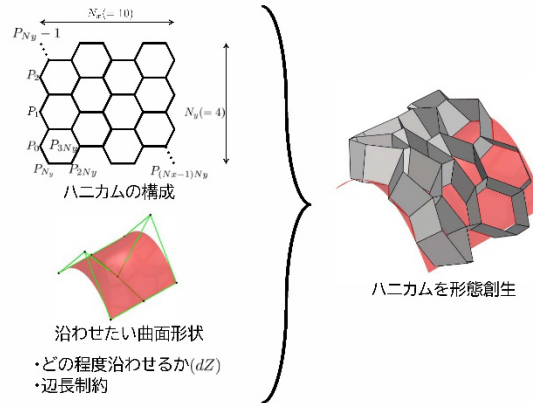
ハニカム構成時に考慮する項目

制約
追加の形状制約

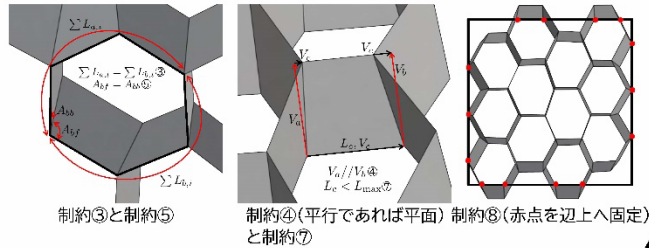
変数とハニカムの構成



このハニカム構造は制約条件のみを入れて、曲面からの逆解析を行った。
 入力: 曲面モデル, ハニカムの構成 (N_x, N_y) , Z方向のずれ幅,
 ハニカム下辺の長さ上限である。
 この形態創生ではrhino3dm.py^[2]で曲面上の点を算出し、
 pyOpt^[3]で制約条件を満たすものを探し逆解析を行う。



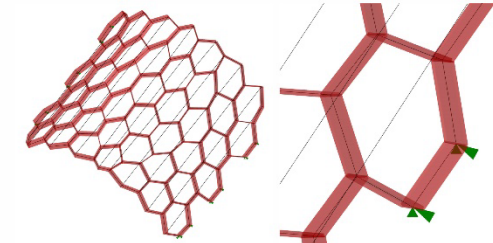
制約関数



構造解析

以下の条件で梁要素の構造解析を行う

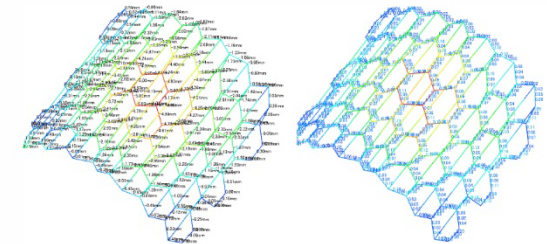
- 大きさ 8m x 8m
- 材 2x12木材とワイヤー径5mmのワイヤー
- 荷重 自重のみ
- 節点 剛節合
- 境界条件 Y, Zピン(スラスト方向と鉛直方向に対応)



OpenSees for Grasshopper^[4]で解析を行った。

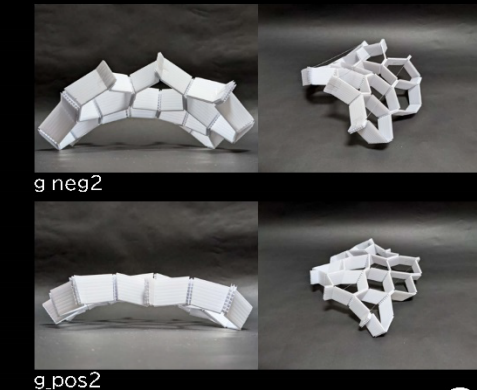
Z方向の最大変位は5.17mm

NQMでの検定比の最大値は長期の場合最大で0.18となった。



モックアップ

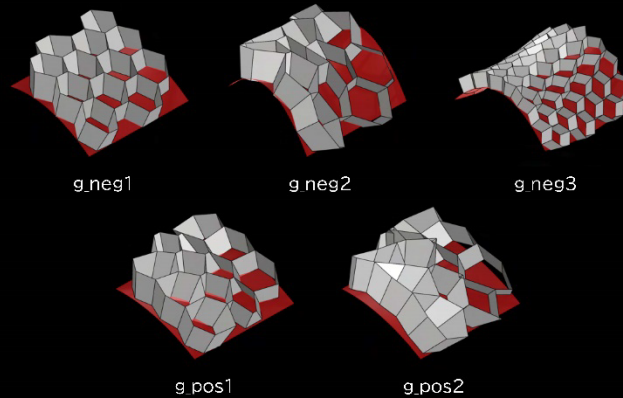
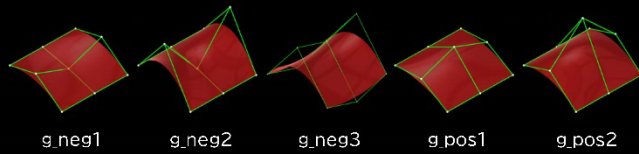
A4サイズのプラダンとナイロン線でのモックアップを作成した。
 入力する曲面がガウス曲率が負のものとして正のもので行っている。
 折りたたみ>展開は問題なく可動したが、
 展開時は展開方向への拘束だけでは形状が決まらず、
 ナイロン線で収縮方向への拘束を行うと形状を決めることができた。



