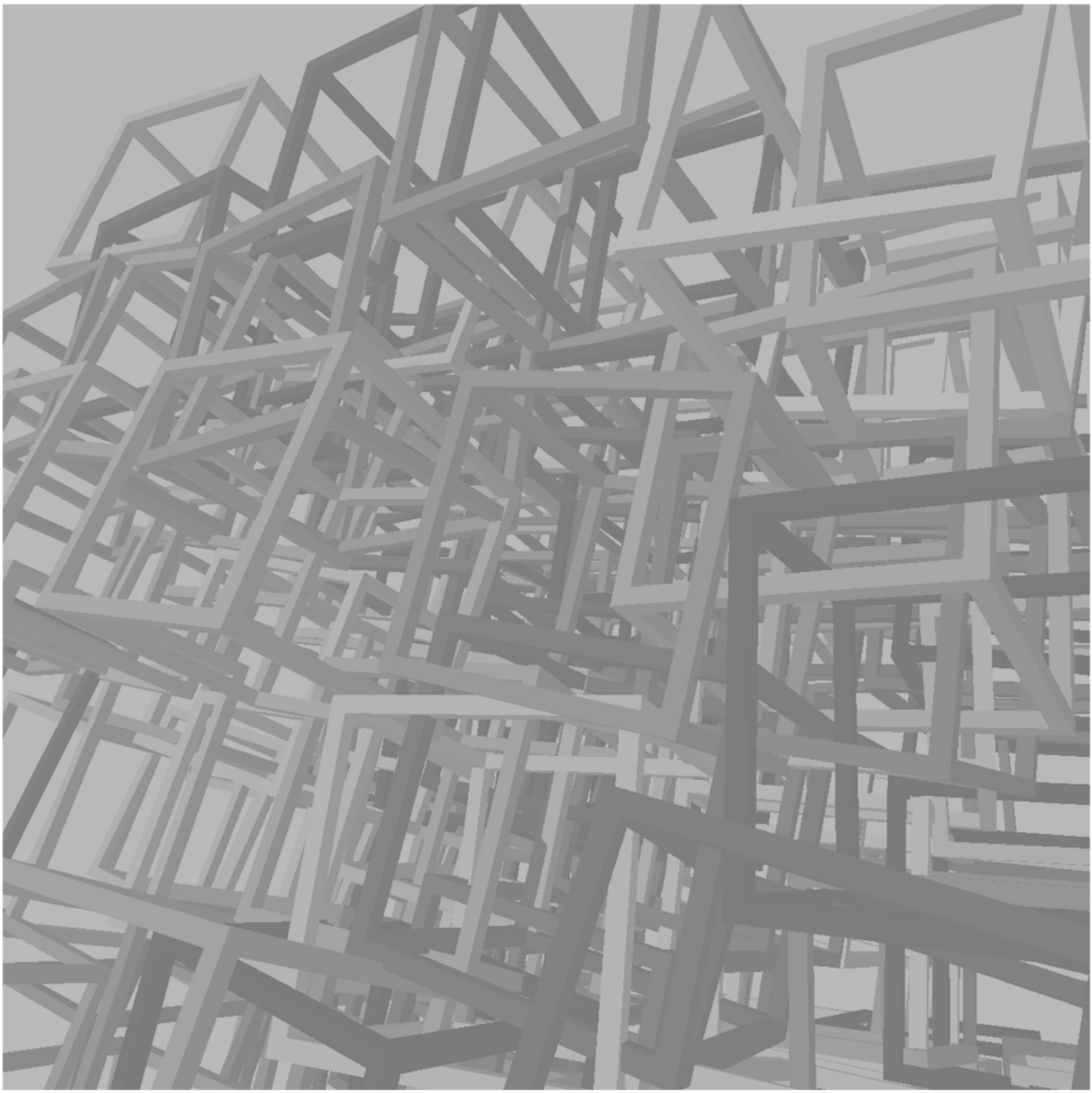
第 20 回 コロキウム

20th Colloquium Analysis and Generation of Structural Shapes and Systems 2025

構造形態の解析と創生 2025



開催日:2025 年 10 月 10 日, 10 月 11 日, 10 月 12 日

主催　日本建築学会

構造委員会　シェル・空間構造運営委員会　構造形態創生小委員会

構造委員会　応用力学運営委員会　構造最適化と統合設計小委員会(協力)

後援　建築情報学会

ご案内

本書の著作権・出版権は（一社）日本建築学会にあります。本書より著書・論文等への引用・転載にあたっては必ず本会の許諾を得て下さい。

コピーも私的利用の範囲を超えることは法律で禁じられております。

一般社団法人　日本建築学会

趣　旨　説　明

近年の建築の設計プロセスにおける 3D-CAD や BIM の利用は，意匠，構造，設備，施工の連携を強め，また，これまで不可能であった複雑な形態の構造物の建設も可能にしました。また，デジタル・ファブリケーションの技術が普及し，建築のデザインに大きな変化を与えつつあります。実現可能な建築表現の自由度が急速に増すなかで，建築物の形態をどのように決定すべきかという問題について，今後更に深く考えていく必要があります。

本コロキウムは 2006 年度から毎年開催しており，今年で 20 回目を迎えます。これまでに，構造形態創生，構造最適化，アルゴリズミック・デザインといった建築構造物の形態を創り出すための理論・技術に関する研究や，実際のデザインへの応用事例などが数多く紹介され，活発な議論が展開されてきました。これらの理論・技術は一過性のものではなく，本質的なニーズの上に成り立った重要な建設技術であり，新しいコンセプトや最新のアルゴリズムなどを取り入れながら，議論を重ねて今後も発展させていく必要があります。

本年度開催する「第 20 回 コロキウム構造形態の解析と創生 2025」では，これまでと同様に形態創生の理論・技術に関わる研究者，技術者が一堂に会して最新の情報を交換すると同時に，理論・技術だけでなく，それらを具体的な建築物，プロジェクトなどに応用した事例紹介についても議論することで，これらの研究・技術分野が益々発展することを期待して開催されます。

2025 年 10 月

主催　日本建築学会

シェル・空間構造運営委員会　構造形態創生小委員会

応用力学運営委員会　構造最適化と統合設計小委員会（協力）

後援　建築情報学会

■構造委員会

委員長:楠　浩一(東京大学)

幹事:木村　祥裕(東北大学), 腰原　幹雄(東京大学), 小林　正人(明治大学)

〇シェル・空間構造運営委員会

主査:熊谷　知彦(明治大学)

幹事:小澤　雄樹(芝浦工業大学), 箕輪　健一(日本工業大学), 横須賀　洋平(鹿児島大学)

・構造形態創生小委員会

主査:横須賀　洋平(鹿児島大学)

幹事:永井　拓生(滋賀県立大学),　藤田　慎之輔(近畿大学)

委員:ガン　ブンタラ(日本大学),　熊谷　知彦(明治大学),

舘　知宏(東京大学),　陳　沛山(九州工業大学),

永田　洸大(大建設計),　野村　圭介(東海大学),

浜田　英明(法政大学),　松尾　智恵(明星大学),

三木　優彰(東京大学),　山本　憲司(東海大学),

和多田　遼(大阪産業大学)

〇応用力学運営委員会

主査:向井　洋一(神戸大学)

幹事:大塚　貴弘(名城大学), 松本　慎也(近畿大学), 山川　誠(東京理科大学)

・構造最適化と統合設計小委員会(協力委員)

委員:小野　聡子(近畿大学),　木村　俊明(名古屋市立大学),

國光　修五(ユニオンシステム)　高田　豊文(滋賀県立大学),

多田　聡(構造システム),　林　和希(京都大学),

和田　大典(梓設計)

「第 20 回コロキウム 構造形態の解析と創生 2025」実施担当者(所属は前掲)

コロキウム実施責任者:	横須賀　洋平
コンテスト担当:	野村　圭介, 多田　聡, 和田　大典, 國光　修五
資料集担当:	永田　洸大, 林　和希, 和多田　遼
会場担当:	田川　浩之(武庫川女子大学), 藤田　慎之輔
広報担当:	横須賀　洋平, 藤田　慎之輔
コロキウム同窓会担当:	高田　豊文, 小野　聡子, 木村　俊明, 熊谷　知彦, 浜田　英明, 松尾　智恵, 山本　憲司, 横須賀　洋平
会計担当:	山本　憲司
参加登録担当:	和多田　遼
若手優秀発表賞担当:	熊谷　知彦, 小野　聡子
コロキウム HP 担当:	陳　沛山, 横須賀　洋平
ポスター担当:	木村　俊明
一般講演企画担当:	三木　優彰, 舘　知宏, 横須賀　洋平
万博見学会企画担当:	永井　拓生, 浜田　英明, 横須賀　洋平
優秀作品展示企画担当:	ガン　ブンタラ, 横須賀　洋平

＊本コロキウムは、能村膜構造技術振興財団の助成を受けました。

第 20 回コロキウム構造形態の解析と創生 2025

－ 目 次 －

■特別講演

『甲子園会館の魅力』----------1
岡崎甚幸（武庫川女子大学）

『建築構造形態の最適化：過去・現在と未来』----------2
大崎純（京都大学）

『現象としての建築形態創生という可能性』----------4
豊田啓介（NOIZ／東京大学生産技術研究所）

■一般講演　－研究論文－

(R-01) 形状最適化手法を用いた単層ラチスシェルの弾性座屈荷重を最小とする形状不整分布の調査 ----- 5
○山本憲司（東海大学）

(R-02) 部材にねじれのない引張り圧縮混合型グリッドシェルの設計 ---------- 11
○三木優彰（東京大学）

(R-03) 境界円を不変に保つメビウス変換を用いたエッジオフセットメッシュの対称性制御 ---------- 17
○和多田遼（大阪産業大学），大崎純

(R-04) 最適化を用いた、正規・非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りで閉じた形状の形態創生 ---------- 23
○田川浩之（武庫川女子大学），向井彩七，鈴木沙菜子

(R-05) 格子状折紙構造のベンディングアクティブ構造への適用可能性 ---------- 29
○早川健太郎（日本大学），大崎純

(R-06) 有限差分法による圧縮引張混在型自由曲面シェルの形状設計 ---------- 35
○中嶋拓（京都大学），大崎純，三木優彰

(R-07) 粒子法による構造形態創生の性能比較 ---------- 41
○神田真澄（近畿大学），眞鍋匡利，藤井大地

(R-08) 折り畳み可能な平面で構成されるハニカムの形態創生と考察 ---------- 47
○齋藤魁利（AMDlab），佐藤鼓，藤田慎之輔

(R-09) 正方形平面の支持架構付きグリッドシェルの屋根の形状と部材断面の同時耐震最適化 ---------- 53
○白井健志（竹中工務店），寺澤友貴，竹内徹

(R-10) アルミニウム模型による Bending-Active 単層籠目格子シェルの形状分析 ---------- 59
○小久保結平（工学院大学），山下哲郎

(R-11) スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法を用いたトポロジー最適化に関する基礎的検討 ---------- 65
○谷村瑠威（近畿大学），眞鍋匡利，藤井大地

(R-12) アルミニウム合金による金属積層造形を用いた大変形弾性板の引張実験及び解析的研究 --------- 71
○内田乙葉（島根大学），澤田樹一郎

(R-13) 建築計画・構造性能を考慮した複合分野の最適化問題-室配置及びブレース配置を組み合わせた設計の提案 ---------- 77
○橋口詩芳（鹿児島大学），横須賀洋平

(R-14) 曲線折りテセレーションの巨視的曲げの解析 ---------- 83
○河井友宏（東京大学），舘知宏

(R-15) 風車状の頂点を持つ剛体折紙の挙動解析とその組み合わせによる機構設計 ---------- 89
○南宏樹（東京大学），舘知宏

(R-16) プリズマトイドテセレーションに基づく可変構造の自由度解析 ---------- 95
○大嶋千智（東京大学），今田凜輝，舘知宏

(R-17) 3D プリント樹脂と竹の１面せん断抵抗による丸竹接合部の性質およびトラス構造物への適用性 ---------- 101
○原田陽（滋賀県立大学），永井拓生，木村俊明

(R-18) 複素フーリエ係数と最小二乗法によるエレメントフリー解析 ---------- 107
○佐藤敬太（島根大学），澤田樹一郎

■一般講演　－技術報告－

(T-01) 昭和初期に建設された洋風木造庁舎の劇場への改修における構造計画 ---------- 113
○永井拓生（滋賀県立大学）

(T-02) 継手の無い板材のみからなる離散十字相欠き格子の提案と力学的特性の検討 ---------- 119
○佐藤輝翔（大阪産業大学），和多田遼

■形態創生コンテスト

□コンテスト概要 ---------- 125

□入選作品

(1) Bamboo String Tension ---------- 131
○三田沙也乃, 安部基喜, 伊藤世玲奈, 上田昂平, 國友弘隆, 樋口敬治, 徐宸寅（株式会社大林組）

(2) ONE MODULE | MULTI MODE ---------- 133
○金原広太郎, 新田哲史, 芦田結理, 伊藤慶彦, 前田貴仁, 榊原健晃, 山口聡士（株式会社大林組）

(3) Panta hut units ---------- 135
○田中一成（日建設計）, 大嶋千智（東京大学）

(4) 南京玉簾式展開構法 ---------- 137
○林優斗（立命館大学）

(5) Re:SpiraRise －幾何剛性で安定する再構築可能な空間構造－ ---------- 139
○大村広輝, 戸田陸, 田中瑞樹, 長浜慧昌, 小川璃子, 山地雄統（株式会社大林組）

(6) 六方格子構造～手でつくるつどいの場～ ---------- 141
山本怜生, 丸谷祐大, 大嶽有加, ○髙岡祐大, 笹井智喬, 森山佐那子, 福田凱乃祐（株式会社大林組）

□佳作作品

(1) RULING PLAY 単一の円環モジュールを用いた空間の設計 ---------- 143
○来栖裕也, 山崎珠美, 青木馨（東京大学）

＊「第 20 回コロキウム構造形態の解析と創生 2025」に関連する情報は、下記 URL のページに掲載しています.
https://kozokeitaisosei.com

■特別講演

特別講演講師

岡﨑　甚幸（おかざき　しげゆき）

特別講演題目

『甲子園会館の魅力』

所属

武庫川女子大学建築学部
〒663-8121　兵庫県西宮市戸崎町 1-13
Tel:0798-67-4501
E-mail: kzk6f7@mukogawa-u.ac.jp

略歴

広島大学教育学部附属福山高等学校卒業、京都大学工学部建築学科卒業後、ワシントン大学建築学部大学院建築都市デザインコース修了。福井大学教授、京都大学教授を経て、京都大学名誉教授、武庫川女子大学建築学部学部長。専門は建築設計、建築設計計画学等。日本建築学会賞受賞。多数の賞を受賞した「サンドーム福井」等の建築設計作品を多数手がける。

特別講演講師

大崎　純（おおさき　まこと）

特別講演題目

『建築構造形態の最適化：過去・現在と未来』



所属

京都大学大学院工学研究科建築学専攻
〒615-8540 京都市西京区京都大学桂
Tel: 075-383-2923
E-mail: ohsaki@archi.kyoto-u.ac.jp

略歴

1960 年　　大阪府に生まれる
1983 年　　京都大学工学部建築学科卒業
1985 年　　京都大学大学院工学研究科修士課程建築学専攻修了
1985 年　　京都大学工学部助手
1996 年　　京都大学大学院助教授（2005 年から准教授）
2010 年　　広島大学大学院教授
2015 年　　京都大学大学院教授
1991 年～1992 年　アメリカ合衆国アイオワ大学客員研究員
2013 年～2016 年　日本学術振興会・学術システム研究センター・専門研究員
2025 年～ 東京理科大学客員教授

主な受賞

1994 年　　前田工学賞: 年間優秀博士論文賞
1996 年　　日本建築学会奨励賞
2004 年　　The State-of-the-Art in Civil Engineering Award, ASCE
2008 年　　日本建築学会賞・論文部門
2014 年　　日本計算力学連合フェロー賞（The 2014 JACM Fellows Award）
2018 年　　ASSMO Award, Asian Society of Structural and Multidisciplinary Optimization
2019 年　　日本計算力学賞（The 2019 JACM Computational Mechanics Award）
2024 年　　ASSMO Fellow Award, Asian Society of Structural and Multidisciplinary Optimization

建築構造形態の最適化：過去・現在と未来

大崎　純 1)
1)京都大学大学院工学研究科建築学専攻，博士(工学)，ohsaki@archi.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

建築構造形態の最適化は，建築の曲面構造や張力構造などの特殊な形態の構造設計への最適化手法の適用であり，工学での構造最適化の一つの分野である。しかし，シェル構造や張力構造ので設計では，いわゆる構造形態解析の過程で最適化手法が用いられ，建築構造形態の最適化は，形態解析と構造最適化の融合分野である構造形態創生として独自に発展してきたといえる。一方で，建築の設計には，微分幾何学や離散幾何学が，施工性や美しさを考慮した曲面設計のために利用されてきた。このよう発展をふまえて，今後の建築構造形態の最適化の方向性を，機械学習の導入も含めて概観する。

2 これまでの流れと現状

構造最適化の歴史はガリレオ・ガリレイまでさかのぼることも可能であれば，変分原理の導入や Michell の論文を起源とすることもできる。しかし，現在の計算機を用いた構造最適化は，1960 年代の梁，柱や連続体の最適化，あるいはトラスや骨組構造の最適化を起源とするのが一般的である[1]。

国内では，1980 年代から，主に機械工学での数理計画法や最適性基準法に関する研究を端緒として，土木工学で橋梁や骨組構造に最適化手法が適用された。しかし，その頃は計算機の能力が不十分であり，実務への適用は困難であったため，土木の分野での構造最適化の研究は縮小していった。

一方，建築では，構造最適化とは別の流れとして，膜構造やケーブル構造の形態（自重や内圧に対する釣合形状）を求める分野として「形態解析」があり，1980 年代から計算機を利用した手法が提案された。釣合形状を求める問題は，エネルギー原理を用いれば最適化問題（最小化問題）として定式化でき，釣合形状を支配する式は最適性条件（停留条件）と解釈できる。また，1990 年代初めにシェル構造をパラメトリック曲面として定義して最適化する手法が提案され，とくにシェルや空間骨組構造の最適化が建築の分野で活発になってきた。

建築の分野での最適化は，誤解を恐れずに書くと，厳密な最適化は要求されず，最適化ツールが機械工学とは異なった方向で利用されてきた。したがって，連続体のトポロジー最適化を主要な対象とする構造最適化の学会やシンポジウム[2]で建築の最適化は受け入れらにくかった。しかし，連続体の最適化がある程度成熟した現在において，構造最適化の国際会議や学会[3]では，非機械分野（建築，土木，工業デザイン，CG など）を含めた広い分野での複合領域最適化への発展が望まれている。

建築分野の最適化のもう一つの特徴として，2000 年ごろからヨーロッパで発展した幾何学の導入や施工性の考慮がある。欧米では数学と工学などの異分野の交流が活発であり，数学者を主体として，離散幾何学や非ユークリッド幾何学の利用が進められた。2008 年に始まり 2 年に一度開催される AAG [4]は，第 8 回までヨーロッパで開催され，今年初めて米国で開催される。アジアも含めて日本は出遅れ気味であり，今後の発展が期待される。

3 今後の展望

最近の大規模言語モデルに基づく生成 AI の飛躍的な進歩にともない，構造形態創生や建築構造最適化の将来は不透明になってきている。現状では，構造最適化は構造設計者の支援ツールであり，AI や機械学習の利用は，そのプロセスのより一層の効率化につながる。しかし，近い将来に大きな変革が起きる可能性もあり，研究者や構造設計者は，常に最新の動向を調査し，時代の流れに乗り遅れないような準備が必要である。

参考文献

1) 大崎 純，構造最適化の歴史と概要，日本建築学会編: 構造最適化の最近の発展と設計への応用事例，1章, pp. 1-14, 2020.
2) First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-1), 1996.
3) International Society of Structural and Multidisciplinary Optimization (ISSMO), https://www.issmo.net/
4) Advances in Architectural Geometry (AAG) 2008, Vienna, 2008.

特別講演講師

豊田啓介（とよだ　けいすけ）

特別講演題目

『現象としての建築形態創生という可能性』

所属

東京大学　生産技術研究所
〒153-8505
東京都目黒区駒場 4-6-1 B **棟** Bw603
Tel: 03-5452-6484
E-mail: kt@noizarchitects.com

略歴

1972 年、千葉県出身。1996～2000 年、安藤忠雄建築研究所、2002～2006 年、SHoP Architects（ニューヨーク）を経て、2007 年より東京と台北をベースに建築デザイン事務所 NOIZ を蔡佳萱と設立、2016 年に酒井康介が加わる。2020 年、ワルシャワ（ヨーロッパ）事務所設立。2017 年、「建築・都市×テック×ビジネス」をテーマにした領域横断型プラットフォーム gluon を金田充弘と設立。コンピューテーショナルデザインを積極的に取り入れた設計・開発・リサーチ・コンサルティング等の活動を、建築やインテリア、都市、ファッションなど、多分野横断型で展開している。2025 年大阪・関西国際博覧会 誘致会場計画アドバイザー（2017 年～2018 年）。建築情報学会副会長（2020 年～）。大阪コモングラウンド・リビングラボ（2020 年～）。一般社団法人 Metaverse Japan 設立理事（2022 年～）。2021 年より東京大学生産技術研究所特任教授。

■一般講演　－研究論文－

形状最適化手法を用いた単層ラチスシェルの弾性座屈荷重を最小とする形状不整分布の調査

山本憲司[1)]，乗松晃大[2)]，小幡高大[3)]
1) 東海大学建築都市学部建築学科，教授，博士(工学)，kyamamoto@tokai.ac.jp
2) 東海大学学部生，3) 東海大学大学院生

1 はじめに

単層ラチスシェルの弾性座屈荷重は形状初期不整に敏感であることが知られている。施工時の僅かな不整によって、座屈荷重が半分程度になることも少なくない。座屈荷重は形状不整の分布によって大きく変動する。座屈荷重を最も低下させる最悪な形状不整の分布が存在する筈である。しかし、そのような分布を厳密に求めることは一般的には難しく、これまで十分には明らかにされていない。経験的に線形座屈モードの分布が座屈荷重を大きく低下させる傾向にあることが知られており、設計時に利用されている。しかし、線形座屈モードよりもさらに大きく座屈荷重を低下させるような不整分布があるかどうかはよく分かっていない。

本研究では、各節点の z 座標の初期不整を設計変数とし、弾性座屈荷重係数を目的関数として最小化を行う。これにより指定された不整振幅を持ち、最も座屈荷重を低下させる不整分布を調査する。最適化手法には逐次 2 次計画法を用い、弾性座屈荷重係数の感度係数は内力ベクトルを節点座標で偏微分して、直接微分法により求める。数値解析例では、円筒ラチスシェルの例題を解き、最悪不整分布を示す。

既往研究で、Niho ら[1)]は 5 つの座屈モードの線形結合で表現した 2000 個の形状不整について円筒ラチスシェルの座屈荷重を調査している。しかし、形状不整の表現自由度が小さく、最悪不整分布の近傍の不整を表現できているか疑問である。最悪な形状不整分布は、不整ベクトルのノルム一定の条件の下で座屈荷重の変化を不整ベクトルの 1 次近似で表せるものとすれば最急降下方向、すなわち座屈荷重感度係数に比例した分布となる。これを利用して座屈敏感性を検討している研究に大崎ら[2)]や作山、浜田[3)]などがある。本報では、不整ノルム一定でなく各節点の不整の上限値（側面制約）を与えた時の最悪不整分布を調査する。また、不整ベクトルのノルム一定とした場合についても不整時の座屈荷重の 1 次近似を行わずに最適化の繰り返し計算を行い、厳密に最悪不整分布を求める。

2 形状不整の上限値を制約とした最適化問題

2.1 問題設定

形状不整はラチスシェルの各節点に z 方向に与えるものとする。支持点には形状不整は与えない。支持点を除く節点数を N とし、i 番目節点の形状不整を Δz_i と表す。

設計変数を形状不整ベクトル $\Delta\mathbf{z}=\left[\Delta z_1,\Delta z_2,\cdots,\Delta z_N\right]^T$ とし、目的関数を弾性座屈荷重係数 λ_{cr} として、座屈荷重の最小化を行う。制約条件は、各節点の形状不整の大きさが指定値 $\Delta z_{\max}$ 以下であるとする。この問題は次式のように表せる。

目的関数：$f\left(\Delta\mathbf{z}\right)=\lambda_{cr} \rightarrow \min$ (1-1)

制約条件：$g_i\left(\Delta z_i\right)=\Delta z_{\max}{}^2-\Delta z_i{}^2\geq 0 \quad \left(i=1,\cdots,N\right)$ (1-2)

(1-2)式の制約条件は、側面制約 $-\Delta z_{\max}\leq\Delta z_i\leq\Delta z_{\max}$ と同じ意味を持つ。上の問題を逐次 2 次計画法（SQP 法）を用いて解き、最悪な不整分布を求める。

2.2 座屈荷重係数の感度係数

ここでは弾性座屈荷重係数の感度係数を導出する。座屈点 $\left(\mathbf{d}_{cr},\lambda_{cr}\right)$（$\mathbf{d}_{cr}$ は座屈点における変位ベクトル）では次式が成り立つ。

$$\mathbf{q}\left(\mathbf{d}_{cr}\right)-\lambda_{cr}\mathbf{f}=\mathbf{0} \tag{2-1}$$

$$\mathbf{K}_T\left(\mathbf{d}_{cr}\right)\boldsymbol{\phi}_1=\mathbf{0} \tag{2-2}$$

$$\boldsymbol{\phi}_1{}^T\boldsymbol{\phi}_1=1 \tag{2-3}$$

ここに、$\mathbf{q}$，$\mathbf{K}_T$ はそれぞれ内力ベクトル、接線剛性マトリクスであり、後ろの $\left(\mathbf{d}_{cr}\right)$ は $\mathbf{d}_{cr}$ を代入して求めた値であることを表している、以下では $\left(\mathbf{d}_{cr}\right)$ を省略して表記した場合でも、特に断りのない限りこれらは座屈点での値とする。また、$\mathbf{f}$ は外力モード、$\boldsymbol{\phi}_1$ は弾性座屈モードである。

(2-1)式の釣合が恒等的に成り立つものとし、両辺を z_i（節点 i の z 座標）で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial z_i}+\mathbf{K}_T\frac{\partial\mathbf{d}_{cr}}{\partial z_i}-\frac{\partial\lambda_{cr}}{\partial z_i}\mathbf{f}=\mathbf{0} \tag{3}$$

ただし本研究で扱う外力モードは z_i に無関係としている。上式の左から $\boldsymbol{\phi}_1{}^T$ を乗じ、$\mathbf{K}_T$ が対称マトリクスであることを考慮して整理すると、座屈荷重係数の感度係数とし

て次式が得られる。

$$\frac{\partial \lambda_{cr}}{\partial z_i} = \boldsymbol{\phi}_1^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \Big/ \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f} \tag{4}$$

座屈点が分岐点の場合では $\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f} = 0$ となる為に(4)式を用いて座屈荷重の感度は評価できない [4]。しかし、本研究のように形状不整を与えたモデルでは多くの場合座屈点が極限点となる為、(4)式を用いて評価できる。

本研究では移動座標系を用いた定式化を行っており、内力ベクトルの感度係数 $\partial \mathbf{q}/\partial z_i$ は $\mathbf{d}_{cr}$ を用いて $\mathbf{q}$ を計算する過程の節点座標を含むあらゆる項を全て z_i で偏微分して求めている。例えば、座標変換マトリクス、変形前の要素座標から移動座標系への座標変換マトリクス、移動座標系で表される内力ベクトルなどの項に含まれる部材の傾きや部材長さが z_i の関数となっている。$\partial \mathbf{q}/\partial z_i$ は煩雑な式になるが計算は不可能ではない。

2.3 Extended Systems による座屈点の計算

各最適化ステップで座屈荷重は以下のように求めている。まず、弧長増分法によって荷重変位ゼロ点から座屈点近傍まで、釣合点を求める。各釣合点では接線剛性マトリクスの固有値解析を行って最小固有値の符号を調査し、正から負となった時点で座屈点近傍に到達したと判断する。その後、(2)式の $2\times 6N+1$ 自由度の Extended systems[4]を用いて座屈点を正確に求める。すなわち $\mathbf{d}_{cr}$, λ_{cr}, $\boldsymbol{\phi}_1$ を全て同時に未知変数とし、(2)式を満たすこれらの値を Newton Raphson 法により求める。

最適化ステップにより設計変数の修正が行われたのち、再び座屈点を求める必要がある。その際、再び荷重変位ゼロ点から改めて釣合経路を追いかけなくとも、設計変数の修正がそれほど大きくなければ(2)式の Extended systems を直接解いて座屈点 $(\mathbf{d}_{cr}, \lambda_{cr})$ と座屈モード $\boldsymbol{\phi}_1$ を求めることも可能と考える。実際、文献 5)ではそのような方法で座屈最適化を行っている。しかし、Extended systems は釣合経路上に最初に現れる座屈点に収束する保証がない為、本研究では計算コストよりも最小座屈点を正確に求めることを重視し、各最適化ステップでゼロ点から座屈点近傍まで増分解析を行ったうえで Extended systems により座屈点を求めることにした。

2.4 形状不整の上限値を制約とした数値解析例

解析モデルは、図 2 に示す三角形網目の円筒ラチスシェルである。部材はϕ267.4×6.0 の鋼管とし、ヤング係数は 2.05×10^5N/mm^2 である。外力モードとして、曲面に沿った鉛直方向の等分布荷重 1.0kN/m^2 に相当する力とし

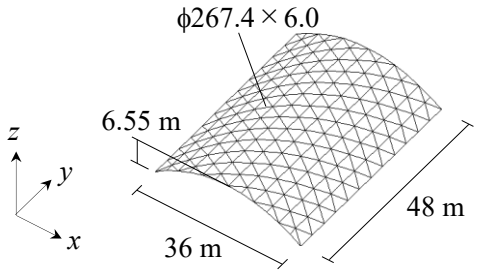


図 2 解析モデル

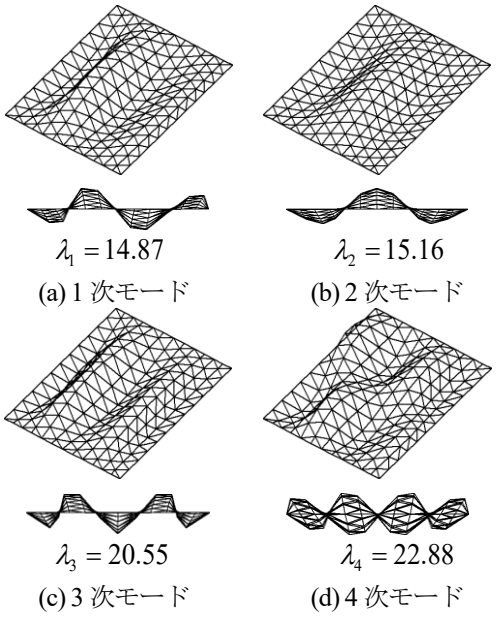


図 3 線形座屈解析結果

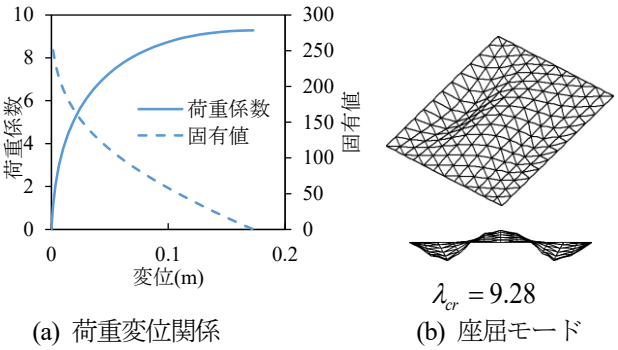


図 4 弾性座屈解析結果（形状不整無し）

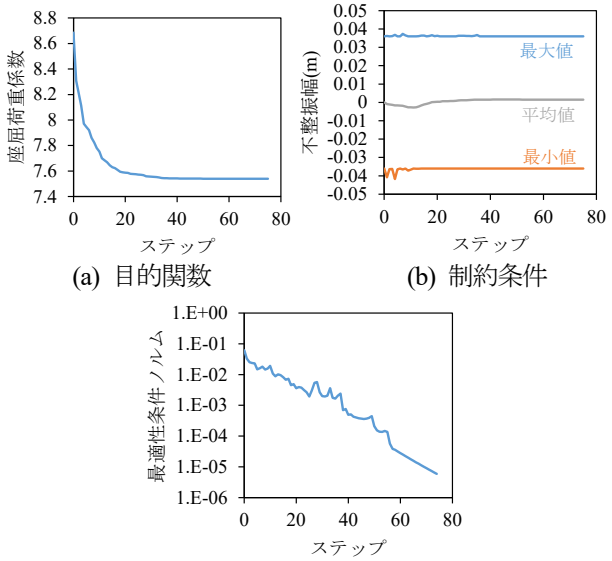
て、各節点に鉛直下向きに 13.0kN の集中荷重を作用させた。支持条件は周辺節点をピン支持とした。

最適化問題を解く前に、解析モデルの基本的な座屈性状を把握するため、まず、線形座屈解析析を行った。1 次から 4 次までの線形座屈荷重係数と線形座屈モードを図 3 に示す。座屈モードはアイソメ図と y 方向に見た立面図を描いており、モード形が視認しやすいようにシェル形状の z 座標は全てゼロにして描いてある。例えば図(a)から 1 次モードは座屈荷重係数が 14.87、座屈モードは

アーチ方向に 2 波、桁方向に半波の座屈モードと分かる。

次に弾性座屈解析を行った。シェル中央節点の鉛直変位と荷重係数の関係を図 4(a)に示す。図中の実線が釣合曲線である。また、同図中に接線剛性マトリクスの最小固有値と変位の関係を、2 軸を用いて破線により示した。釣合曲線の端部の変位で固有値がゼロとなっており座屈点であることが分かる。座屈荷重係数は 9.28 であった。座屈モードを図 4(b)に示す。線形座屈解析と比較すると線形座屈の 1 次ではなく、2 次に対応するモードで座屈していることが分かる。

(1)式の最適化問題を解く。形状不整の初期値は線形座屈の 1 次モードの z 方向成分の分布とし、不整振幅を 0.036m（アーチ方向スパンの 1000 分の 1、等価シェル厚の 0.113 倍）となるようにスケーリングして与えた。制約条件の $\Delta z_{\max}$ は同じ 0.036m とした。最適化（最悪化）の履歴を図 5 に示す。図(a)は目的関数（弾性座屈荷重係数）の最適化ステップによる変化を表している。75 ステップで解が得られ、弾性座屈荷重係数は 8.68 から 7.54 まで低下した。1 次の線形座屈荷重係数 14.87 との比（以下、弾性座屈荷重低減係数と呼ぶ）は 0.507 である。図(b)は形状不整 Δz_i の最大値、最小値、平均値を表している。 Δz_i は±0.036m の範囲にあり、制約条件を満たしていることが確認できる。図(c)は次の最適性条件（KKT 条件）の誤差ノルムの変化を表している。ここでは初期値の 10^{-4} 以下となった時に解が得られたと判断し、最適化の反復計算を終了している。



(a) 目的関数　(b) 制約条件

(c) 最適性条件の誤差ノルム

図 5 形状最適化（最悪化）の履歴（上限値制約，1 次）

形状不整の初期値（以下、簡単のため初期不整と呼ぶ）と最適化によって最終的に得られた形状不整（以下、最悪不整と呼ぶ）を図 6(b)に示す。不整の大きさは 100 倍して示してある。初期不整ではアーチ方向に逆対称な分布であるが、最悪不整では対称な分布に変化した。また、全ての節点で Δz_i が側面制約の値である+0.036 か、-0.036 のいずれかの値をとり、中間の値を取る節点は一つも無かった。

初期不整と最悪不整による荷重変位関係を図 6(a)に、座屈モードを図 6(c)に示す。初期不整の座屈モードは左の方にモードの腹が偏っているが、最悪不整では、不整無しの場合と同じ対称なモードであることが分かる。

最適解が局所解である可能性を懸念して、初期不整を線形座屈の 2 次、3 次、4 次モードとした場合についてもそれぞれ同様に最適化を行った。初期不整の不整振幅、制約条件の $\Delta z_{\max}$ は同じ 0.036m である。結果を同様に図 7～図 9 にそれぞれ示す。いずれの場合も同じ解に収束していることが分かる。

形状不整の上限値を与えて弾性座屈荷重を最小とする不整分布を最適化手法により求めたが、得られた分布は不整が全ての節点で上限の値をとり、現実的には起こりえないような極端な分布となることが分かった。また、そのような場合でも弾性座屈荷重低減係数はおよそ 0.5 であり、ラチスシェル屋根構造設計指針 [6]に弾性座屈荷重低減係数の暫定値として示されている 0.5 という値と良く対応することが分かった。

3 形状不整ベクトルのノルムを制約とした最適化問題

3.1 問題設定

2 章では形状不整の上限値を制約条件として最適化を行ったが、得られた分布は不整が全ての節点で上限値となり、あまり現実的でない形状不整の分布となった。滑らかな現実的な分布が得られるようにするために、ここでは形状不整ベクトルのノルムの上限値を制約条件とした問題を扱う。最適化問題は以下のようになる。

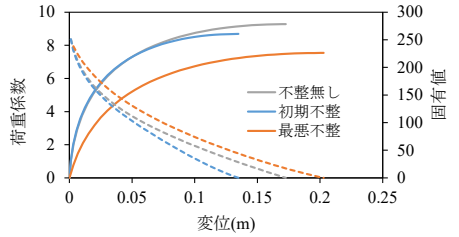
目的関数： $f(\Delta \mathbf{z}) = \lambda_{cr} \rightarrow \min$ (4-1)

制約条件： $g(\Delta \mathbf{z}) = R^2 - \Delta \mathbf{z}^T \Delta \mathbf{z} \geq 0$ (4-2)

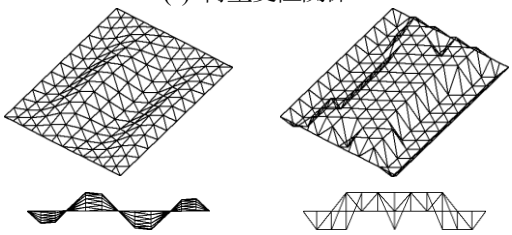
制約条件が $\Delta \mathbf{z}$ の L2 ノルム $\|\Delta \mathbf{z}\| = \sqrt{\Delta \mathbf{z}^T \Delta \mathbf{z}}$ を指定値 R 以下とする条件式に変更されている。制約条件が変更されたのみで、その他の方法は全て 2 章と同じである。

3.2 形状不整のノルムを制約とした数値解析例

解析モデルは 2.4 節と同じ円筒ラチスシェルとする。

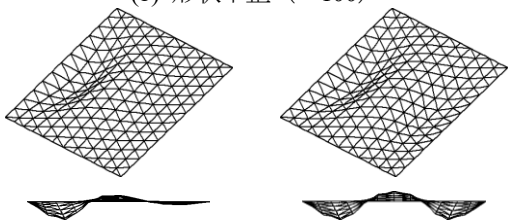


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

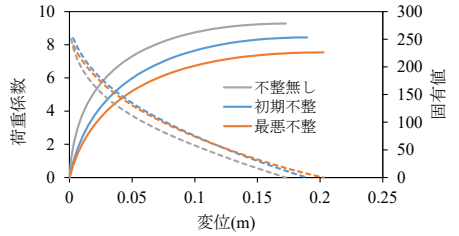
(b) 形状不整（×100）



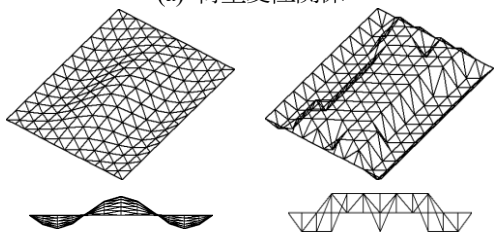
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.68$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=7.54$

(c) 座屈モード

図 6 初期不整 1 次モードの結果（上限値制約）

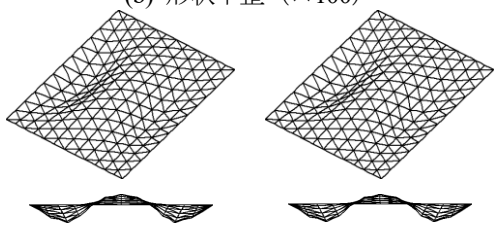


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

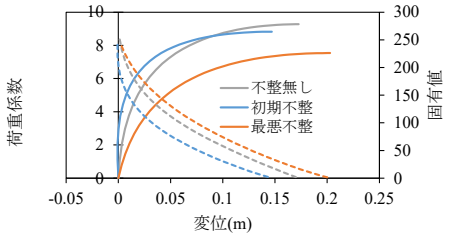
(b) 形状不整（×100）



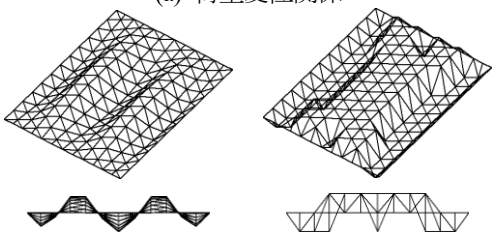
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.44$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=7.54$