逆解析結果

5つのモデルで逆解析を行い、形態創生をしている。
 以下に入力したデータと結果を示す。

モデル名	ガウス曲率	曲面サイズ	N_x, N_y	辺長 しきい値	dZ	最適性条件	制約関数最大値
g_neg1	負	4x4	10, 4	0.65	0.1	OK	4.51×10^{-6}
g_neg2	負	4x4	10, 4	0.73	0.1	OK	4.54×10^{-7}
g_neg3	負	8x8	14, 8	0.81	0.2	NG	5.76×10^{-6}
g_pos1	正	4x4	10, 4	0.66	0.1	OK	4.30×10^{-7}
g_pos2	正	4x4	10, 4	0.73	0.22	NG	4.42×10^{-6}



[2] Scott D. Calling Compute with Python. <https://developer.rhino3d.com/guides/compute/compute-python-getting-started/> GitHub: <https://github.com/mcneel/rhino3dm> [Accessed 22 Sep. 2024]. Robert McNeel & Associates.
 [3] Perez, Ruben E., Peter W. Jansen, and Joaquim RRA Martins. "pyOpt: a Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 45 (2012): 101-118.
 [4] Shinnosuke F. OSforGH. <https://github.com/strdesigner/OSforGH> [Accessed 22 Sep. 2024]



[概要]

シザーズ構造と傘の機構を組み合わせた、展開可能な任意の三次元曲面構造物の設計手法を提案する。本提案の主な特徴は、傘の骨組みに相当する部分に、曲線上に展開可能なシザーズ構造を適用^(※1)した点である。さらに、多様な曲率の実現とスムーズな開閉を可能にするため、部材の長さを可変とするアルゴリズムを考案した。提案手法の有効性を確認するため、実寸モデルを制作し、その動作や形状の妥当性を検証した結果、複雑な三次元曲面の展開・収束における新たな可能性を示した。

[背景]

シザーズ構造は、広範な分野で活用されており、その一つに建築への応用がある。この構造は、①軽量化であること、②コンパクトに折り畳めること、③展開時に大きな面積を確保できるといった特徴を持つ。しかし、シザーズ構造はその機構の複雑さに加えて、大量生産を想定した規格化された部材で構成されることから、デザインが単調になりやすい。本提案では、簡単な法則に基づいて複雑な形状を迅速に設計できるアルゴリズムを構築し、任意の三次元曲面に展開可能なシザーズ構造を設計する手法の確立を目指す。

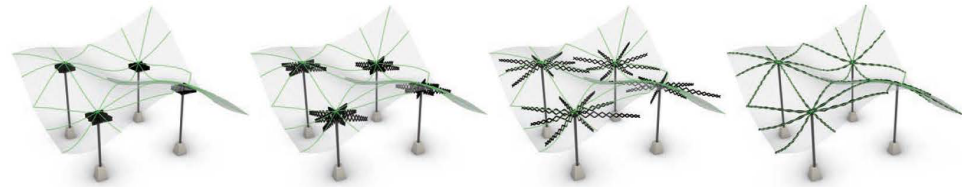
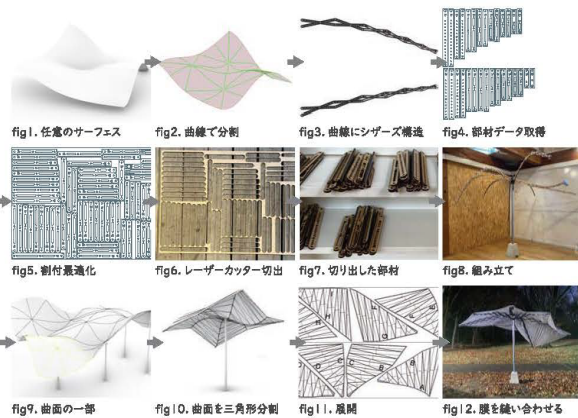


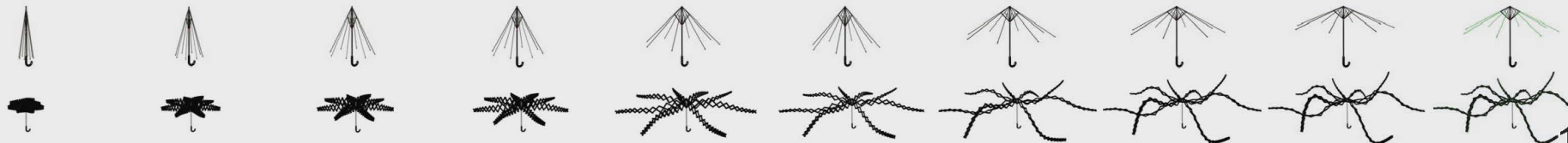
fig 0. <シミュレーション> 開閉の様子

[制作の流れ]

制作の流れは、次に示す通りである。まず、任意のサーフェスを作成し [fig 1]、その曲面を曲線で分割する [fig 2]。その曲線にシザーズ構造を展開させ [fig 3]、それぞれの部材データを取得する [fig 4]。部材のデータは全て、長さも交点の位置も違うため一つの部材を自動的にナンバリングする。ナンバリングされた部材を、端材が最も少なくなるよう割付を最適化 [fig 5] しその情報を元にレーザーカッターで切り出しを行い [fig 6]、骨組の組み立てを行う [fig 7]。最後に曲面 [fig 9] を三角形分割し [fig 10]、それを展開 [fig 11] して縫い合わせる [fig 12]。