(c) 座屈モード

図 7 初期不整 2 次モードの結果（上限値制約）

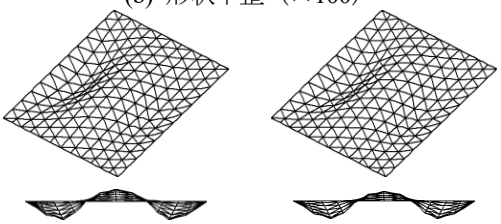


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

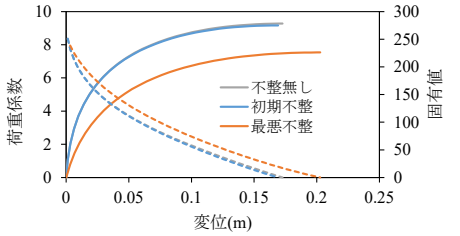
(b) 形状不整（×100）



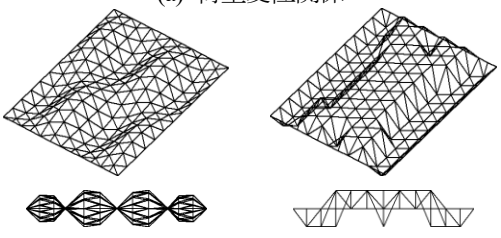
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.83$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=7.54$

(c) 座屈モード

図 8 初期不整 3 次モードの結果（上限値制約）

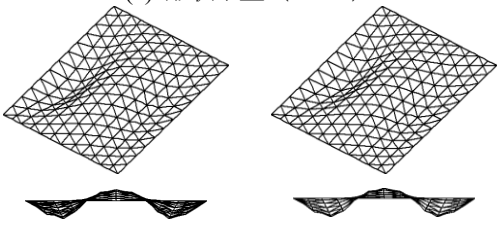


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

(b) 形状不整（×100）



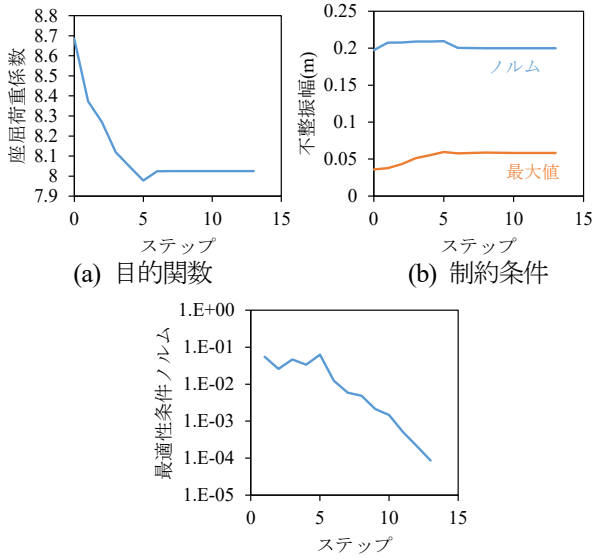
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=9.17$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=7.54$

(c) 座屈モード

図 9 初期不整 4 次モードの結果（上限値制約）

初期不整も2.4節と同じく線形座屈モードの1次～4次の分布を用い、不整振幅 0.036m として最適化を行う。ノルムの上限値 Δz_{max} は 0.2 とした。なお、初期不整のノルムはそれぞれ1次で0.1972、2次で0.1736、3次で0.1943、4次で 0.2100 である。4 次以外は初期不整よりも少し大きなノルムの値を指定したことになる。

初期不整が線形座屈モード1次の時の最適化の履歴を図 10 に示す。図(a)と図(c)の意味は図 5 の場合と同じである。制約条件を表す図(b)は、不整ベクトルのノルムを青線で、最大値を橙線で表している。なお、この問題では最適性条件の誤差ノルムが初期値の 10^{-4} 以下に下がらなかったため、収束判定値を 10^{-3} 以下とした（図(c)）。



(a) 目的関数　(b) 制約条件

(c) 最適性条件の誤差ノルム

図 10 形状最適化（最悪化）の履歴（ノルム制約，1 次）

表 1 座屈荷重の比較

		不整 最大値(m)	不整 ノルム(m)	座屈荷重	座屈荷重 低減係数
線形座屈荷重		0	0	14.87	1.000
弾性座屈荷重	不整なし	0	0	9.28	0.624
	線形1次モード不整	0.0360	0.197	8.68	0.584
	線形2次モード不整	0.0360	0.174	8.44	0.568
	線形3次モード不整	0.0360	0.194	8.83	0.594
	線形4次モード不整	0.0360	0.210	9.17	0.617
	最悪不整(上限値制約)	0.0360	0.406	7.54	0.507
	最悪不整(ノルム制約)	0.0582	0.200	8.02	0.539

最適化の結果を図 11～図 14 に示す。図の見方は 2 章と同様である。初期不整を 1 次、3 次、4 次モードとした場合は座屈荷重係数が 8.02 の同じ解に収束した。不整分布は図 11(c1)に示した 1 次モードの不整を与えた時の座屈モードとよく似た分布をしており、座屈モードの下に凸の腹の 1 か所に不整が集中するような分布となった（図 11,13,14 の図(b2)）。最悪不整の不整振幅は 0.0582m であった。初期不整を 2 次モードとした場合は座屈荷重係数が 8.05 の局所解に収束した。不整分布は初期不整の対称性を保ったまま上に凸の部分が平らになり、下に凸の部分が大きくなった（図 12(b2)）。不整振幅は 0.0455m であった。

本報で示した初期不整、最悪不整の座屈荷重の比較を表 1 に示した。なお表中には書いていないが、ノルム制約の最悪不整を不整振幅が 0.036m となるようにスケーリングして座屈荷重を求めたところ 8.47 となり 2 次モードの初期不整よりも座屈荷重が大きくなった。

4 まとめ

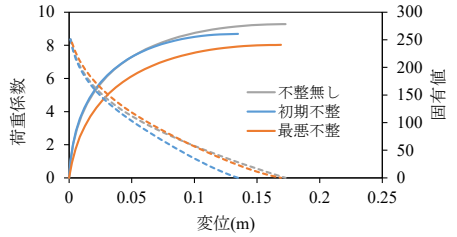
形状不整分布を設計変数とし、弾性座屈荷重を目的関数として、円筒ラチスシェルの座屈荷重が最も小さくなる最悪不整を形状最適化手法により調査した。本研究で得られた成果を以下にまとめる。

1) 形状不整の上限値をスパンの1000分の1として制約条件を与えた場合の最悪不整の座屈低減係数は 0.51 であった。不整分布はすべての節点が正負の不整の上限値をとるような極端な分布となった。
2) 形状不整のノルムが初期不整と同程度となるように制約条件を与えた場合の最悪不整の座屈低減係数は 0.54 であった。不整分布は座屈モードの下に凸の腹の 1 か所に不整が集中するような分布となった。

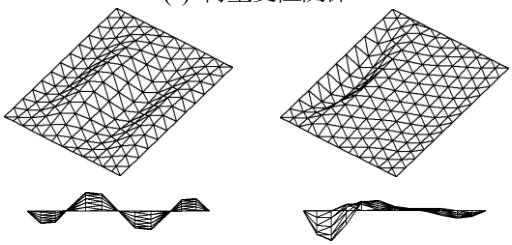
今後は、球形シェルなどその他の形状のモデルについても計算を行う予定である。

参考文献

1) Y. Niho, S. Kato: Investigation into knock down factor of cylindrical latticed shells with geometrical initial imperfection based on stochastic approach, The 14th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures (APCS 2025), pp.00-00, 2025.6
2) 大崎純，池田清宏：複数の部材座屈と極限点が重複するアーチ状トラスの最悪不整，日本建築学会構造系論文集，第 611 号，pp.71-77，2007.1
3) 作山大地，浜田英明：不整敏感度最小化を目的関数としたラチスシェル構造の形態創生，法政大学学術機関リポジトリ，2025.8, DOI:10.15002/00030205
4) 久田敏明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善株式会社，1995
5) R. Reitinger, E. Ramm: Buckling and lmperfection Sesitivity in the Optirnization of Shell Structure, Thin−Wall Structures 23, pp. 159 −177, 1995
6) 日本建築学会:ラチスシェル屋根構造設計指針, 2016

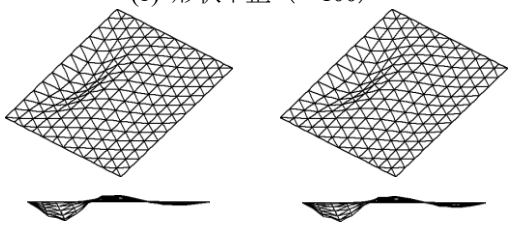


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

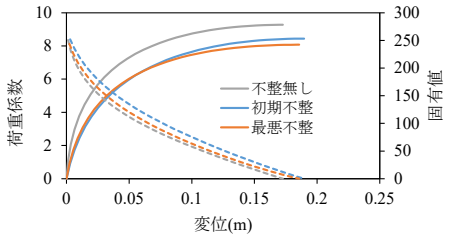
(b) 形状不整（×100）



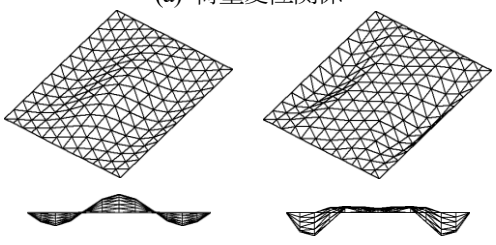
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.68$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=8.02$

(c) 座屈モード

図 11 初期不整 1 次モードの結果（ノルム制約）

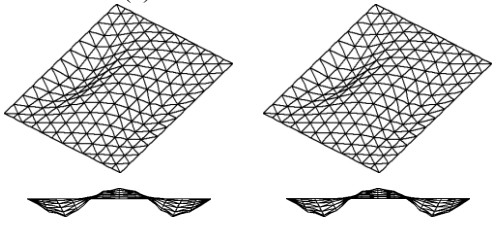


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

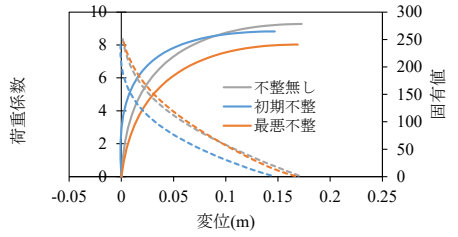
(b) 形状不整（×100）



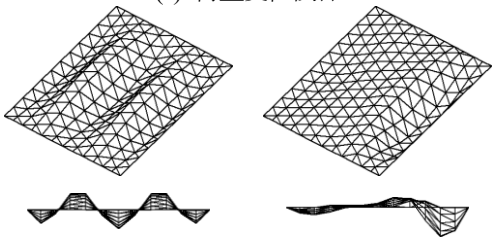
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.44$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=8.07$

(c) 座屈モード

図 12 初期不整 2 次モードの結果（ノルム制約）

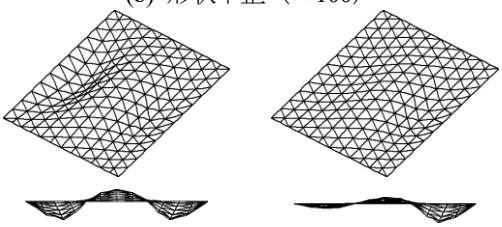


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

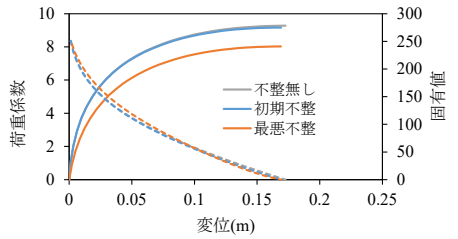
(b) 形状不整（×100）



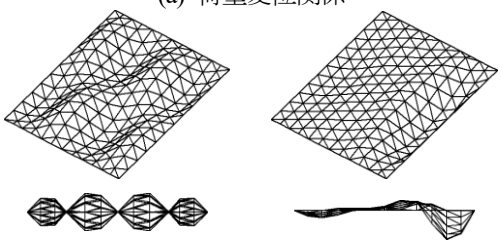
(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=8.83$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=8.02$

(c) 座屈モード

図 13 初期不整 3 次モードの結果（ノルム制約）

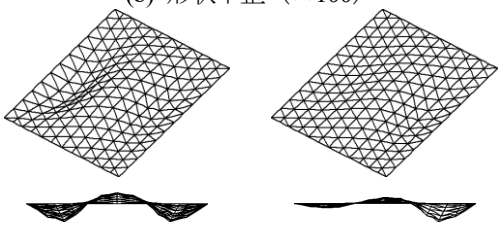


(a) 荷重変位関係



(b1) 初期不整　(b2) 最悪不整

(b) 形状不整（×100）



(c1) 初期不整 $\lambda_{cr}=9.17$　(c2) 最悪不整 $\lambda_{cr}=8.02$

(c) 座屈モード

図 14 初期不整 4 次モードの結果（ノルム制約）

部材にねじれのない引張り圧縮混合型グリッドシェルの設計

三木優彰[1)]
1)東京大学総合文化研究科広域科学専攻，助教，博士(工学)，masaakim@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

建築では、シェルと呼ばれる薄い曲面構造の形状決定が熱心に研究されてきた。シェルは、自重を曲げモーメントを生じずに支持できる特別な形状をとっているのが理想といわれる。そのような形状は面内応力のみで自重を支え、効率的な曲面構造となる。

筆者は2015年の論文[2]で NURBS曲面とAiry応力関数を用いた形状決定手法を提案した。ただし、この手法は純圧縮シェルに限定されていた。2022年には [3]でこの手法を大幅に拡張し、引張りと圧縮が混在する応力状態を適切に扱えるようにした。実は純圧縮より引張り圧縮混合型の方がはるかに解くのが難しいことが古くから知られていた。引張りと圧縮の混在により優美な片持ち形状を曲げモーメントなしに実現できる。これを安定的に解けるということはまさに技術的なブレークスルーである。

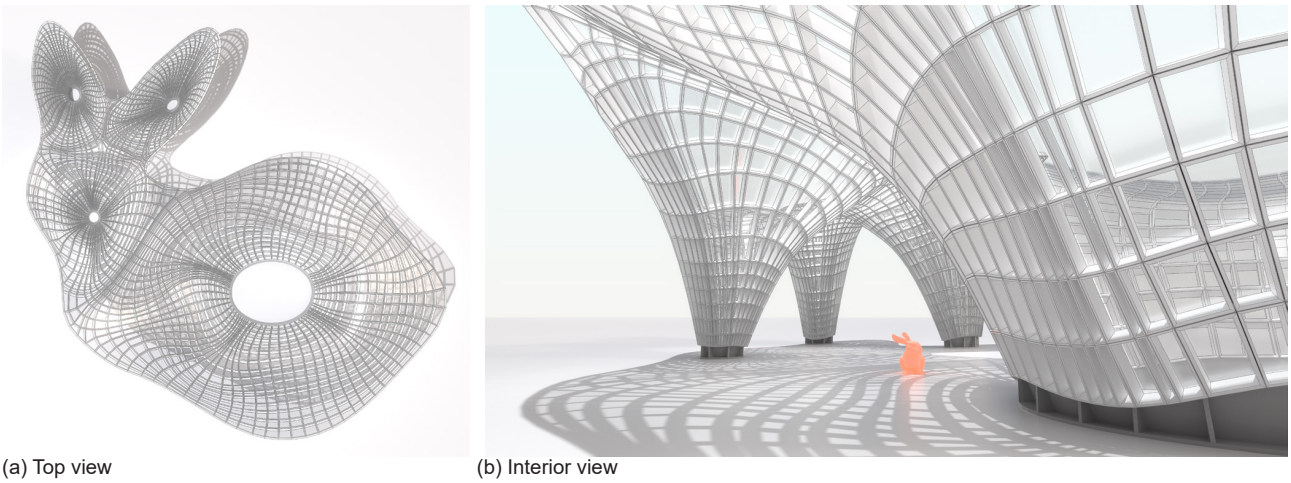
筆者は2024年にこの手法をさらに発展させ、応力ネットと曲率ネットを揃えることができる新しい双線形型偏微分方程式を導入し、コンクリートシェルだけでなくグリッドシェルの形状設計へと道を開いた [4]。提案手法は２本の双線形型微分方程式を連立して解くという洗練されたものであったが、実は複雑な境界形状を与えると全く解けないという大きな問題があった。同じころ共同研究者のToby MitchellやSOMのConsulting PartnerであるWilliam Baker, CambridgeのAllan McRobieなどの研究グループがSchaeferとGurtinの提案した新しい応力関数に着目ししていた。実はAiryの応力関数だけでは釣り合いを満たす応力場の全てを覆うことができない。その不完全性を補うものとしてSchaeferとGurtin[5, 1]は独立に新しい応力関数を導いた。この新しい応力関数はAiryに比べ注目されず、忘れ去られていた。 筆者らはこのSchaefer-Gurtin応力関数をAiryの応力関数に重ねることで複雑な境界形状をもつ問題でも安定的に解けることを確認し、2025年8月、Siggraph ASIA 2025に論文が採択された。図1にこの新しい応力関数を用いた形状決定の例を示す。しかしSchaefer-Gurtin応力関数についてはあまりにも発展的すぎるのでここでは触れない。興味のある読者は論文を直接参照されたい。

以上より筆者がこれまでに各種論文で発表した手法はその一つ一つがグリッドシェルの設計を見据えたブレークスルーであり、そのすべてをつなぎ合わせると以下の特徴を備えたグリッドシェルの形状決定が実行可能となる。

- 引張り圧縮混合応力場により釣り合う連続体シェルの形状決定を正しく行える。
- 共役応力・曲率方向を揃え、施工しやすいグリッドシェルへ変換できる。
- 揃ったグリッドをさらに境界形状とも揃えることができる。
- 自由境界の条件を正しく扱える。
- 新しい応力関数を重ねることで複雑な境界形状を持つ問題も安定的に解ける。

また、同時に大幅な計算時間の短縮を達成した。従来はGPUが必須だったが、新手法ではCPUのみで高速計算可能となった。 例えば図1の例題はかなり大規模な問題であり、これまではNVIDIAのGPU (RTX 4090)を用いても90時間ほどの計算時間が必要であった。しかし、新しい計算手法ではCPU(Core i9 14900)のみで1.5時間で計算が終了する。その他の比較的小規模な問題であれば数分から20分ほどで計算が終了する。また、Rhino v8とGrasshopperで動くプラグイン、そしてソースコードはFood4RhinoでGodzillaと名付けたパッケージとして配布している。これらにより一般の建築デザインに従事する人々がアクセスしやすいものとなった。

このように提案手法は、提案手法を用いて計算したグリッドシェルの実現可能性の実証段階に突入しつつある。本報ではその前に、最後に積み残した比較的小さな問題として、ねじれのない部材の配置の計算手法について述べる。実は法線ベクトルに沿った主曲率線のオフセットが可展面帯を与えることが知られている。これをもとに離散化することで簡単に部材にねじれのないグリッドシェルを構成することができる。図1で可視化されているグリッドシェルは主曲率線と主応力



(a) Top view (b) Interior view

図1　ねじれのない部材からなる引張り圧縮混合型シェルの形状決定例。これは主応力線と法線ベクトルを用いたもの。また、Schaefer-Gurtin応力関数を重ねることで複雑な境界形状を安定的に解いている。

線を揃え、得られた主曲率線を法線ベクトルによりオフセットして得られたものである。一見すると実用的なグリッドシェルが得られており、残された課題は少ないように見える。 しかし、筆者らは[4]でより一般の二重共役グリッドを導入した。これはより一般の共役応力線と共役曲率線を揃えたもので、主曲率線よりリラックスしたグリッドが得られる。自由度を少し稼げるだけでなく、意匠性に優れた美しいグリッドが得られる点が重要である。したがってグリッドシェルのグリッドを主曲率線に限定してしまうのはなんとも残念である。一般の共役グリッドについてもねじれを生まないオフセット方向が存在するのであれば、法線ベクトルのかわりにそちらを用いてグリッドシェルを設計できる。本報では等温曲面(isothermic surface)やそのChristoffel dualとの関連も含めて論じる。

2　ねじれのない梁の条件（主曲率線の場合）

まず、主曲率線について述べる。曲面上に座標系(θ^1, θ^2)があり、その位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$、基底ベクトルを$\boldsymbol{g}_i$とする。主曲率方向とは第一基本形式g_{ij}と第二基本形式b_{ij}を同時に対角化しているような方向である。つまり主曲率方向v^i, w^iは、

$$g_{ij}v^iw^j = 0, \quad b_{ij}v^iw^j = 0 \tag{1}$$

を満たす。ここでベクトル$\boldsymbol{D}$が各点で定義されているとする。このベクトルは法線ベクトルのようなベクトルで、ねじれのない主曲率線のオフセットを与えると仮定する。以下ではそのような方向を擬法線ベクトルと呼ぶことにする。そのv^i方向の変化は$\partial_i \boldsymbol{D} v^i$である。$v^i$に沿って配置され、その断面方向が$\boldsymbol{D}$であるような梁を考える。そのねじれがない条件は、梁と垂直なベクトル$\boldsymbol{b}$を用いて、$\partial_i \boldsymbol{D} v^i \cdot \boldsymbol{b} = 0$と書ける。しかし、$\boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{D}$とともに回転してしまうため、このままでは扱いにくい。今、ねじれしか考えていないから、$\boldsymbol{D}$の大きさは各点で自由に決められる。実は各点で$\boldsymbol{D}$を伸び縮みさせ、$\partial_i \boldsymbol{D}$が曲面の接平面に含まれるようにすることが必ずできる。そこで、法線ベクトルを$\boldsymbol{N}$として$\partial_i \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{N} = 0$を要請する。すると、$\boldsymbol{b}$のかわりに接平面上で$\boldsymbol{g}_i v^i$と直交しているベクトル$\boldsymbol{g}_i w^i$を用いてねじれを測ることができる。つまり、ねじれのない条件は（$\partial_i \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{N} = 0$の場合に限り）

$$(\partial_i \boldsymbol{D} v^i) \cdot (\boldsymbol{g}_i w^i) = 0 \tag{2}$$

と書ける。この条件が満たされると、梁の下弦と上弦が平行になる。そのような$\boldsymbol{D}$は微分幾何でCombescure変換と呼ばれている。w^iはv^iから、$w^i = \epsilon^{ij} g_{jk} v^k$として作ることができる。ここで$\epsilon^{ij}$は置換テンソルである。つまり上式は

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) v^j v^k g_{km} = \text{symm} \tag{3}$$

である。w^iについても同様なので

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) w^j w^k g_{km} = \text{symm} \tag{4}$$

と合わせた２本の条件が、$\boldsymbol{D}$が主曲率線のねじれを生まないオフセット方向である必要十分条件である。こ

こで、$\boldsymbol{D}$がまさしく法線ベクトル$\boldsymbol{N}$であったとする。このときWeingartenの式,$\partial_i \boldsymbol{N} = -b_{ij}\boldsymbol{g}^j$より

$$b_{ji}v^j v^k g_{km} = \text{symm} \tag{5}$$

$$b_{ji}w^j w^k g_{km} = \text{symm} \tag{6}$$

の２式を得る。これらはv^i,w^iが第一基本形式と第二基本形式の共通の共役方向であることを表している。もともとそのようにベクトルを選んだのであるからこれらの式はいついかなる時でも成り立つ。つまり主曲率線と法線ベクトルの組み合わせはいついかなる時もねじれのない梁を生成する。

3　等温曲面とChristoffelの双対

ここで我々が興味があるのは法線ベクトル以外にねじれを生まない主曲率線のオフセットを与える擬法線ベクトル$\boldsymbol{D}$は存在するのかという問いである。ほかにトリビアルな方向として至る所同一の方向へオフセットする、というものもある。この２つのケース以外に３つ目のケースがあるのか？ということである。

v^i,w^iが第一基本形式と第二基本形式を同時に対角化しているから、第一基本形式と第二基本形式の逆行列をそれぞれG^{ij}とB^{ij}とおいたとき、$G^{ij} = Av^i v^j + Bw^i w^j$と書け、また$B^{ij} = Cv^i v^j + Dw^i w^j$と書ける。よって、２本の条件は適当な係数をかけて足し合わせることで等価な

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D})B^{jk} g_{km} = \text{symm} \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D})G^{jk} g_{km} = \text{symm} \tag{8}$$

という二本の条件に書き換えられる。まず(8)式はs_{ij}が対称であると主張している。(7)式は主曲率方向がs_{ij}についても共役であることを主張している。

話は変わって等温曲面の話に移る。任意の等温曲面について、そのChristoffelの双対が存在することが知られている。実はこのChristoffelの双対は擬法線ベクトルの条件を満たす。このことを以下で証明する。まず、等温曲面では、ある特別な座標系をとることができる。その座標系で測った各種量を$\hat{\cdot}$（ハット）をつけて表すこととする。この座標系の上では

$$\hat{g}_{12} = \hat{b}_{12} = 0, \quad \hat{g}_{11} = \hat{g}_{22} \tag{9}$$

である。そのような座標系は共形座標系と呼ばれ、局所的には必ず存在する。そのような座標系が主曲率線と一致しているとき、そのような曲面は等温曲面と呼ばれる。このとき、以下に述べるもう一つの曲面が必ず存在する。このもう一つの曲面の基底ベクトルを$\hat{\boldsymbol{d}}_i$とすると、

$$\hat{\boldsymbol{d}}_1 = \lambda \hat{\boldsymbol{g}}_1, \quad \hat{\boldsymbol{d}}_2 = -\lambda \hat{\boldsymbol{g}}_2 \tag{10}$$

である。ただし、$\lambda = 1/\hat{g}_{11} = 1/\hat{g}_{22}$である。この曲面をChristoffel Dualという。そのような曲面が存在することと、もとの曲面が等温曲面であることは同値であることが知られている。その証明は後回しにし、以下では必ず存在すると認め、そのような曲面がねじれを生まないオフセット方向を与えることを証明する。まず、$\hat{s}_{ij} = \hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{d}}_j$とおくと

$$\hat{s}_{11} = \lambda \hat{g}_{11}, \quad \hat{s}_{12} = s_{21} = 0, \quad \hat{s}_{22} = -\hat{g}_{22} \tag{11}$$

である。よって明らかに対称である。対称テンソルはどのような座標系で測っても常に対称なので、Christoffelの双対の位置ベクトルを$\boldsymbol{D}$とおけば、これは任意の座標系の上で(8)式を満たす。また、$\hat{s}_{12} = 0$より主曲率方向がs_{ij}も対角化していることがわかる。これも座標系に依存しない性質なので、(7)式も任意の座標系の上で必ず満たされる。

つまりChristoffelの双対は擬法線ベクトルを与えていて、その意味でガウス写像とは異なるもののガウス写像とよく似た曲面である。極小曲面ではChristoffelの双対がガウス写像と一致し、法線ベクトルを与えることが知られている。つまり極小曲面において擬法線ベクトルは法線ベクトルと一致する。

法線ベクトルがねじれを生まないオフセット方向を与えることは既に上で見たので、極小曲面を調べてもあまり意味がない。そこで等温曲面の例として有名なCMC(Constant Mean Curvature)曲面を調べる。CMC曲面は

$$b_{ij}G^{ij} = \alpha \tag{12}$$

を満たす曲面である。ここで、$g_{ij}G^{ij} = 2$より$\alpha = 1/2\alpha g_{ij}G^{ij}$と書き換えられる。つまり、

$$(b_{ij} - 1/2\alpha g_{ij})G^{ij} = 0 \tag{13}$$

である。Christoffelの双対は1.その法線ベクトルがもとの曲面の法線ベクトルと同一で、2.s_{ij}が対称かつ3.ト

レース・フリーであるように決めるとよいことがわかっている。CMC曲面の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$とおけば$\partial_i \boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_i$なので

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{N} - 1/2\alpha \boldsymbol{r} \tag{14}$$

と見つかる。このとき$s_{ij} = b_{ij} - 1/2\alpha g_{ij}$である。これは明らかに対称なので (8)式を満たす。また、第一基本形式と第二基本形式を同時対角化している方向はs_{ij}も対角化する。よって(7)式も満たす。$\boldsymbol{D}$は法線ベクトル$\boldsymbol{N}$と異なるから、法線ベクトルとは別にもう一つ、ねじれのないオフセットを生む方向、つまり確かに擬法線ベクトルが存在している。

3.1 簡単な証明

2つの曲面が共通の法線ベクトルをもつとき、Weingartenの式より$\partial_i \boldsymbol{N} = -b_{ij}\boldsymbol{g}^j = -h_{ij}\boldsymbol{d}^j$である。ただし、$h_{ij}$と$\boldsymbol{d}^j$はChristoffel Dual上の第二基本形式および基底ベクトルの双対である。ここでs_{km}が対称と仮定する。これは(8)式を要請することに相当する。すると

$$\partial_i \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d}_m = b_{ij} g^{jk} s_{km} = -h_{im} \tag{15}$$

である。h_{im}が対称なので$b_{ij}g^{jk}s_{km}$も対称である。s_{km}も対称と仮定したので、この条件は主曲率方向がs_{km}も対角化していることを要請している。これはつまり(7)式が満たされることを意味し、擬法線ベクトルが存在することがわかる。

これだけでは等温曲面であるための条件としては足らず、$s_{ij}G^{ij} = 0$つまりトレース・フリーという条件が必要である。このときs_{ij}を対称と仮定したのでs_{ij}の成分が

$$\{\tilde{s}_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

と見えるような正規直交枠が存在する。これまでの議論より、この正規直交枠は主曲率方向と揃っている。この直交枠が積分可能かはまだわからないが、2つの曲面を微分して作った基底ベクトルがいずれもこの直交枠と向きが揃うように座標系をとれることは仮定してよい。つまり積分可能な長方形の枠は仮定してよい。この枠を生成する基底ベクトル等を$\bar{\cdot}$をつけて表すことにする。今、法線ベクトルが共通なので$\bar{\boldsymbol{d}}_1 = \lambda \bar{\boldsymbol{g}}_1/\bar{g}_{11}$、$\bar{\boldsymbol{d}}_2 = -\mu \bar{\boldsymbol{g}}_2/\bar{g}_{22}$とおける。

さて、積分可能条件$\partial_2 \bar{\boldsymbol{d}}_1 = \partial_1 \bar{\boldsymbol{d}}_2$より

$$\begin{aligned}(\partial_2\lambda)\bar{\boldsymbol{g}}_1/\bar{g}_{11} + \lambda(\partial_2\bar{\boldsymbol{g}}_1)/\bar{g}_{11} - \lambda\bar{\boldsymbol{g}}_1/\bar{g}_{11}^2\partial_2(\bar{g}_{11}) = \\ -(\partial_1\mu)\bar{\boldsymbol{g}}_2/\bar{g}_{22} - \mu(\partial_1\bar{\boldsymbol{g}}_2)/\bar{g}_{22} + \mu\bar{\boldsymbol{g}}_2/\bar{g}_{22}^2\partial_1(\bar{g}_{22})\end{aligned} \tag{17}$$

を得る。ここから$\boldsymbol{N}$成分を取り出すと自明な条件が得られる。今度は$\bar{\boldsymbol{g}}_1$成分を取り出すと

$$\begin{aligned}\partial_2\lambda/\bar{g}_{11} + \lambda\bar{\Gamma}^1_{21}/\bar{g}_{11} \\ -2\lambda/\bar{g}_{11}^2(\bar{\Gamma}^1_{21}\bar{g}_{11} + \bar{\Gamma}^2_{21}\bar{g}_{21}) = \\ -\mu\bar{\Gamma}^1_{12}/\bar{g}_{22}\end{aligned} \tag{18}$$

である。ただし$\bar{\Gamma}^k_{ij}$はChristoffelの第二種記号もしくはLevi-Civitaの接続係数と呼ばれるもので$\bar{\Gamma}^k_{ij} = (\partial_i\bar{\boldsymbol{g}}_j)\cdot\bar{\boldsymbol{g}}^k$である。いま、長方形枠であるので$\bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0$であり、さらに一般に$\bar{\Gamma}^1_{12} = \bar{\Gamma}^1_{21}$であるから、

$$\partial_2\lambda/\bar{g}_{11} - \lambda\bar{\Gamma}^1_{12}/\bar{g}_{11} = -\mu\bar{\Gamma}^1_{12}/\bar{g}_{22} \tag{19}$$

を得る。実はλは1つ目の方向、μは2つ目の方向のみの関数であり、主曲率線の間隔を決めるパラメータである。つまり基底ベクトルを主曲率方向に揃え、可積分条件を満たしたまま$\lambda = \mu$となるように矛盾なく座標系を取り直すことができる。このとき基底ベクトルは自動的に$\hat{g}_{11} = \hat{g}_{22}$を満たす。それはまさに共形座標系であり等温座標系である。このときλは1つ目の方向のみの関数、μは2つ目の方向のみの関数なので、$\lambda = \mu = \text{const}$となる。

従って等温曲面の条件とは曲面上の任意の座標系上で以下の3つの条件を満たす曲面が存在することである。

1. 法線ベクトルがもとの曲線と一致する
2. 基底ベクトルともとの曲線の基底ベクトルの内積を並べた行列s_{ij}が対称行列となる
3. もとの曲面の第一基本形式を用いた行列s_{ij}のトレース$s_{ij}G^{ij}$が0（トレース・フリー）

3つ目の条件は等温座標の存在に必要なもので、始めの2つの条件が揃えばねじれを生まない擬法線ベクトルが存在する。従って、等温曲面であれば(法線ベクトル以外の）擬法線ベクトルが存在するが、逆は言えず、(法線ベクトル以外の）擬法線ベクトルが存在する曲面の集合は等温曲面全体の集合よりも大きな集合である。

4　二重共役グリッドの場合

さて、主曲率線と法線ベクトルはいかなる曲面において必ず存在する。したがって、以上の議論は確かに面白く示唆に富んでいるものの、建築の曲面構造の設計において等温曲面を選択したり擬法線ベクトルを用いたりする強いモチベーションがあるかといえばないのである。

一方で筆者らの提案する二重共役グリッドでは、法線ベクトルはもはやねじれのないオフセット方向を与えない。したがって(3)式と(4)式を満たすねじれを生まないオフセット方向が大きな意味をもつ。二重共役グリッドについても、そのような方向を引き続き擬法線ベクトルと呼ぶことにする。

二重共役グリッドは、第一基本計量とよく似た働きをする任意の正定対称行列e_{ij}を用いて対角化する点に特徴がある。つまり

$$e_{ij}v^i w^j = 0, \quad b_{ij}v^i w^j = 0 \tag{20}$$

である。二重と読んでいるのはe_{ij}とb_{ij}を同時に対角化しているためではなく、応力テンソルも対角化しているためであるが、ここでは詳細には踏み込まない。

このときv^i, w^iは曲面上ではもはや直交していないことに注意する必要がある。’ねじれ’を測るためには梁と物理的に直交する方向と内積をとる必要がある。上で議論したようにそのような方向は扱いにくい。そこで、再び各点で$\boldsymbol{D}$を伸び縮みさせ、梁の下弦が曲面の接平面と平行になるようする。そのような操作は常に可能であり、このとき$\boldsymbol{D}$は再びCombescure変換である。先の議論と同様に$\partial_i \boldsymbol{D}$と法線ベクトル$\boldsymbol{N}$が直交するという条件のもとでは、梁と物理的に直交する方向の代わりに、接平面上で梁と直交する方向を用いてねじれを測ることができる。このようにして２つの条件

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) v^j v^k g_{km} = \text{symm} \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) w^j w^k g_{km} = \text{symm} \tag{22}$$

が得られる。適当な係数をかけて足し合わせることで最終的に

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) B^{jk} g_{km} = \text{symm} \tag{23}$$

$$(\boldsymbol{g}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{D}) E^{jk} g_{km} = \text{symm} \tag{24}$$

の２本に帰着する。E^{ij}はe_{ij}の逆行列である。この2本は共役な方向v^i, w^iを含んでいない。NURBS曲面などで直接解くことができる扱いやすい形式である。

5　数値解法

ガウス写像が半径1の球面上への写像であるように、Combescure変換も大きさを固定する必要がある。そこで、適当な一点を選び$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D} = 1$なる条件を与える。さらに、$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{N} > 0.75$などの不等式制約を与えて擬法線ベクトルを、法線ベクトルの周りの円錐の内側に拘束する。このセットアップで、最小二乗法とガウス・ニュートン法の組み合わせで簡単に解くことができる。

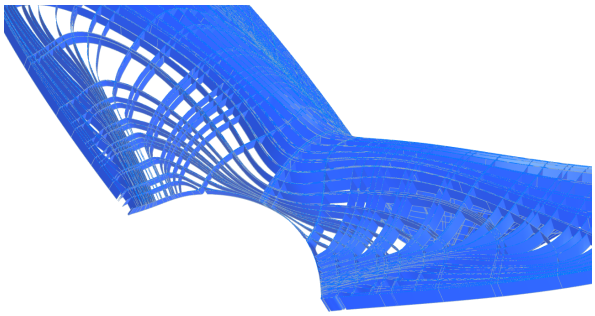


図2　主曲率線と法線方向の組み合わせの例。部材にねじれのないグリッドシェルが得られるが、意匠的な問題が見られる。

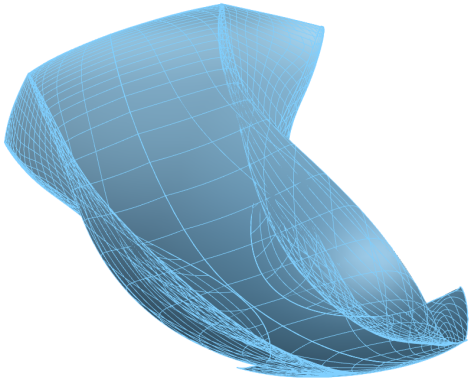


図3　図2に示した曲面のガウス写像。位置ベクトルが法線ベクトルを与え、主曲率線に対するねじれのないオフセット方向を与える。

6　結果

図2に主曲率線と法線ベクトルを用いたねじれのないグリッドシェルの形状決定例を示す。概ね解けているが、境界付近が少し無理をしているように見え、意匠的な問題を解決する必要がある。図4に二重共役グ

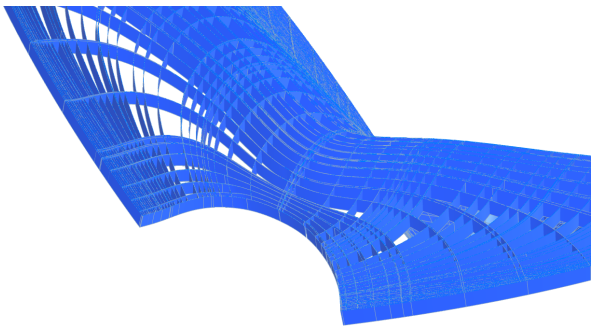


図4　２重共役グリッドと擬法線ベクトル（ねじれのないオフセット方向）の組み合わせによるグリッドシェルの例。意匠的に優れた解が得られる。

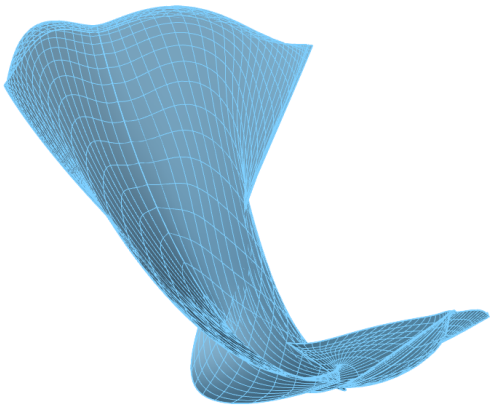


図5　図4に示した曲面と共役ネットのCombescure変換。各点の位置ベクトルが共役ネットのねじれのないオフセット方向を与える。

リッドと擬法線ベクトル（ねじれのないオフセット方向）の組み合わせを用いたねじれのないグリッドシェルの例を示す。差は僅かであるものの、わずかにリラックスした美しいグリッドが得られた。

7　結論

すでに述べたようにこれまでの提案手法を統合すると以下の特徴を備えた形状決定が可能となる。

- 引張り圧縮混合応力場により釣り合う連続体シェルの形状決定を正しく行える。
- 共役応力方向と共役曲率方向を揃えることができ、施工しやすいグリッドシェルへ変換できる。
- グリッドと境界形状を揃えられる。
- 自由境界の条件を正しく扱える。
- 新しい応力関数を重ねることで複雑な境界形状を持つ問題も安定的に解ける。
- 主曲率線だけでなく、一般の２重共役グリッドについても擬法線ベクトル（ねじれのないオフセット方向）の存在を保証し、そのような方向を同時に求めることができる。

ようになった。これにより現代的で洗練されたグリッドシェルの形状決定手法はほぼ完成し、実用段階に突入したと考えている。

参考文献

1）M. E. Gurtin. A generalization of the beltrami stress functions in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13:321–329, 1963.