[(※1) 傘の骨組みに相当する部分に、曲線上に展開可能なシザーズ構造を適用]



[参考文献] 李, 惠文 Design and analysis for configuration of scissor structure with arbitrary curve 政策・メディア研究科修士論文 (2020)

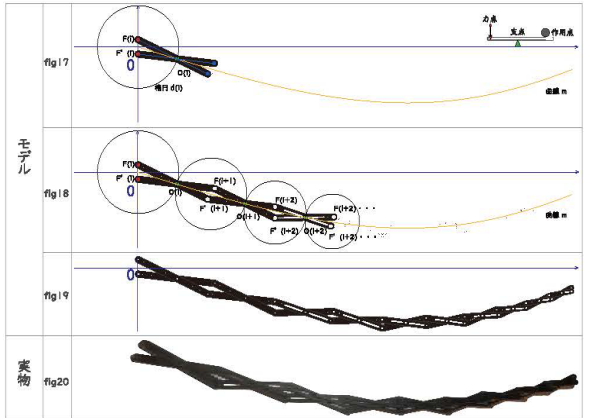
[モックアップの詳細]

上下機構は3Dプリンターで出力する。両脇にレールを設置することで、上下機構（黄色部分）が垂直に動作するように設計されている。このレールにより、骨組がねじれることを防ぎながら、スムーズな上下運動が可能となる [fig 13]。また、上下機構にストッパーを取り付け、点 A と点 B を固定して目標形状を維持している [fig 14]。さらに、構造の軽量化を目指して骨組の不要部分には穴をあけて取り除き、全体の重量を削減しながらも、必要な強度を維持できるよう工夫を施した [fig 15]。特に、骨組の根本部分は開閉の際に大きな力がかかるため、シザーズ構造を三重に重ねることで強度を保ちながら開閉に対応させている [fig 16]。



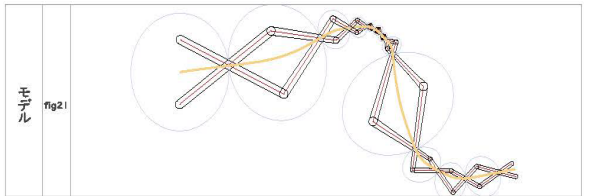
[原理]

多様な曲率の実現とスムーズな開閉を可能にするため、部材の長さを可変とするアルゴリズムを考案。この原理より、骨組の先端に近づくにつれて部材を短くすることで力点 (fig 17 赤丸) にかかる負荷が減る。右図は、モデル [fig 17-19] と実物写真 [fig 20] である。以下にアルゴリズムを示す。
 ① O(i) の位置 (b(i) > 0)
 点 F(i) 点 F'(i) を焦点、b(i) を短軸の値とする楕円 d(i) と曲線 m の交点が O(i) となる。 [fig 17]
 ② 点 F(i+1) 点 F'(i+1) の位置 (0 < t < 1)
 $F(i+1) = O(i) + t \cdot F'(i) - (1-t)O(i)$
 $F'(i+1) = O(i) + t \cdot F'(i) - (1-t)O(i)$
 ③ 点 F(i+1) 点 F'(i+1) の位置 (0 < t < 1)
 $F(i+2) = O(i+1) + t \cdot F'(i+1) - (1-t)O(i+1)$
 $F'(i+2) = O(i+1) + t \cdot F'(i+1) - (1-t)O(i+1)$...



[曲率]

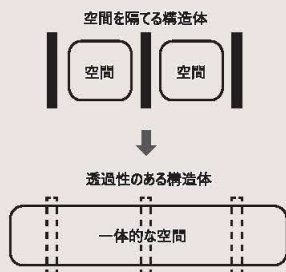
シザーズ構造が展開できる曲率の限界は曲線の曲率と部材の長さの相互作用によって決定する。骨組の先端に近づくにつれて部材を短くする際は一定の比率で小さくしていくが、曲率に応じて部材の長さを調節することで理論上どのような曲線にもシザーズ構造を展開することができる。 [fig 21]



～双曲面レシプロカル構造による空間デザイン～ 曲率の反転



■ シェアの解釈



自重や外力に抵抗する「柱」は一般的に密実であるため、構造体が意匠的な空間を分断する存在となっている。

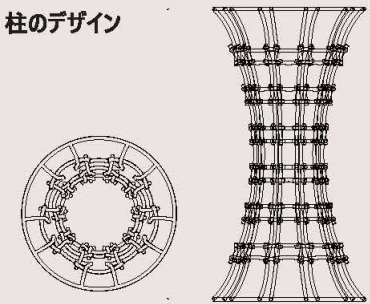
一つの大空間を構造と意匠でシェアするために、「透過性の高い構造体」を提案する。そして、その場にいる人々が、体験や思い出を「シェア」しやすい空間を創出する。

■ レシプロカル構造

「透過性の高い構造体」として、小さな部材同士が力をシェアすることで成立する「レシプロカル構造」を採用した。「レシプロカル構造」の特性を活かし、構造体がデザインに溶け込んだ意匠性の高い空間を創出する。