2）M. Miki, T. Igarashi, and P. Block. Parametric self-supporting surfaces via direct computation of airy stress functions. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(4):1–12, jul 2015.

3）M. Miki and T. Mitchell. Interactive exploration of tension-compression mixed shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(6), nov 2022.

4）M. Miki and T. Mitchell. Alignment conditions for nurbs-based design of grid shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 43(3), jul 2024.

5）H. Schaefer. Die spannungsfunktionen des dreidimensionalen kontinuums und des elastischen körpers. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 33(10-11):356–362, 1953.

境界円を不変に保つメビウス変換を用いたエッジオフセットメッシュの対称性制御

和多田　遼[1)]，大崎　純[2)]
1)大阪産業大学建築・環境デザイン学部，准教授，博士(工学)，watada@edd.osaka-sandai.ac.jp
2)京都大学工学部建築学科，教授，工博

1 序

建築の大空間曲面をH形鋼やT形鋼，平鋼やボックス鋼材などの対称面を有する規格断面の梁からなる多角形格子構造（ラチスシェル構造）で設計する場合，接合部では一般に梁の対称面のねじれ（図 1(a)）や梁材軸の鉛直角度差によるキンク（図 1(b)）が生じる．また，梁で囲まれるパネルが4辺以上の多角形の場合は，その平面性は一般に満たされない．接合部におけるこれらのねじれやキンクへの対応としては，特殊な接合部の製作や梁そのものへのねじり加工が行われ，さらに非平面パネルに対しては曲げガラスの使用などが必要となるなど，製作コスト増の要因となる．

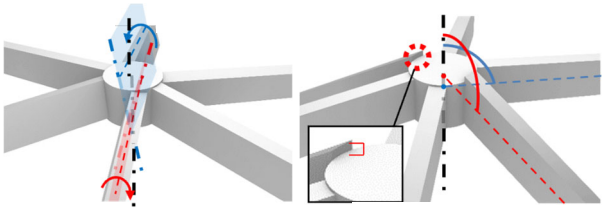


図1　接合部でのねじれ・キンク

離散微分幾何の手法を用いて提案されたエッジオフセットメッシュ（EO メッシュ）（図 2）は，各エッジが単位球面上の充填円から定まる Koebe メッシュと平行を保つように構成される．梁の対称面位置を EO メッシュに基づき定めたラチスシェル（以下，EO ラチスシェル）は，同一梁せいの直線梁のみで構成され「ねじれ・キンク・非平面性」が生じない[1]．Koebe メッシュは平面上の円の充填パターンの逆ステレオ射影から生成される．著者らは，平面上の充填円のメビウス変換により Koebe メッシュの形状を変化させ，それとの平行性を保つ EO メッシュを各エッジの辺長・辺長比を設計変数とする逐次最適化により求める手法を提案した[2][3].

本研究では，平面上の単位円を指定した半径の円に移す制約を考慮したメビウス変換を提案し，それを単位円内に内接する充填円のパターンに作用させることで，Koebe メッシュおよび生成する EO メッシュの対称性を効率的に制御する手法を提案する．本手法により，外周端位置での各接合部が同一の外周円に近接し，その軸オフセットベクトルが同じ仰角を保ちつつ，多様な対称性を持つラチスシェルが得られることを示す．なお，本稿は査読中論文[4]の一部の概要をまとめたものである．

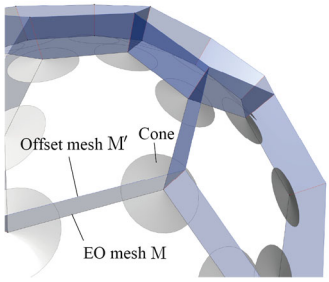


図2　EO メッシュ

2 方法

2.1 EO メッシュと Koebe 幾何

離散微分幾何分野において，ラチスシェルの各梁せいは多面体メッシュ M, およびそのオフセットメッシュM′の組で表現される（図 3）．EO メッシュは，メッシュ M とオフセットメッシュM′の対応するエッジe_{ij}，e'_{ij}が平行かつ等しい距離を保つものと定義される[1]．EO メッシュのエッジe_{ij}とe'_{ij}で定まる Central plane を梁の対称面に定めたラチスシェル（EO ラチスシェル）は，接合部でねじれ，キンクが生じず，パネルは平面となる．

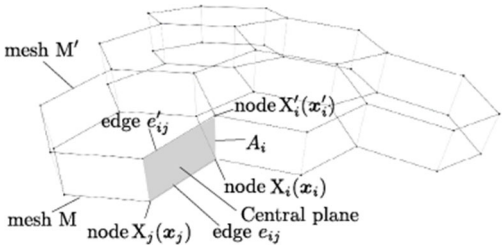


図3　メッシュMとそのオフセットメッシュM′

メッシュ M が EO メッシュであるための必要十分条件は，M が Koebe メッシュ K と平行の関係にあることである．ここに，Koebe メッシュ K は各エッジが球面上に充填された円と接するメッシュを指し（図 4），二つのメ

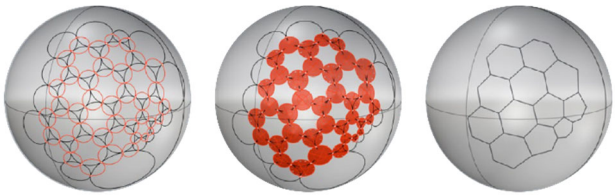


図 4　球面上の充填円から生成される Koebe メッシュ

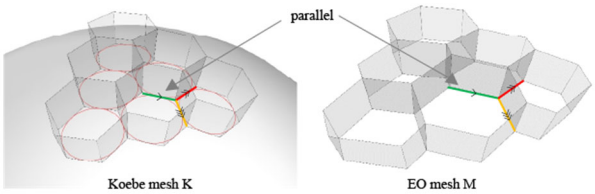


図 5　メッシュの平行性

ッシュが平行とは，両メッシュが同本数のエッジからなり，対応するエッジが全て平行であることと定義される（図 5）．

2.2　メビウス変換による Koebe メッシュの生成

複素平面上の複素数$z \in \mathbb{C}$に作用するメビウス変換fは次式で表される．

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0) \qquad (1)$$

これは以下に書き換えられる．

$$f(z) = \rho e^{i\theta}\left(\frac{1}{z+\alpha}+\beta\right) \qquad (2)$$

ここに，αおよびβは複素数，ρは正の実数，θは$-\pi \leq \theta < \pi$を満たす実数，iは虚数単位を表す．ここで$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$，$\beta = \beta_R + i\beta_I$とおけば，メビウス変換は 6 個の実数パラメータ$\alpha_R, \alpha_I, \beta_R, \beta_I, \rho, \theta$で定義できる．

平面上の円の充填パターンP_0（以下，基準 2D 円パターンとする）は，逆ステレオ射影により単位球面上の充填円パターンQ_0に射影される（図 6(a)）．平面上のパターンP_0に式(2)を作用させることで，P_0及び対応する球面上のQ_0が変換される過程を図 6(b)-(f)に示す．これらは，並進 $z \to z+\alpha$（図 6(b)），反転 $z \to 1/z$（図 6(c)），並進 $z \to z+\beta$（図 6(d)），拡大縮小 $z \to \rho z$（図 6(e)）および回転 $z \to e^{i\theta}z$（図 6(f)）からなる．これらを経て得られる球面上の円パターン Q，およびそれから定まる Koebe メッシュ K を図 6(g)に示す．式(2)のメビウス変換を構成する 6 個の実数パラメータのうち，θは円パターンの剛体回転のみを表すため，以下では$\theta = 0$とする．

2.3　境界円を用いた Koebe メッシュの制御

基準 2D 円パターンP_0が単位円に内接している場合を考える（図 7）．このとき，Koebe メッシュのサイズと対

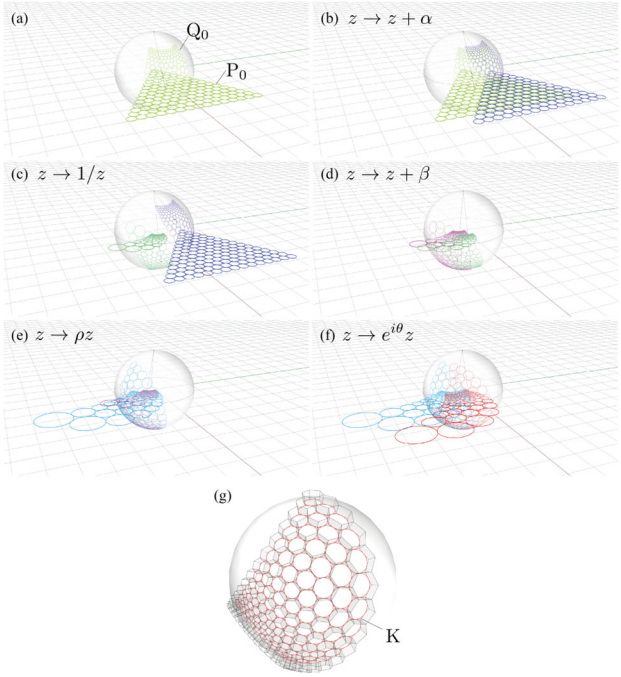


図 6　平面上のメビウス変換と単位球面への射影

称性を効率的に制御する方法を以下に述べる．

複素平面上の原点を中心とする単位円は$z = \cos t + i \sin t$で表される（tは$-\pi \leq t < \pi$を満たす実数）．これに式(2)のメビウス変換に含まれる並進 $z \to z+\alpha$，反転 $z \to 1/z$，並進 $z \to z+\beta$を逐次作用させると，zは以下のz_1に移される．

$$z_1 = \frac{1}{z+\alpha}+\beta$$

$$= \frac{\cos t + \alpha_R - i(\sin t + \alpha_I)}{(\cos t + \alpha_R)^2 + (\sin t + \alpha_I)^2} + \beta_R + i\beta_I \qquad (3)$$

ここで，変換後のz_1が複素平面上の原点を中心とする半径Rの円に移されると仮定する．このとき，式(3)を$|z_1|^2 = R^2$に代入し整理すると，次式を得る．

$$2\{\beta_R + \alpha_R(|\beta|^2 - R^2)\}\cos t$$
$$+2\{-\beta_I + \alpha_I(|\beta|^2 - R^2)\}\sin t$$
$$+1 + 2\alpha_R\beta_R - 2\alpha_I\beta_I + (|\alpha|^2+1)(|\beta|^2 - R^2) = 0 \qquad (4)$$

式(4)が任意のtで成り立つことから，以下が成り立つ．

$$2\{\beta_R + \alpha_R(|\beta|^2 - R^2)\} = 0 \qquad (5a)$$

$$2\{-\beta_I + \alpha_I(|\beta|^2 - R^2)\} = 0 \qquad (5b)$$

$$1 + 2\alpha_R\beta_R - 2\alpha_I\beta_I + (|\alpha|^2+1)(|\beta|^2 - R^2) = 0 \qquad (5c)$$

これを整理し，次の各式を得る．

$$(\alpha_R + \alpha_I)(|\alpha|^2 - 1)\beta_R = -\alpha_R(\alpha_R + \alpha_I) \qquad (6a)$$

$$(\alpha_R + \alpha_I)(|\alpha|^2 - 1)\beta_I = \alpha_I(\alpha_R + \alpha_I) \qquad (6b)$$

$$R^2 = \frac{1 + 2\alpha_R\beta_R - 2\alpha_I\beta_I + |\beta|^2(|\alpha|^2+1)}{|\alpha|^2+1} \qquad (6c)$$

式(6a),(6b)から以下を得る．

$$\beta_{\mathrm{R}} = -\frac{\alpha_{\mathrm{R}}(\alpha_{\mathrm{R}}+\alpha_{\mathrm{I}})}{(\alpha_{\mathrm{R}}+\alpha_{\mathrm{I}})(|\alpha|^2-1)} \tag{7a}$$

$$\beta_{\mathrm{I}} = \frac{\alpha_{\mathrm{I}}(\alpha_{\mathrm{R}}+\alpha_{\mathrm{I}})}{(\alpha_{\mathrm{R}}+\alpha_{\mathrm{I}})(|\alpha|^2-1)} \tag{7b}$$

最後に，拡大縮小 $z \to \rho_0 z$により半径Rの円から単位円移す$\rho_0 = 1/R$は以下で表される．

$$\rho_0 = 1\Big/\sqrt{\frac{1+2\alpha_{\mathrm{R}}\beta_{\mathrm{R}}-2\alpha_{\mathrm{I}}\beta_{\mathrm{I}}+|\beta|^2(|\alpha|^2+1)}{|\alpha|^2+1}} \tag{8}$$

メビウス変換パラメータβ_{R}およびβ_{I}を式(7)を満たすように定め，またρを設計変数ρ_{D}と式(8)で定まる基準値ρ_0の積，すなわち$\rho = \rho_{\mathrm{D}}\rho_0$で定めれば，図 7 に示す通り，Koebe メッシュの形状を 3 個の独立したパラメータ$[\alpha_{\mathrm{R}}, \alpha_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{D}}]$で制御できる．ここに，$\rho_0$は式(8)から定まる$\alpha_{\mathrm{R}}, \alpha_{\mathrm{I}}$の関数であり，メビウス変換の前後で Koebe メッシュの外接円の半径を不変に保つ．特に，$\alpha_{\mathrm{R}} = \alpha_{\mathrm{I}} = 0$の場合$\rho_0 = 1$となる．よって以下では，$[\alpha_{\mathrm{R}}, \alpha_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{D}}]$の 3 つの設計パラメータを用いて Koebe メッシュの形状を制御する．

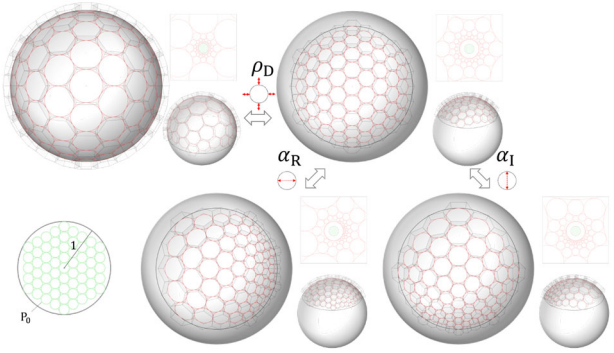


図 7　境界円を持つ Koebe メッシュの
メビウス変換パラメータ$[\alpha_{\mathrm{R}}, \alpha_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{D}}]$による制御

2.4　EO メッシュの生成

Koebe メッシュに対する平行性を保ちつつ，EO メッシュ M の面を逐次的に生成する方法を提案する．ここで，EO メッシュ M の各面は，最初の 1 面を除き，既に存在する面に隣接するように順次生成される．

面の生成に必要なパラメータは，生成される六角形面の凸性を維持するために用いられる正の辺長パラメータξ_{f1}, ξ_{f2}，および 0 から 1 の間の辺長比パラメータη_fからなり，隣接面の数により定まる（図 8）．

- 隣接面数が 1 の場合，新しい面fは 2 つの辺長ξ_{f1}, ξ_{f2}と 1 つの辺長比η_fより定まる（図 8(a)）．

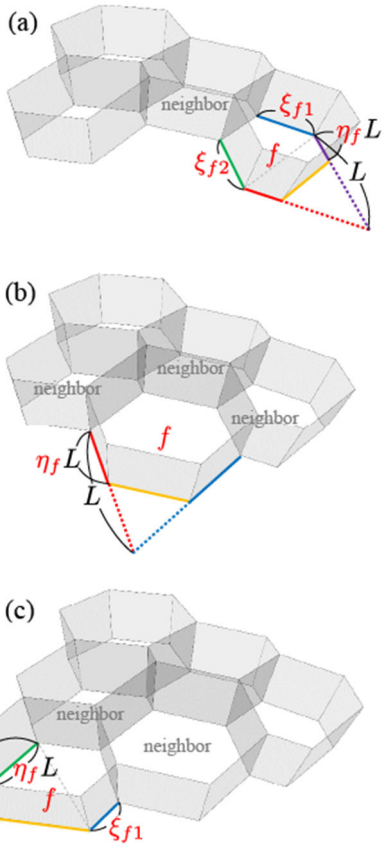


図 8　EO メッシュの逐次生成：(a) 隣接面数が 1，
(b) 隣接面数が 3，(c) 隣接面数が 2，

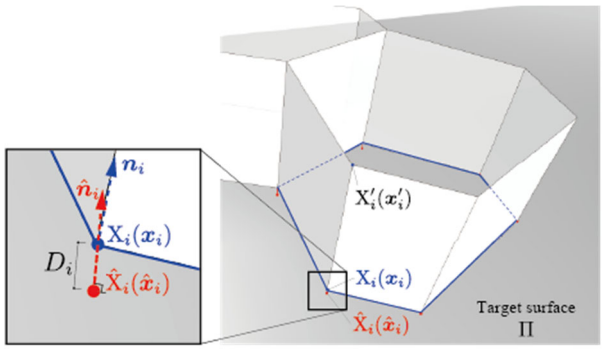


図 9　メッシュ M 内の節点X_iおよび
ターゲット曲面Π上の近接点$\hat{X}_i$

- 隣接面数が 3 の場合，新しい面fは 1 つの辺長比η_fより定まる（図 8(b)）．
- 隣接面数が 2 の場合，新しい面fは 1 つの辺長ξ_{f1}と 1 つの辺長比η_fより定まる（図 8(c)）．

生成される EO メッシュ M を設計者が指定するターゲット曲面Πに適合させるため，生成されたメッシュ M の各節点X_iのノード軸$\boldsymbol{n}_i = (\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}_i)/||\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}_i||$と，対応するターゲット曲面Π上の最近接点$\hat{X}_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$での単位法線

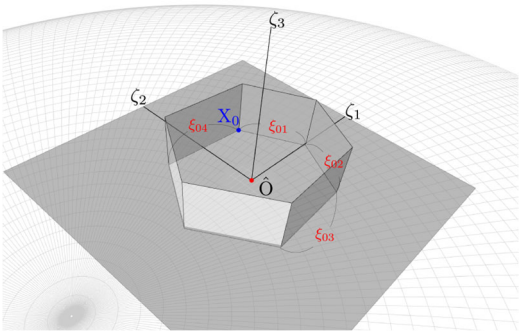


図 10　EO メッシュ M の初期面の生成

ベクトル$\hat{\boldsymbol{n}}_i$の差のノルム$\|\boldsymbol{n}_i - \hat{\boldsymbol{n}}_i\|$の総和を最小化する最適化問題を解く（図 9）．このとき，X_iと$\hat{X}_i$の距離$D_i = \|\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{x}}_i\|$に上限値の制約を設ける．

生成後のメッシュに最終的に含まれる全ての面番号の集合をFとし，それらを複数回のステップに分けて追加することを考える．第kステップで追加される面の集合をF_kとし，F_kに含まれる面の形状をまとめて決定する以下の最適化問題を考える．

$$\text{min.} \quad \Phi_k(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|F_k|} \sum_{f \in F_k, i \in I_f} \|\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{y}) - \hat{\boldsymbol{n}}_i(\boldsymbol{y})\|^2$$

$$\text{s.t.} \quad \max_{f \in F_k, i \in I_f} D_i(\boldsymbol{y}) - D^{\mathrm{U}} \le 0 \qquad (9)$$

$$y_i^{\mathrm{L}} \le y_i \le y_i^{\mathrm{U}} \quad (i = 1, \dots, n_y)$$

ここに，$|F_k|$はF_kに含まれる面の数，I_fは面fに含まれる節点の添字集合，$\boldsymbol{y}$は追加する面の集合F_kに含まれる辺長及び辺長比$\xi_{f1}, \xi_{f2}, \eta_f$から構成される設計変数ベクトル，$n_y$はその成分数，$y_i^{\mathrm{U}}$および$y_i^{\mathrm{L}}$はその各成分の上下限値，$D^{\mathrm{U}}$は生成するメッシュとターゲット曲面との距離の上限値を表す．最適化問題(9)を各ステップkで解き，得られる面を追加し，最終的に EO メッシュ M を得る．

なお，生成するメッシュ M の最初の 1 面（これを面 0 とする）は，対応する Koebe メッシュの面の法線方向とターゲット曲面上の法線方向が一致する点$\hat{O}$を誤差最小化により求め，その接平面上に上記と同様の手法で生成する（図 10）．このとき，メッシュ M の最初の面の形状は一つの節点X_0の点$\hat{O}$を原点とする局所座標系での座標$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$，および 4 個の辺長変数$\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}, \xi_{04}$，計 7 個の変数で定まる．最初の面は，$\boldsymbol{y}$をこれら 7 個の変数とし，$k = 0, f = 0, F_0 = \{0\}$とした最適化問題(9)より定める．