■ 柱のデザイン

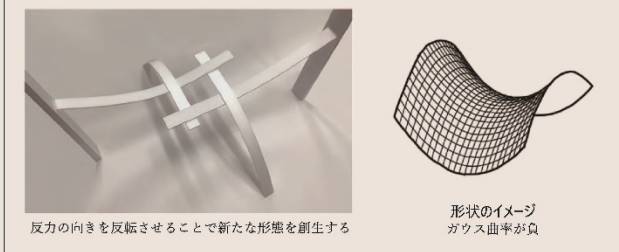


柱部 平面形状 / 立面形状

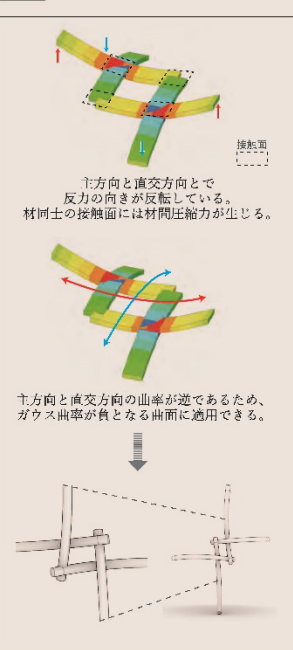
I 双曲面レシプロカル構造の仕組み



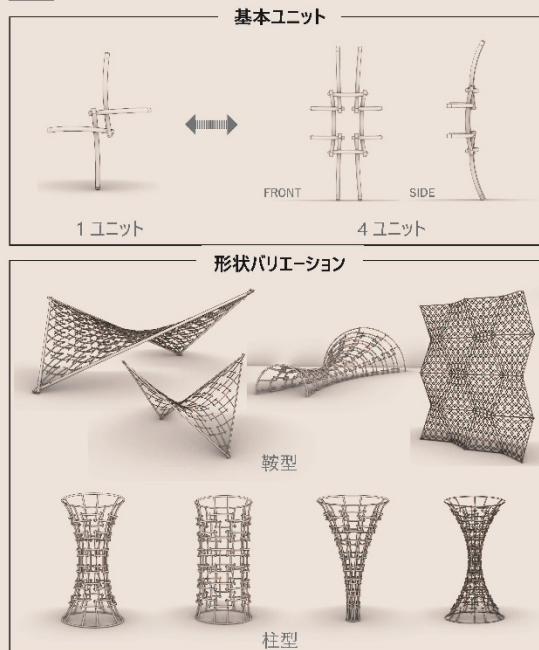
提案するレシプロカル構造 (双曲面レシプロカル構造)



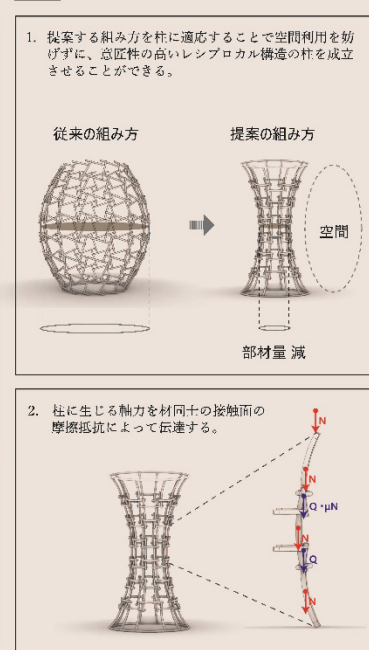
II 構造の特徴



III 形態創生



IV 柱を構成する

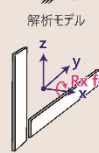


V 双曲面レシプロカル柱の解析

① モデル作成手法

■ 解析モデル

断面：10 mm × 40 mm
材料：木材 (E=10,000 N/mm²)
境界条件：上部 剛床
下部 固定
荷重条件：自重 + 床荷重



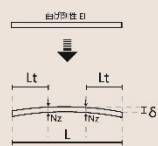
■ 接触面のモデル化

各部材間の接触面のモデル化は、摩擦によってずれが生じないと仮定し、境界条件は面内回転のみ自由とする。この節点間に生じる軸力が材間圧縮力、せん断力が材間摩擦抵抗に相当する。

■ 導入材間軸力算出方法

組立時に部材を曲げることで材間接触面に生じる圧縮力を、導入材間軸力として考慮する。導入材間軸力は、部材の強制変位δにより生じる応力から以下の式より算出する。

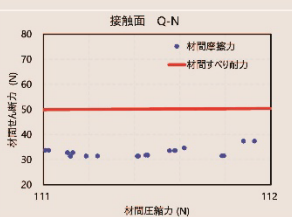
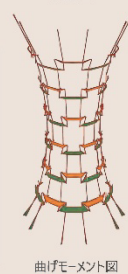
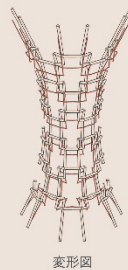
$$N_z = \frac{6EI\delta}{L^2(3-4t)}$$



② 構造架構としての実現性

柱に生じる軸力を、材間摩擦抵抗により伝達できることを確認する。

下図に示すように、全ての材間において、材間摩擦抵抗が材間軸力以下であり、すべりが生じないことを確認した。



③ 形状変化による柱耐力への影響

■ 検討内容

柱の耐力を決定する要因として、接合部と部材の2つがある。同一平面内に存在する縦材の数を「縦材数」とし、縦材数が以下①②の検定に及ぼす影響を検証する。その結果から、形状が柱耐力に及ぼす影響を考察する。

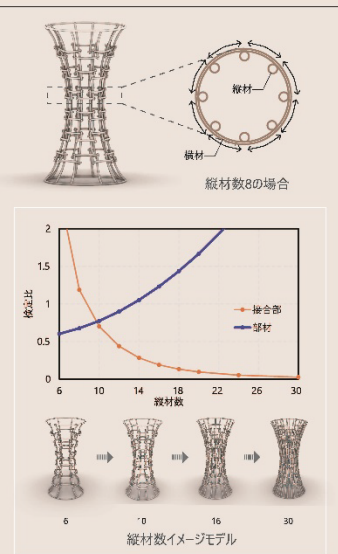
- ① 接合部検定比
材間摩擦抵抗の、材間軸力に対する割合
- ② 部材検定比
導入材間圧縮力により生じる部材応力の、部材耐力に対する割合

■ 検討結果

縦材数が増えると、材間圧縮力が増える傾向となる。その結果、材間すべり耐力が増加し、接合部検定比は減少する。

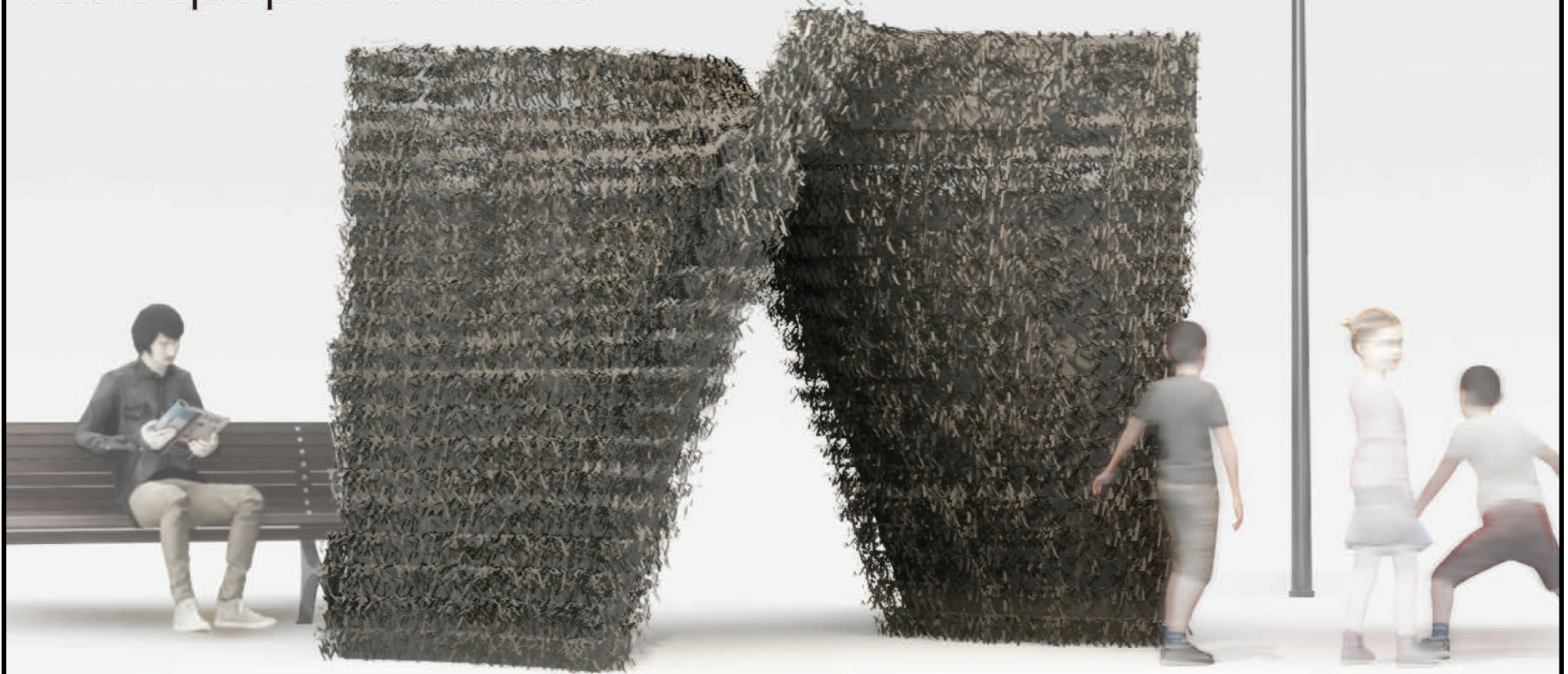
一方で、部材に生じる曲げ応力が増加するため、部材検定比は増加する。

接合部検定比と部材検定比は負の相関関係にあり、縦材数は、求める透過性に対して、断面や材料を選定する必要がある。



※各条件は設計条件と異なる場合があり、必ず設計条件を参照してください。

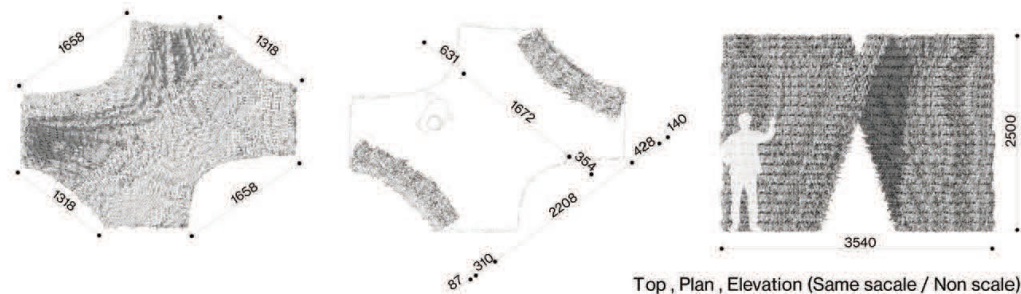
Newspaper Pavilion ～新聞紙を材料とした3D プリント建築～



建築材料のシェアラブル

新聞紙は、都市や地域のどこでも簡単に、手に入る素材であり、パビリオンの制作に必要な材料は地域社会からの「シェア」で賄うことができる。つまり、地元住民や新聞の廃棄物を再利用することで、建設のコストを削減し、**地域のリソースを活かしたプロジェクト**となる。このようなシェアリングのアイデアは、環境にも優しいだけでなく、コミュニティとのつながりを強化する象徴的な取り組みである。