3　数値例題

3.1　ターゲット曲面

図 11 に示すZ軸回りに回転対称な曲面Πを考える．この曲面Πの母線GはXZ平面上の 4 点（頂点 T(0,0,1.6)，制御点 P および Q，外周点 E(5,0,0)）により定義される 3 次ベジエ曲線（単位は m）である．点 T と E における母線 G の法線ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{n}_{\mathrm{T}}$および$\boldsymbol{n}_{\mathrm{E}}$とし，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{T}} = [0,0,1]^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{E}} = [\cos(\pi/3), 0, \sin(\pi/3)]^{\mathsf{T}}$とする．点 T および E での接線の交点を R とし，点 P および Q をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = p\overrightarrow{\mathrm{ER}}$，$\overrightarrow{\mathrm{TP}} = q\overrightarrow{\mathrm{TR}}$で定める．以下の例では$p = q = 0.65$とする．

3.2　Koebe メッシュの対称性

本例題に用いる基準 2D 円パターンP_0を図 11(a)に，それより得られる Koebe メッシュ K を図 11(b)に示す．メッシュ K の面の数（P_0の円の数）は 61 であり，これらは最初の面 0 を除き$F_1, \dots, F_4$の 4 つのグループに分けられている（図 11(b)）．

メビウス変換パラメータρ_{D}を，Koebe メッシュの境界円上での単位曲面の法線ベクトル（図 12(a)の赤矢線）とターゲット曲面Πの外周円 C 上での法線ベクトル（図 12(b)の赤矢線）が一致するように 1 変数の最適化問題として求めると，$\rho_{\mathrm{D}} = 3.73205$を得る．図 11(b)はメビウス変換パラメータ$[\alpha_{\mathrm{R}}, \alpha_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{D}}] = [0,0,3.73205]$より得られる Koebe メッシュを示している．同様に，ρ_{D}の値を変えず，α_{R}，α_{I}の値を変化させ得られる Koebe メッシュを図 11(c)-(e)に示す．

3.3　EO メッシュの生成

次に，Koebe メッシュから，最適化問題(9)より EO メッシュ M を生成する．ここで，EO メッシュ M の最外周の 12 個の節点$\{X_i \mid i \in I_{\mathrm{support}}\}$が，ターゲット曲面Πの

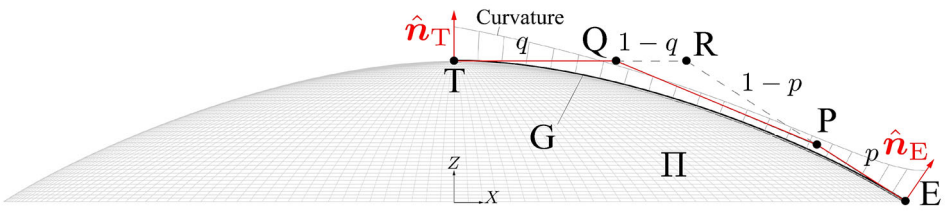


図 11　ターゲット曲面

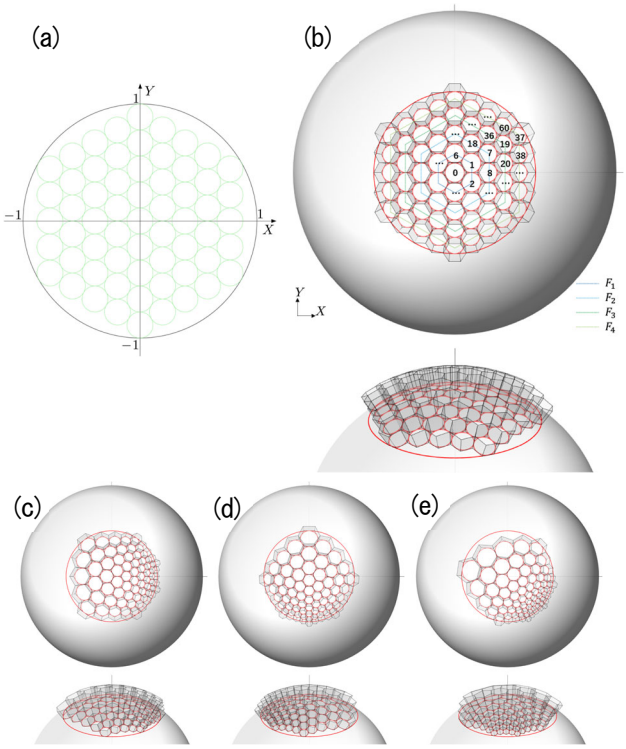


図 12　基準 2D 円パターンと Koebe メッシュ K (ρ_D=3.73205)：(a) 基準 2D 円パターンP_0, (b) K ($[\alpha_R, \alpha_I]$=[0,0]), (c) K ($[\alpha_R, \alpha_I]$=[0.3, 0]), (d) K ($[\alpha_R, \alpha_I]$= [0,0.3]), (e) K ($[\alpha_R, \alpha_I]$= [0.3,0.3])

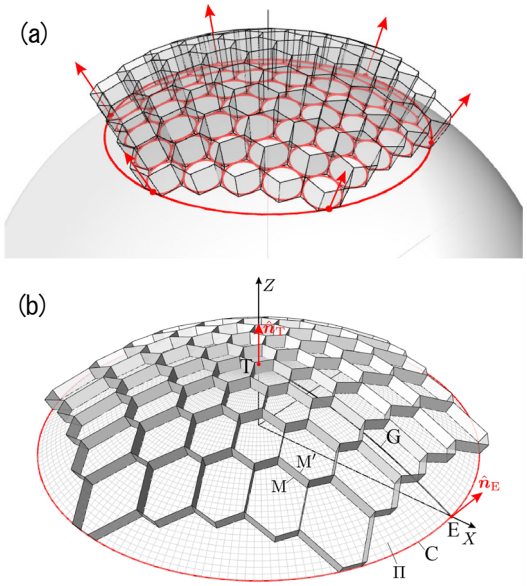


図 13　EO メッシュの生成：(a) Koebe メッシュ K, (b) EO メッシュ M 及びオフセットメッシュ M'

外周円 C に到達するよう，最外周($k = 4$)の面の生成時には目的関数に節点と円 C の水平距離$D_{\mathrm{edge},i}$の二乗和 $H_{\mathrm{edge}} = \sum_{i \in I_{\mathrm{support}}} \left(D_{\mathrm{edge},i}\right)^2$を重み付きで加算する．

最適化ソルバには SciPy[5]の SLSQP を用いた．ここに，D^{U}および$y_i^{\mathrm{L}}, y_i^{\mathrm{U}}$は計算の安定性を保つ範囲で収束解において制約がアクティブにならない値とした．また，最適化問題(9)の不等式制約条件はペナルティ関数として目的関数に加算し，得られるメッシュが Koebe メッシュの形状の対称性と同一の対称性となるための等式制約を合わせて考慮した．ターゲット曲面上の最近接点$\hat{\mathbf{x}}_i$および法線ベクトル$\hat{\boldsymbol{n}}_i$の計算には RhinoCommon API[6]を用いた．

メビウス変換パラメータを$\rho_D = 3.73205$とし，$\alpha_R = \alpha_I = 0$からα_R, α_Iを変化させ得られた EO メッシュを図 14-16 に示す．図 14 は$\alpha_I = 0$に固定し，α_Rを 0, 0.15, 0.30 と変化させた結果である．このとき，対応する Koebe メッシュは図 12(c)のように$C_s^{(XZ)}$対称（XZ 平面に対する鏡映対称）を持ち，得られる EO メッシュも同様の対称性を持つことが確認できる．節点とターゲット曲面の距離の最大値$\max D_i$は 0.0029 からα_Rの増加に伴い合わせて増加している．同様に，図 15 は$\alpha_R = 0$に固定し，α_Iを 0, 0.15, 0.30 と変化させた結果，図 16 は$\alpha_R = \alpha_I$とし，これを 0, 0.15, 0.30 と変化させた結果を示す．図 15,16 それぞれに対応する Koebe メッシュは図 12(d)および図 12(e)であり，これらの対称性と同じく，図 15(b),(c)は$C_s^{(YZ)}$対称（YZ 平面に対する鏡面対称），図 16(b),(c)はC_1対称（対称性をもたない）となることが確認できる．

4　まとめ

本研究では，平面上の単位円を同一円に移す制約を考慮したメビウス変換を提案し，それを単位円内に内接する充填円に作用させることで，Koebe メッシュとそれを用いて得られる EO メッシュの対称性を効率的に制御する手法を提案した．

謝辞：本研究は JST　CREST　JPMJCR1911 の助成を受けたものである．

参考文献

1) Pottmann, H., Liu, Y., Wallner, J., Bobenko, A., Wang, W. : Geometry of multi-layer freeform structures for architecture, ACM SIGGRAPH 2007 papers, pp. 65-es, 2007.

2) Watada, R., Ohsaki, M. : Sequential generation of hexagonal lattice shell consisting of edge offset mesh, Proc. IASS Symposium 2023, Int. Assoc. Shell and Spatial

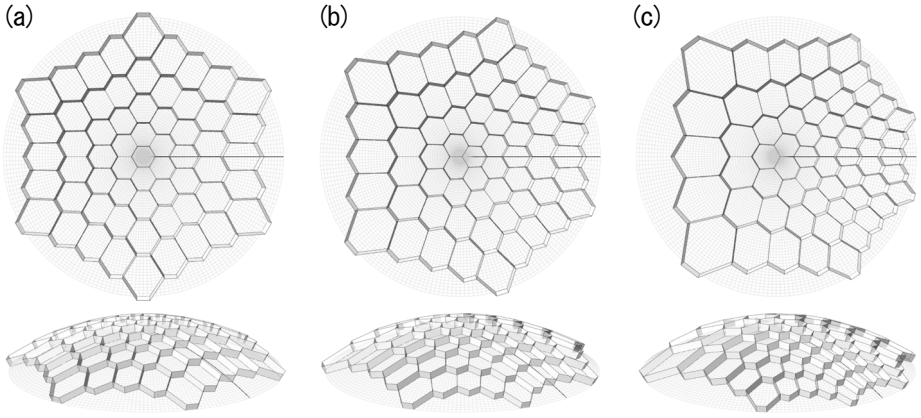


図 14　EO メッシュ（$C_s^{(XZ)}$対称）：(a) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0, 0]$, max D_i=0.0029,
(b) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0.15, 0]$, max D_i=0.0127, (c) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0.3, 0]$, max D_i=0.0194

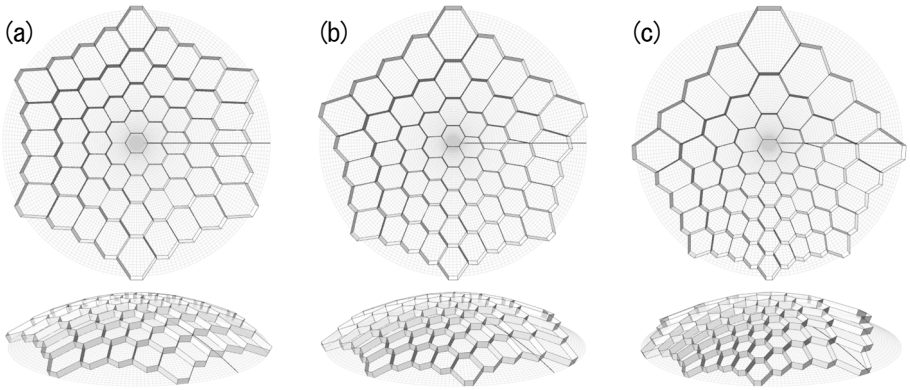


図 15　EO メッシュ（$C_s^{(YZ)}$対称）：(a) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0, 0]$, max D_i=0.0029,
(b) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0, 0.15]$, max D_i=0.0128, (c) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0, 0.3]$, max D_i=0.0224

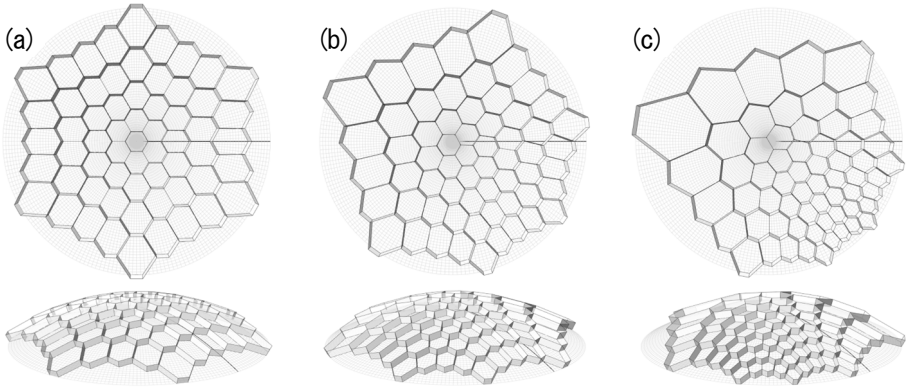


図 16　EO メッシュ（C_1対称）：(a) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0, 0]$, max D_i=0.0029,
(b) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0.15, 0.15]$, max D_i=0.0224, (c) $[\alpha_R, \alpha_I]=[0.3, 0.3]$, max D_i=0.0372

Struct., Melbourne, Australia, pp. 244-250, 2023.

3) Watada, R., Ohsaki, M.：Sequential generation method for hexagonal lattice shells with edge offset mesh, Proc. IASS Symposium 2024, Int. Assoc. Shell and Spatial Struct., Zurich, Switzerland, paper No. 365, 2024.

4) Watada, R., Ohsaki, M. : Sequential generation and evaluation of torsion-free hexagonal lattice shells with symmetry-controlled edge offset mesh (投稿中).

5) SciPy Community：SciPy: Scientific Library for Python, https://docs.scipy.org/doc/scipy/ (参照日:2025.9.4)

6) Rober McNeel & Associates：RhinoCommon API Dofcumentation, https://developer.rhino3d.com/api/RhinoCommon/ (参照日:2025.9.4)

最適化手法を用いた，正規・非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りで閉じた形状の形態創生

田川浩之 [1)]，向井彩七 [2)]，鈴木沙菜子 [2)]
1)武庫川女子大学建築学部建築学科，教授，Ph.D.，tagawa@mukogawa-u.ac.jp
2)武庫川女子大学大学院建築学専攻，修士課程

1 はじめに

筆者らは，正規，非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りを定義し，パターンの数え上げや建築設計への応用を検討してきた [1),2)]．円弧状，渦巻状ミウラ折りなどの正規な配置の一般化ミウラ折りは，自己交差を起こさず平坦に折り畳まれる．一方，正規な配置から双対的な操作によって得られる，砂時計パターンや Huffman Tessellation[3)]などの非正規な配置の一般化ミウラ折りは，折り畳まれる過程で自己交差し立体的なヴォールト形状になる．本稿では，剛体折り畳みシミュレーションに 2 分探索法による収斂計算を合せて行うことで正規，非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの閉じた形状を得る．

2 一般化ミウラ折りの連動折り畳み条件式

球面三角法により，各節点に集まる 4 本の折れ線のうち，対にある折れ線の展開角度の絶対値は互いに等しい．（山，谷）の組み合わせの稜線の展開角度 ρ_l と，（山，山）もしくは（谷，谷）の稜線の展開角度 ρ_k の関係式は，

$$\cos\rho_k = K + \frac{1-K^2}{\cos\rho_l + K} \qquad \cos\rho_l = -K + \frac{1-K^2}{\cos\rho_k - K}$$

K は Conversion Coefficient[4)]であり，各節点での挟角θ_i, θ_j を用いて下式で定義される．

$$K = \frac{1+\cos\theta_i \cos\theta_j}{\sin\theta_i \sin\theta_j}$$

図 1 に示す Unit 1～4 において，

$$\cos\rho_2 = K_1 + \frac{1-K_1^2}{\cos\rho_1 + K_1} \qquad \cos\rho_3 = -K_2 + \frac{1-K_2^2}{\cos\rho_2 - K_2}$$

$$\cos\rho_4 = K_3 + \frac{1-K_3^2}{\cos\rho_3 + K_3} \qquad \cos\rho_5 = -K_4 + \frac{1-K_4^2}{\cos\rho_4 - K_4}$$

これらのユニットが連動折り畳み挙動をするには，展開角度ρ_1 とρ_5 が等しい，すなわち，$\cos\rho_5 = \cos\rho_1$ となる必要がある．$\cos\rho_3$ について上式の両側から解くと，

$$\frac{1-K_3^2}{\dfrac{1-K_4^2}{\cos\rho_1 + K_4} + K_4 - K_3} - K_3 = \frac{1-K_2^2}{\dfrac{1-K_1^2}{\cos\rho_1 + K_1} + K_1 - K_2} - K_2$$

上式がいかなる $\cos\rho_1$ に対して成り立つには，式(1)が成り立つ必要がある．これが一般化ミウラ折りで連動した剛体折り畳み挙動に必要とされる条件式である [4)]．

$$(K_4 - K_3)(1 - K_1K_2) = (K_1 - K_2)(1 - K_3K_4) \quad (1)$$

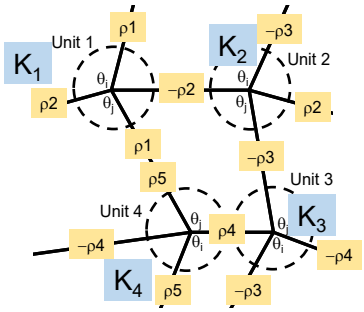
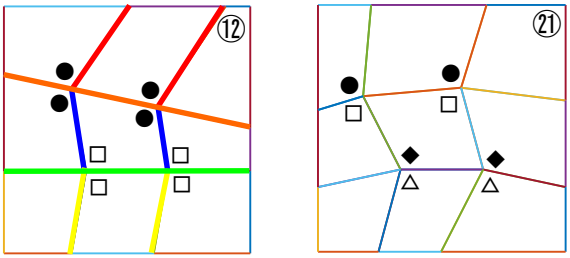


図 1 環状連結した 4 つの 4 価頂点まわりの展開角度

3 正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの閉じた形状

3.1 正規な配置の特異な一般化ミウラ折り

折れ線パターンや折れ線の挟角にある規則性，対称性により式(1)を満たす特異なパターンを特異な一般化ミウラ折りと定義する．特異な一般化ミウラ折りは，[A] K_1=K_4, K_2=K_3，[B] K_1=K_2, K_3=K_4，[C] K_1=K_2=K_3=K_4 の 3 つの場合に分類され，これらのパターンを数え上げると，付録 1 に示すように，26 パターン存在する．図 2 に示す，パターン⑫が星形多角形折り，パターン㉑が渦巻状ミウラ折りである．渦巻状ミウラ折りは，折れ線のパターンに平行線が存在しない唯一のパターンである．これら全 26 パターンに対して，同じパターンを縦横につなげていき，Tessellation にすることが可能である [2)]．



(a) 星形多角形折り　　(b) 渦巻状ミウラ折り

図 2 正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの例

3.2　星形多角形折りの閉じた形状

剛体平坦折り畳みミュレーション[1]で，展開角度Θに関して2分探索法による収斂計算を行い，星形多角形折りの閉じた形状を得る．Θ=0°において，16角形の星形多角形の展開図を折り畳むと，すぐに自己交差を起こす．そこで，Θ=0°の初期状態から2列分減らす．その平坦折り畳みシミュレーション結果を図3に示す．Θを0°から180°まで変化させた時のAB間の距離の変化を図4に示す．Θが90°，140°あたりと180°の3回，AB間の距離が0となり，閉じた形状となることが推測される．

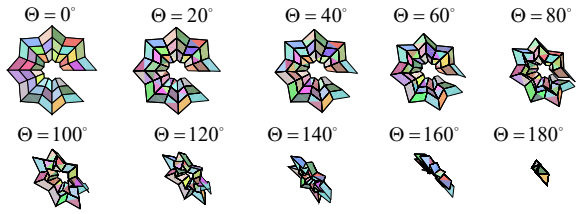


図3 星形多角形の剛体折畳みシミュレーション

2分探索法の収斂計算により，閉じた形状におけるΘの値を求める．その際，AB間の距離は，0の値になる近傍で連続関数とならないが，AB間の距離のy成分は，図5に示すように，Θに対して連続関数となる．Θの増加に伴って，Θが90°の近傍では単調増加し，Θが140°の近傍では単調減少する．そこで，Θが90°の近傍の収斂計算では，AB間の距離のy成分が正であれば，Θの上限値Θ_{upper}をΘの現在値とし，AB間の距離のy成分の負であれば，Θの下限値Θ_{lower}をΘの現在値として，Θの値を更新する．Θが140°の近傍の収斂計算では，それらと逆に設定する．Θが89.942°となるときの2分探索法による収斂計算の過程を図6，Θが89.942°となるときの2分探索法による収斂計算の過程を図7に示す．展開角度が収束していくことが分かる．Θが180°の時，図3に示すように，完全に平坦に折り畳まれるが，A点とB点は重なった位置にある．