パビリオンの図面



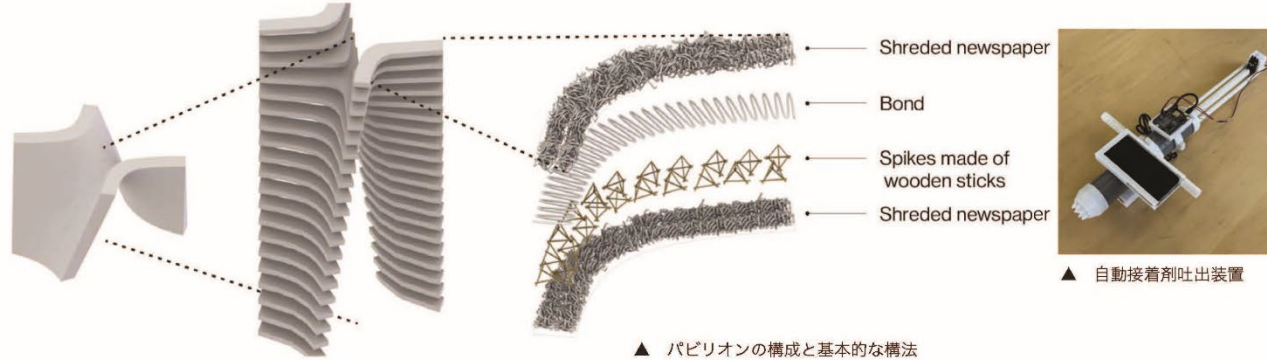
建築技術のシェアラブル

今回開発した自動接着剤吐出装置を、作業者がそれぞれ一台ずつ持つことで、**建設行為の「シェア」**を実現することができる。この装置は位置情報を計測しているため、手に持っているだけで適切なタイミングで自動的に接着剤を吐出することができる。**専門知識を持たない作業者でも建設に関わる**ことができるので、作業の効率化を図ると同時に、建設行為自体を地域コミュニティのイベントにすることもできる。

パビリオンの基本的な構法

パビリオンの形状を 25 層に分割し、そのそれぞれの層を短冊状の新聞紙・スパイク（輪ゴムを使用して割り箸を三角錐に組み立てたつなぎ材）・接着剤・短冊状の新聞紙を図のように重ねて作りながら、上部へと積層させていく制作手法をとる。

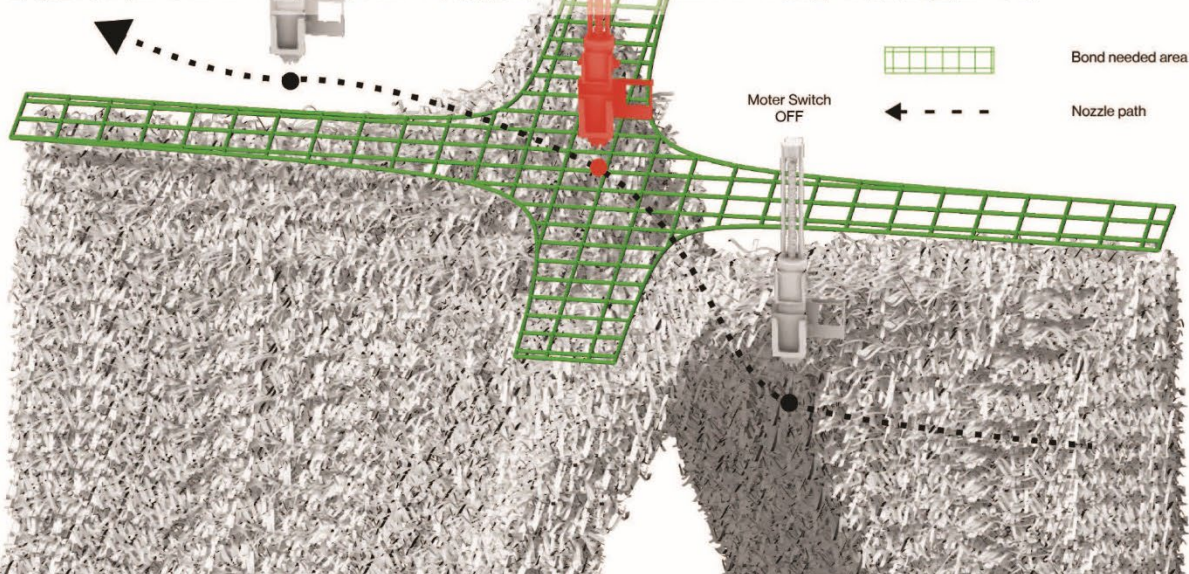
また、接着剤が十分に乾くまで新聞紙によるサポート材を設置した。これにより、下層の硬化を待たずして制作を進めることが可能とする。サポート材はパビリオンが完成したのちに取り除く。