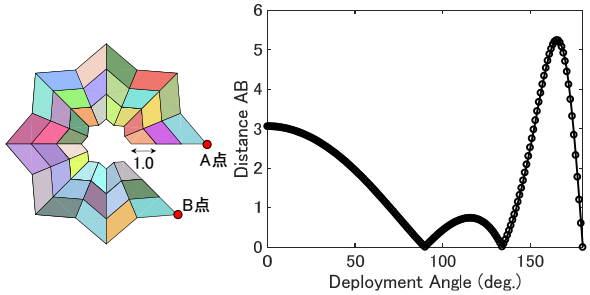


図4 折り畳み挙動時のAB間の距離

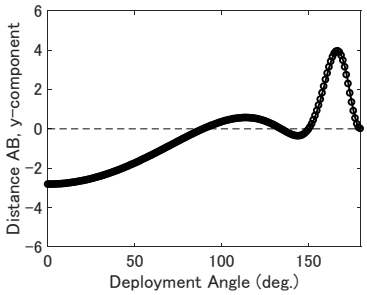
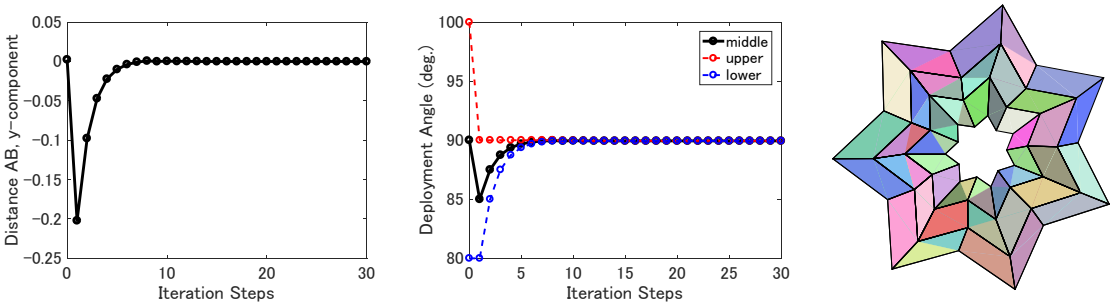
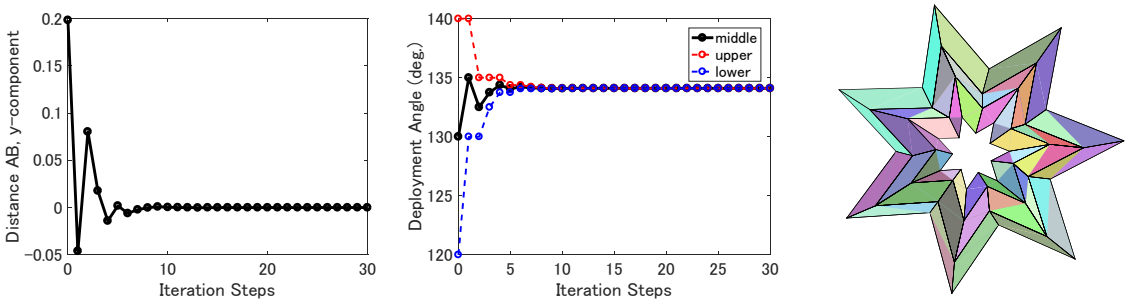


図5 折り畳み挙動時のAB間の距離のy成分



(a) AB間のy方向距離　(b) 展開角度の収束　(c) 閉じた形状

図6　2分探索法による最適化計算（Θ=89.942°の場合）



(a) AB間のy方向距離　(b) 展開角度の収束　(c) 閉じた形状

図7　2分探索法による最適化計算（Θ=134.099°の場合）

3.3　円弧状ミウラ折りの閉じた形状

円弧状ミウラ折りは，渦巻状ミウラ折りの同じ列の各四辺形の両側の長さを等しくする条件を付与することで得られる．図 8 に示す挟角α_3は下式により得られる．

$$\cos\alpha_3 = \frac{\cos\alpha_1\left(r\cos\alpha_1 + r\cos\alpha_2 - d\right) + \sin\alpha_1\left(r\sin\alpha_1 - r\sin\alpha_2\right)}{\sqrt{\left(d - r\cos\alpha_1 - r\cos\alpha_2\right)^2 + \left(r\sin\alpha_1 - r\sin\alpha_2\right)^2}}$$

α_3が求まると 2 列目の挟角が決まり，以後，漸化的に次の列の形状が定まる．円弧状ミウラ折りの例を図 9 に示す．8 角形の円弧状ミウラ折りの折れ線パターンの折り畳みシミュレーション結果を図 10 に示す．展開角度が 0° から増加するにしたがい，両端が離れていき，折り畳まれる過程において閉じた形状にならない．

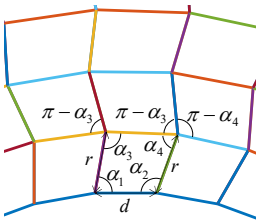
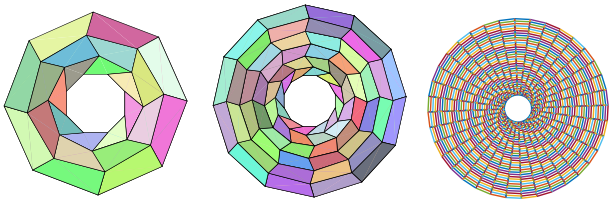


図 8　円弧状ミウラ折りの形状生成



(a) 8 角形　(b) 12 角形　(c) 36 角形

図 9 円弧状ミウラ折りの例

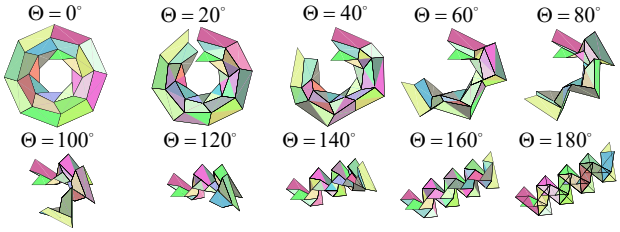


図 10 剛体折り畳みシミュレーション

閉じた形状を得るために，Θ=0°において，2 列分だけ重複させる．折り畳みシミュレーション結果を図 11 に示す．Θ の変化に伴う AB 間の距離の変化を図 12 に示す．Θ が 50° 辺りで AB 間の距離が 0 となっている．

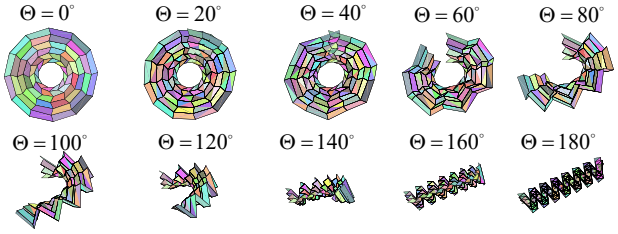


図 11 剛体折り畳みシミュレーション（2 列重複）

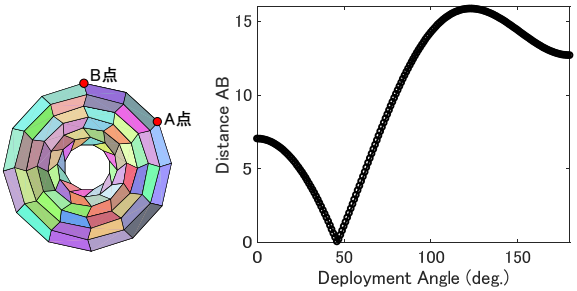


図 12 折り畳み挙動時の AB 間の距離

Θ が 40°と 60°の間で 2 分探索法による収斂計算を行った．この範囲では Θ の増加に伴い，図 13 に示すように，AB 間の距離の x 成分は単調減少するため，AB 間の距離の x 成分の正負により，Θ の上限値，下限値を更新した．2 分探索法による収斂計算の過程を図 14 に示す．丁度 46.224°の時，閉じた形状となった．

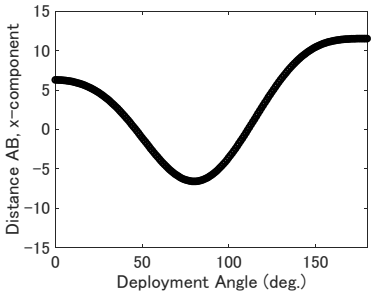
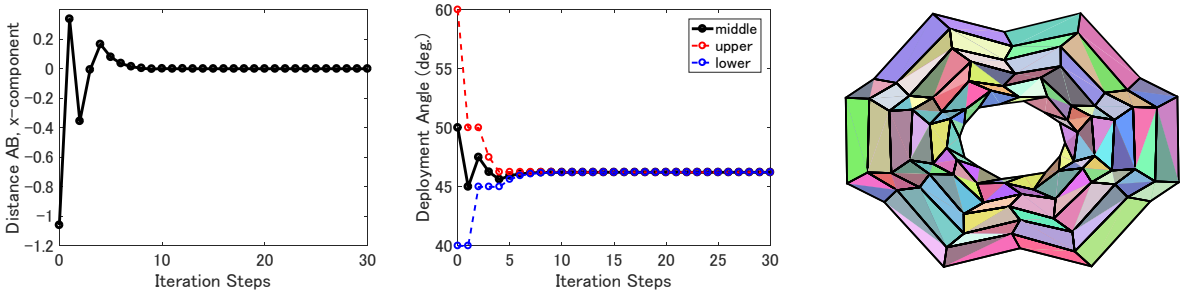


図 13 折り畳み挙動時の AB 間の距離の x 成分



(a) AB 間距離の x 方向成分　(b) 展開角度の収束　(c) 閉じた形状

図 14　2 分探索法による最適化計算（Θ=46.224°）

4 非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの閉じた形状

4.1 非正規な配置の特異な一般化ミウラ折り

正規な配置の 4 価頂点の対角にある挟角同士を入れ替えて配置し，さらに連動折り畳み条件を満たすように配置したものを「非正規な配置」と定義する．正規な配置から非正規な配置に入れ替える過程を図 15 に示す．Unit 2 と Unit 3 において，それぞれの 4 価頂点の対角にある 2 組の挟角同士を同時に入れ替える．このようにして得られる非正規な配置ともとの正規な配置を「双対」という．この操作を 2 回繰り返すと，もとの配置に戻る．一般化ミウラ折りは川崎定理を満たしているため，対角の角度の和は 180°である．したがって，1 つの角を θ とした場合，その対角の角度は(180°-θ)となる．非正規な配置への変換操作は，θ と(180°-θ)を入れ替える操作となる．

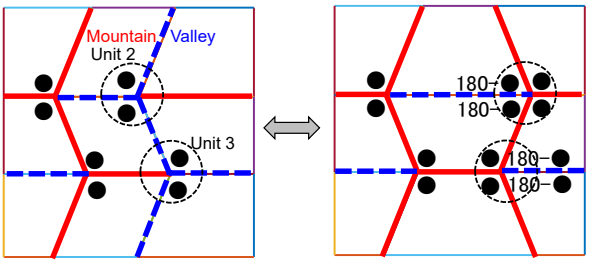


図 15 Unit 2 と Unit 3 での対角の入替えによる，正規から非正規な配置への双対的変換

正規な配置を非正規な配置に変換した場合でも，下式のように，Conversion Coefficient の K の値は変わらないため，式(1)の連動折り畳みの条件式を満たす．すなわち，1 自由度で連動した折り畳み挙動になる．

$$K' = \frac{1+(\pi-\cos\theta_i)(\pi-\cos\theta_j)}{(\pi-\sin\theta_i)(\pi-\sin\theta_j)} = \frac{1+\cos\theta_i\cos\theta_j}{\sin\theta_i\sin\theta_j} = K$$

正規な配置の Unit 2 と Unit 3 の挟角の入れ替え操作を行った非正規な配置では，山，谷折りのパターンが図 15 のように変化する．縦線は，山，山，山，・・・，と同じ折りの向きが連続するため，折り畳むと，全体形状は円筒型もしくは円錐形の三次元的な形状となる．よって，平坦に折り畳まれる前に必ず自己交差が生じることになり，物理的には平坦に折り畳めない．正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの数え上げ同様に，Unit 2 と Unit 3 の挟角の入れ替え操作により得られる非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの数え上げを行ったところ，Tessellation が可能である非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りは，付録 2 に示すように，計 17 パターン存在することが分かった．

4.2 Huffmann Tessellation の閉じた形状

非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの例として，図16に示すHuffman Tessellation[3]がある．なお，このパターンに双対となる正規な配置は存在しない．あれば，●と□が同じ値になる必要があり，これはミウラ折りとなる．Huffman Tessellationは折り畳むと筒状になるが，一般には閉じた形状とならない．2段階の2分探索法による収斂計算により，Huffman Tessellationの閉じた形状を得る．

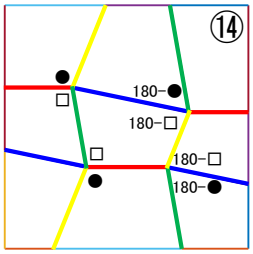


図 16 Huffmann Tessellation

四辺形の A の角度と展開角度 Θ について，図 17 に示すように，2 段階の 2 分探索法による収斂計算を行った．まず，A の角度の初期値を 136.4°とする．Θ についての収斂計算を行う．図 18 に示す PQ 間の距離の x 成分が負の場合は，Θ の下限値 Θ_{lower} を現在値で更新し，正の場合は，Θ の上限値 Θ_{upper} を現在値で更新する．これを 15 回行った後，PQ 間の距離の y 成分が正の場合は，A の下限値 A_{lower} を現在値で更新し，負の場合は，A_{upper} を現在値で更新する．これを 15 回行う．

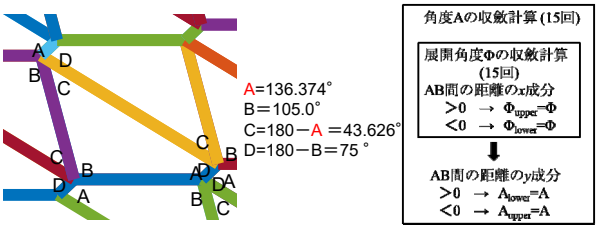


図 17 2 段階の 2 分探索法による収斂計算

最適解は，展開角度Θ が19.583°，A の角度が136.374°である．図18に示すように，左右の端辺が 2 段ずれて噛み合って，殆ど閉じた立体形状を得た．2 段階の 2 分探索法による収斂計算の過程を図 19 に示す．

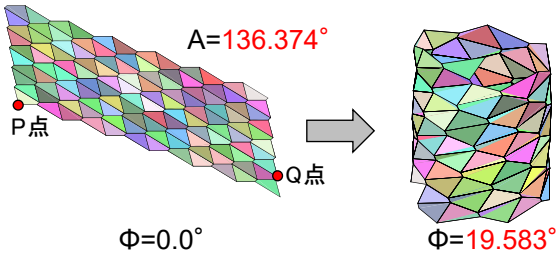


図 18 Huffman Tessellationmの閉じた形状

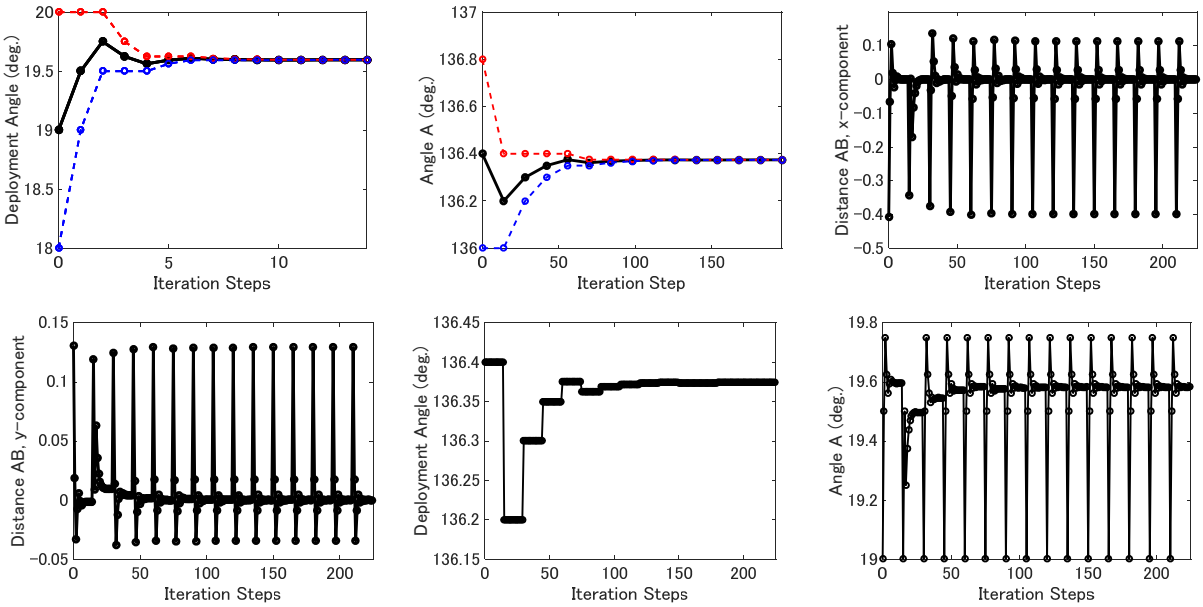


図 19　2 段階の 2 分探索法による収斂計算（Θ=19.583°，A=136.374°）

5　非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの閉じた形状（Unit 3 と Unit4 での入れ替え）

正規な配置から非正規な配置に入れ替える別の方法として, 図 20 に示すように, Unit 3 と Unit 4 において，それぞれ 4 価頂点の対角にある 1 組の挟角同士を入れ替える．Conversion Coefficient の K’の値は，下式のように，もとの正規な配置の場合の K の値から変化するが, Unit 3 と Unit 4 における K’の値は同じになる．よって，正規な配置の特異な一般化ミウラ折りで，[B] K1=K2, K3=K4, もしくは，[C] K1=K2=K3=K4 の場合は，このような操作によって非正規な配置としたものは，式(1)の連動折り畳み条件式を満たす．

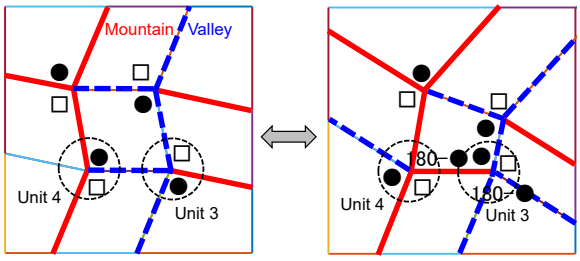


図 20　Unit 3 と Unit 4 での対角の入替えによる，正規から非正規な配置への双対的変換

$$K_3' = \frac{1+\cos\left(\pi-\theta_i^3\right)\cos\theta_j^3}{\sin\left(\pi-\theta_i^3\right)\sin\theta_j^3} = \frac{1-\cos\theta_i^3\cos\theta_j^3}{\sin\theta_i^3\sin\theta_j^3} \neq K_3$$

例として，図 21 に示す，Oval Tessellation から着想を得た Hokkyo’s construction[5]がある．初期状態(Θ=0°)の展開図において縦方向の 1 箇所の稜線に切れ目を入れて，剛体平坦折り畳みシミュレーション結果を図 22 に示す．展開途中は切れ目ができるが，初期状態(Θ=0°)と最終状態(Θ=180°)では閉じた形状となる興味深い挙動を示す．

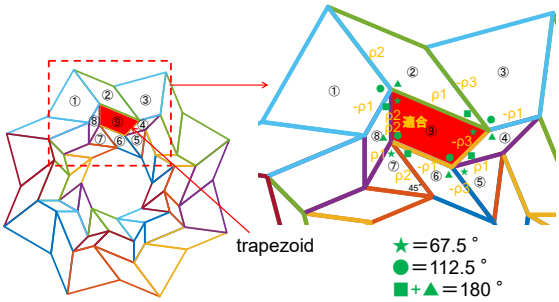


図 21 Hokkyo’s construction[5]