接着剤の自動吐出装置の開発

デザインの特長上 25 層すべての形が異なり、層ごとにスパイクを配置する場所や接着材を垂らすべき位置が変化する。また、層ごとに作業面の高さも変化するため、3次元空間上で作るべき形を指示していく必要がある。そこで 3D モデルを AR（拡張現実）表示しながら制作する方法を採用する。層ごとにどのエリアにスパイクを配置すべきかを確認しながら建設を進めることで、原寸図などを使わずに精度の高いパビリオン建設を実現できる。

そこで、接着剤を垂らすべきエリアに入ると、自動的に接着剤を吐出する自動接着剤吐出装置を開発した。具体的には、3D モデルを 10cm おきに 25 層に分割し、分割したモデルの上面と下面の枠線を取得した。次にスマートフォンの位置情報を用いて、吐出装置が枠線の内側に入っているかどうかを識別する。その結果を Wi-Fi 経由で、吐出装置に取り付けられたコンピュータに送信することで、接着材を押し出すモーターの On と Off の切り替えが行われる仕組みである。



モックアップ

既存の建築材料とは異なる構造的な性質となるため、モックアップを制作した。パビリオンを制作するには様々な観点で、設計したパビリオンが制作可能かどうかを検証した。この検証に基づき、原寸大のパビリオンの制作を行う。



◀ 自動接着剤吐出システムイメージ

面の貼り合わせによる接合は、

重ね代を大きくとれば簡単には外れてしまわない、
ある程度ずれてもつなげることができる、
貼り方によって形が全く変わる、

というように**手軽で自由**なイメージがある。

一方で、広がり方は**平面的**なものにとどまりがちである。



面を曲げ、貼り合わせて拘束した場合、
立体的な形状ができることがある。(例:円錐)



ある程度曲げられる材料の場合に限ると、貼り合わせ接合によって立体的に広げられる可能性がある。
本提案ではここに着目する。



上の図はどちらも共通の形の面を6枚貼り合わせて作った曲面である。同じ形、同じ数でもできる形状が変わるのは貼り方(重ね代のとりかた)の違いによるものである。

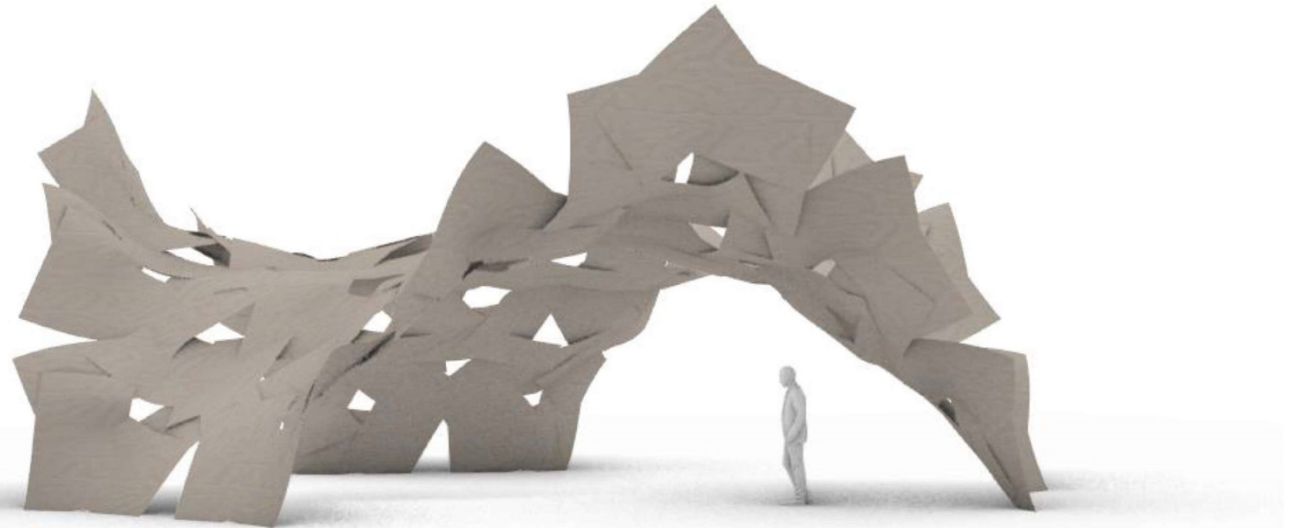
つまり、貼り方を変えることで、
出来上がる曲面の形を変えることができるということになる。

ハリメンシエル 重ね代を調節して同形状面材を貼り合わせ接合することで作る曲面

できた曲面をさらに貼ってつなげることで、
より自由で大きな曲面を作成することが可能である。

以上のプロセスにより、

**手軽で自由な貼り合わせ接合を用いて、
可展面に限らず、
どんな曲面も再現して構築できる。**



シェアラブルな建築

属性の異なる複数の人間によって作られ、
属性の異なる複数の人間によって使用される

→ **ユニバーサルな手法** × **多様で自由な形**

単純かつ同形状の加工

簡単かつ施工誤差に対応しやすい
貼り合わせ接合による組み立て

目標形状にかかわらず共通の工程

用途に合わせた自由な形状

建てた後から形を変えられる

アクロバティックさにはやや欠ける構法だが、小さなものをつなげて大きく作るというどんな人にもなじみやすい作り方でもある。また、作ったものにさらに付け足す、もしくは一部を取り除くという操作とも相性がよく、用途に合わせて建築の形を変えていくことが可能である。

曲面の生成プロセス

1. 曲面のメッシュ化

目標とする曲面を三角形メッシュに分割し、エッジの長さがなるべく同じ長さになるように調整する。



Galapagosを用いてエッジ長さを平均からのずれが10%以内となるような調整をした。

2. 円錐状曲面の配置

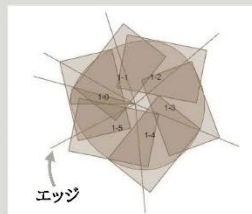
各頂点に円錐状の曲面をフィットさせる。メッシュの配置次第では鞍型のような負曲率の曲面も生成される。



エッジの中点を結ぶ曲線からメッシュの頂点へ押し出して円錐状の曲面を作成

3. 重ね代の決定

円錐状曲面の展開図を取得し、展開図上のもともメッシュエッジがあった位置に長方形を配置し、目標形状を作るための重ね代を決める。



展開図の中心と長方形の距離をどれだけ離すか、エッジに対してどれだけ回転するかを調整した。

4. 面材の貼り合わせ

得られた重ね代通りに面材を貼り合わせる。



同じ形状の長方形の面としてトランプを使用した。

5. 曲面ユニットの形成

展開図から円錐(または鞍型の曲面)を作るのと同じ動作で最後の一枚を貼り合わせて面材に曲げを導入し、曲面ユニットを作る。



6. ユニット同士の組立

曲面ユニット同士を重ね代の通りに貼り合わせて曲面をつなげていく。



←ユニット間のある範囲は共通の円筒の一部のような形状となっており、ユニットとユニットを接合するために新たに面を曲げる必要はなく、単純な貼り合わせで接合できる。

目標とする曲面を入力することで面の重ね方のデータを自動で出力する。使用する面材の形状によって配置の微調整も可能である。機械制御で加工する場合は、貼り合わせ接合用の穴などまで加工するとそれに従って貼り合わせるだけで目標の曲面を生成できる。一方、手加工で作成する場合、目標形状を球面の一部のような対称的なものとする事で重ね方の種類を1,2種類まで減らすことができ、加工のシステムに合わせた形態創生が可能である。

曲面ユニットの形成は地上で落ち着いて行うことができるが、ユニット同士の接合は高所での作業や材を支えながらの作業、速さの求められる作業など、厳しい環境となることがある。そのため、面材への曲げの導入はすべて曲面ユニットの形成の段階で行えるような作り方としている。同様に、加工はやり直しがきかず負担が大きいため、角度のつけ方は罫書きによって制御し、加工自体は直角の切断のみとしている。

実際に作る



紙のような材料では設計通りに曲面を生成できることを確認した。すべての重ね代が異なるためこのままでは作成に時間がかかる。



手で一つ一つ位置合わせる作業を省くため、レーザーカッターで穴をあけ、スナップボタン(接合具を想定)で留める方式を検討した。



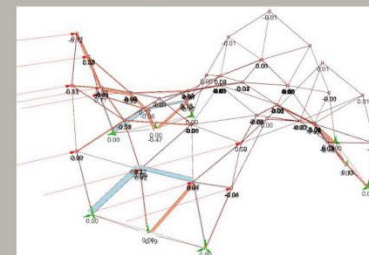
目標曲面の対称性を高め、作成を容易にした。この曲面の場合重ね代の種類は3種類となる。



実際に建築を作ることを考えると強度、剛性がある程度高い材料を使用する必要がある。そこで、木材を使ってより大きなスケールで曲面を生成するための検討を行った。面材は450×300×2.5の合板を使用した。

解析・接合部の検討

2.5mm厚の合板を材料に用いることを想定し、荷重時の応力に対して貼り合わせ接合は十分に耐える接合となりうるかを簡易的に検証する。メッシュのエッジをつないだ線材でモデル化した。実際は線材端部の回転剛性と線材中央部に存在するユニット同士の接合部の軸剛性などを考慮する必要があるため、耐力に限定して検討する。



上図は風速10m時の風荷重を想定している。貼り合わせた面と面の間にかかる最大のせん断力は0.5kN程度である。材料が薄いため自重による応力はこの値と比較して小さく0.1kN程度である。



←木材用のねじ(径3mm)を用いて接合
一本当たりの降伏耐力は約33N(木材が降伏)

風に対してはユニット間の接合部に15本程度のねじが必要であるという結果を得た。この厚さでは風に極端に弱い構造となるため屋外で使用する場合はより強度の高い材料の仕様が望ましい。また、接合に用いることができる面積の広さをより活かすために接着を併用するなどの方法が考えられる。

第19回コロキウム構造形態の解析と創生 2024

2024年11月

編集

著作人 一般社団法人 日本建築学会

〒108-8414 東京都港区芝5丁目26番20号

TEL 03-3456-2051

FAX 03-3456-2058

<https://www.aij.or.jp>