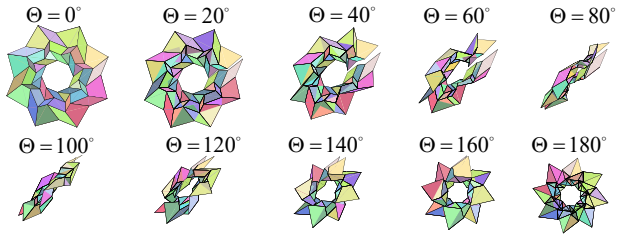


図 22 Hokkyo’s construction の剛体折り畳みシミュレーション

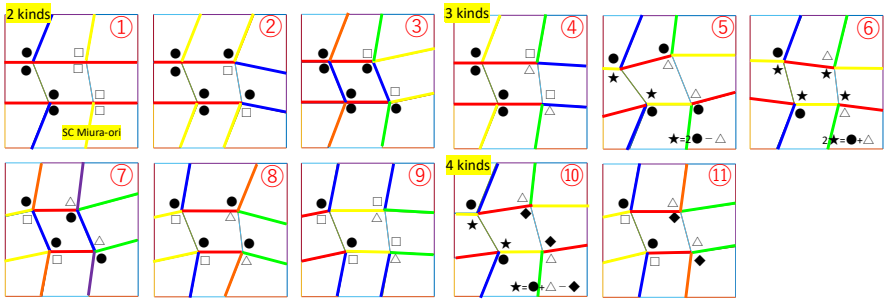
6　おわりに

正規，非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りで閉じた形状を，剛体折り畳みシミュレーションに 2 分探索法による収斂計算を合せて行うことで, 得ることができた．

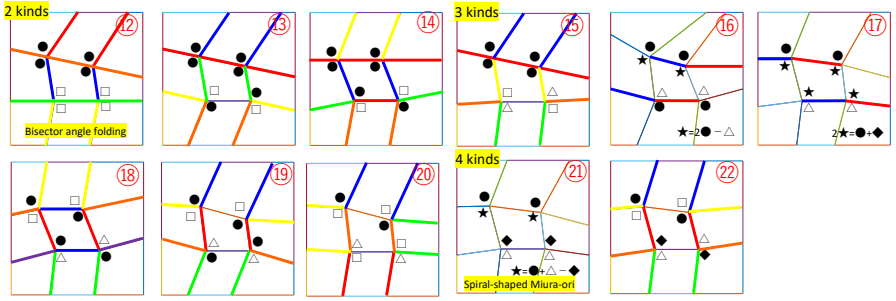
謝辞：
本研究は，JSPS 科研費 23K04113 の助成を受けた．

付録 1　正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの全パターン

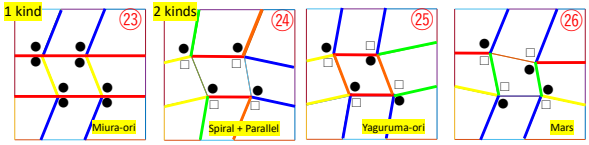
[A] K_1=K_4, K_2=K_3 (11 パターン)



[B] K_1=K_2, K_3=K_4 (11 パターン)

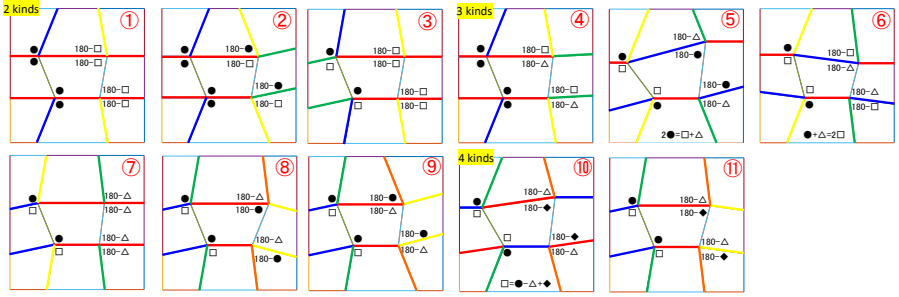


[C] K_1=K_2=K_3=K_4 (4 パターン)

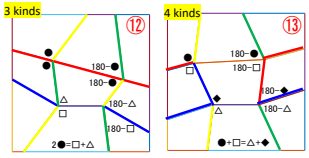


付録 2　非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの全パターン（Unit 2 と Unit 3 での入替）

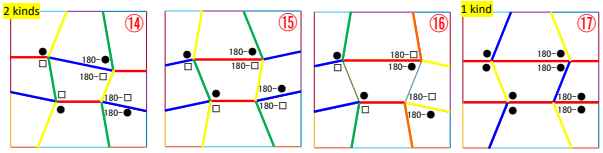
[A] K_1=K_4, K_2=K_3 (11 パターン)



[B] K_1=K_2, K_3=K_4 (2 パターン)



[C] K_1=K_2=K_3=K_4 (4 パターン)



参考文献

1) H. Tagawa, N. Yoshioka, T. Suzuki: Proposal of arc- and spiral-shaped Miura-ori and its application to the design of large roof architecture, Proceedings of the IASS Symposium 2022, Beijing, China, 2022

2) H. Tagawa, A. Sugimura, A. Mukai, K. Inomata: Counting-up and classification of all combination patterns of singular generalized Miura-ori, Proceedings of the IASS 2024 Symposium, Zurich, Switzerland, 2024.

3) Huffman, D. A., 1976. “Curvature and creases: A primer on paper”. IEEE Transactions on Computers, C-25(10), October, pp. 1010–1019.

4) T. Tachi: “Generalization of rigid foldable quadrilateral mesh origami,” Proceedings of the IASS symposium 2009, Valencia, Spain, 2009.

5) 法橋厚美: “Origami Tessellation の新しい構成方法について,” 奈良女子大学大学院　人間文化研究科博士前期課程修士論文 2016 年 1 月

格子状折紙構造のベンディングアクティブ構造への適用可能性

早川健太郎[1)]，大崎　純[2)]
1)日本大学生産工学部創生デザイン学科，助教，博士(工学)，hayakawa.kentaro@nihon-u.ac.jp
2)京都大学大学院工学研究科建築学専攻，教授，博士(工学)

1 はじめに

折紙を応用することで，独特の意匠を実現するだけでなく，形を変化させて環境に適応するファサードや可搬性・施工性に優れたシェルター等の実現が期待される[1)]。平坦な紙を切らずに折る狭義の折紙だけでなく，チューブ[2)]やハニカム[3)]などさまざまなトポロジーで折紙の特性を生かした構造が提案されている。

著者らは，図1に示す直角二等辺三角形パネル8枚からなるユニットで構成される格子状折紙構造を提案している[4,5)]。提案構造はパネルを変形させずに折る「剛体折り」が可能であり，全パネルが平行な「平坦折り」状態をもつ。非平坦状態では，1個の孤立した特異点を除き，変形自由度が1である。一方，上記の特異点では変形自由度が2となり，構造全体の面外曲げ方向のメカニズムモードが生じる（図3）。この変形は1次の微小変形メカニズム[6)]であり，大変形を生じるにはパネルの変形が必要である。

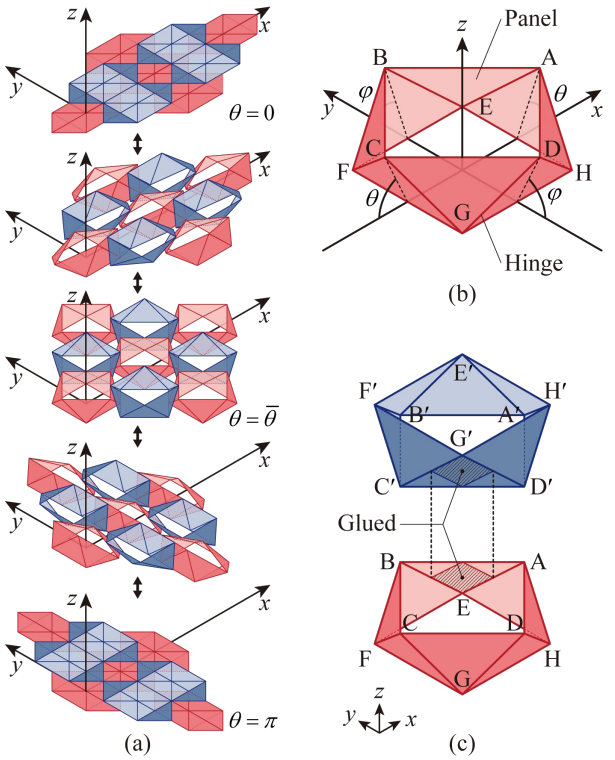


図1　格子状折紙構造の概要：(a) 主経路，(b) ユニット，(c) パネルの“接着”範囲[4,5)]

本稿は，既報[4,5)]の内容を抜粋，再構成して新しい成果を追加したものである。特に，非平坦な特異点における分岐メカニズムモード方向の変形に対する剛性が，折畳み変形を除いた他の変形方向よりも非常に小さいことに着目し，格子状折紙構造のベンディングアクティブ構造への適用可能性について議論する。

2 格子状折紙構造の概要

2.1　ユニットの頂点座標

図1(b)に示すようにユニットの頂点をA~Hとする。直角二等辺三角形パネルの斜辺の長さを$2a$とし，頂点E~Hの座標を以下のように固定する。

$$\mathrm{E}(a,\,a,\,0),\ \mathrm{F}(-a,\,a,\,0),\ \mathrm{G}(-a,\,-a,\,0),\ \mathrm{H}(a,\,-a,\,0)$$

このとき，頂点A~Dの座標は図1(b)中のパネルとxy平面のなす角$0 \le \theta, \varphi \le \pi$を用いて以下のように表せる。

$$\mathrm{A}(a(1+\cos\theta),\,0,\,a\sin\theta),\quad \mathrm{B}(0,\,a(1+\cos\varphi),\,a\sin\varphi),$$
$$\mathrm{C}(-a(1+\cos\theta),\,0,\,a\sin\theta),\ \mathrm{D}(0,\,-a(1+\cos\varphi),\,a\sin\varphi)$$

剛体折りの条件より，θとφは以下の関係を満たす。

$$\cos\theta+\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi=0$$
$$\Rightarrow \varphi=2\tan^{-1}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\cot\frac{\theta}{2}\right) \qquad (1)$$

2.2　構造全体の構成

パネル角θとφが式(1)を満たすように変化するとき，2.1節に頂点座標を示した図1(b)のユニット（図中赤）と，それをxy平面に関して鏡映反転したユニット（図中青）を平行移動して接続することで図1(a)に示す剛体折り経路をもつ格子状折紙構造を構成できる。隣接ユニットは，直角の頂点がもう一方のパネルの斜辺の中点に一致するよう，図1(c)に斜線で示す領域でパネルを“接着”することで接続される。このように格子状折紙構造を構成するとき，図1(a)の2つの平坦折り状態を結ぶ剛体折り経路を格子状構造の「主経路」とよぶ。主経路上で図1(c)の頂点G~HおよびG′~H′に対応する各ユニットの頂点は常に正方形をなす。

3 Panel-pin モデルを用いた剛性評価

3.1 変位の適合条件

本節では, panel-pin モデル[6]を用いて提案構造の主経路上の各折り状態における簡易な剛性評価を行う。Panel-pin モデルは剛なパネルを頂点でピン接合したモデルで，パネルの参照点の並進変位と回転変位を変数とする。ここで，パネル i の重心の並進変位ベクトルを $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3$，回転変位ベクトルを $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^3$ とおく。このとき，パネル i は変位前の参照点を中心に $\boldsymbol{\psi}_i$ まわり右ねじの方向に $\|\boldsymbol{\psi}_i\|$ だけ回転する。また，変位前のパネル i の参照点から頂点 k に向かうベクトルを $\mathbf{d}_{i,k} \in \mathbb{R}^3$ とおく。図2のようにパネル i と j が頂点 k で接続されているとき，パネル変位によって頂点 k に生じるパネル i,j 間の離間量ベクトル $\mathbf{g}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3$ を以下のように定める。

$$\mathbf{g}_{i,j,k} = \mathbf{u}_j + \{\mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}_j) - \mathbf{I}_3\}\mathbf{d}_{j,k} - \mathbf{u}_i - \{\mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}_i) - \mathbf{I}_3\}\mathbf{d}_{i,k} \quad (2)$$

ただし，$\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$，$\mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}_i) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ はそれぞれ3次の単位行列と回転ベクトル $\boldsymbol{\psi}_i$ に関する回転行列である。

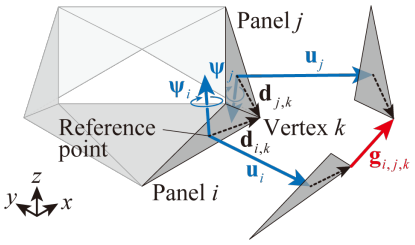


図2　パネル変位と離間量ベクトル

格子状構造全体のパネル変位のうち，非拘束成分をまとめたベクトルを $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ (n は非拘束変位自由度数)とおき，「一般化変位ベクトル」とよぶ。なお，接着されたパネルは変位を共有するため同一の変数で表す。また，式(2)で定義される離間量ベクトル $\mathbf{g}_{i,j,k}$ を全てのパネル–頂点の組 (i,j,k) に関してまとめたものを $\mathbf{G}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^m$ とおき，「非適合量ベクトル」とよぶ。剛体折り経路では常に $\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ が満たされる。1ユニットに8頂点が存在し，それぞれの頂点に3個のパネルが接続されているため，24個のパネル–頂点の組が各ユニットに存在する。すなわち，格子状構造全体において m はユニット数の72倍である。

3.2 接線剛性行列

Zhou ら[7]と同様に，非適合量ベクトル $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ の各成分を頂点でパネルを接続する弾性バネの変形量とみなし，非剛体折り変形に関するひずみエネルギーを定義する。さらに，メカニズム方向の微小な剛性を与えるため，ヒンジに弾性回転バネを配置する。ヒンジの折り角とその初期値をまとめたベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})$，$\boldsymbol{\rho}_0 \in \mathbb{R}^h$ (h はヒンジの数)とし[6]，一般化変位ベクトル $\mathbf{X}$ の成分に対応した定荷重を $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，panel-pin モデルの全ポテンシャルエネルギー $\Pi(\mathbf{X})$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{X}) = {} & \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{G}}\mathbf{G}(\mathbf{X}) \\ & + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\rho}_0\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\rho}_0\right) - \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{K}_{\mathrm{G}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \in \mathbb{R}^{h\times h}$ はそれぞれ $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ の各成分に対応するバネとヒンジの回転バネの剛性を対角成分とする対角行列である。$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ の各成分は $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$ と比較して十分に小さいものを与える。Panel-pin モデル全体の接線剛性行列を $\mathbf{K}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とおくと，その (i,j) 成分 $K_{i,j}(\mathbf{X})$ は $\Pi(\mathbf{X})$ の $\mathbf{X}$ に関する2階微分より以下のようになる。

$$\begin{aligned}K_{i,j}(\mathbf{X}) = {} & \mathbf{G}(\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{G}}\frac{\partial^2\mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial X_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{G}}\frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \\ & + \left(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\rho}_0\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{H}}\frac{\partial^2\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})}{\partial X_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{H}}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})}{\partial X_j}\end{aligned} \quad (4)$$

ただし，X_i は $\mathbf{X}$ の第 i 成分である。

3.3 各折り状態での剛性評価

Filipov ら[8]の手法と同様に，panel-pin モデルの接線剛性行列の固有値解析を主経路上の各折り状態で行うことで，格子状構造の剛性を評価する。ただし，パネルの接触は無視する。各グリッド方向に3ユニットずつ配置した3×3格子状折紙構造について，θ の値を 0.001π から 0.999π まで変化させて固有値解析を行う。解析の過程には $\theta = \varphi$ となる折り状態を必ず含むようにする。この折り状態は剛体折りメカニズムの孤立した特異点であり，メカニズムの自由度が1から2に変化する。このときの θ の値を $\bar{\theta}$ とおくと，式(2)より，$\bar{\theta} \simeq 65.53$ deg. である。

パネルの斜辺 (ユニット上下端の辺) の長さを 30 mm，パネル厚を 3 mm とする。$\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$ の対角成分の値はパネル厚 3 mm とヤング率 20 GPa の積である 6×10^4 kN/m とする。一方，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ の対角成分の値はヒンジの単位長さ当たりの回転剛性 5×10^{-5} kN とヒンジ長 $30\sqrt{2}$ mm の積である約 2.21×10^{-6} kN·m とする。また，パネルおよび頂点の変位を拘束しない。このとき，panel-pin モデルの接

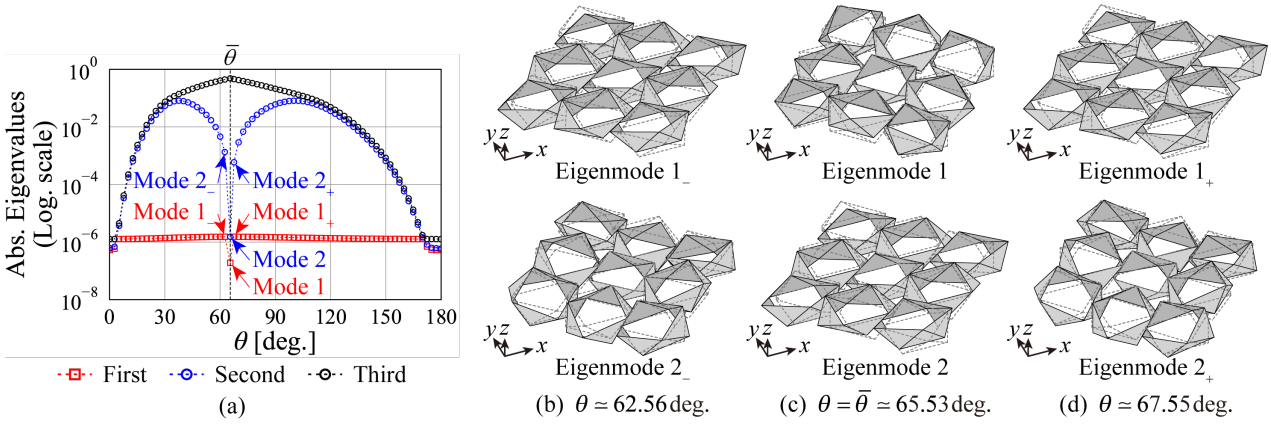


図3　Panel-pin モデルの接線剛性行列の (a) 固有値と (b, c) 固有モード[4,5]

線剛性行列は，対応する固有ベクトルから得られる変形モード（以下，固有モード）が剛体変位を表す6個のゼロ固有値を各 θ においてもつ。これらの固有値を除いて最小の固有値をここでは最小固有値とよび，以降昇順に2番目，3番目，…の固有値とよぶ。また，対応する固有モードを固有モード1, 2, 3, …とよぶ。

図3(a)に1~3番目の固有値の値を示し，図3(c)に $\theta = \bar{\theta}$ ，図3(b, d)に $\bar{\theta}$ の前後1ステップでの固有モード1, 2を示す。$\bar{\theta}$ の前後1ステップでの固有モードはそれぞれ下添え字「$_-$」および「$_+$」をつけて表す。図3(a)に示すように，最小固有値は平坦に近い折り状態と $\theta = \bar{\theta}$ の折り状態を除いてほぼ一定で，$\theta = \bar{\theta}$ では2番目の固有値がこれらに近い値である。図1(b–d)の固有モード1$_-$, 2, 1$_+$がこれらの固有値に対応し，主経路方向の剛体折りメカニズムモードと一致する。一方，1次の微小変形メカニズムの自由度が1から2に変化することにともない，$\theta = \bar{\theta}$ で2番目の固有値が急激に減少して3番目の固有値に対し非常に小さくなる。このとき，図3(b)の固有モード1が分岐メカニズムモードと一致し，固有モード2$_-$, 2$_+$が同様の変形を示している。すなわち，$\theta = \bar{\theta}$ で最小と2番目の固有値に対応する固有モードの形状が入れ替わっている。

以上より，図1(a)の主経路方向の変形の剛性は折り状態によらずほぼ一定である。これは，主経路方向の剛性がヒンジの回転剛性のみで決定されることを意味する。また，図3(c)の固有モード1の面外曲げ方向の剛性は，非平坦かつ $\theta = \bar{\theta}$ 付近以外の折り状態では主経路方向の変形の剛性よりも非常に大きく，$\theta = \bar{\theta}$ 付近のみ急激に減少する。この性質は，平坦折り状態で運搬・組み立て，主経路に沿って展開したのち，$\theta = \bar{\theta}$ の折り状態で固有モード1方向の変形を生じさせるベンディングアクティブ構造への適用可能性が高いことを示している。

4　有限要素モデルを用いた詳細評価

4.1　モデルの構成

本節では，3×3格子状折紙構造の $\theta = \bar{\theta}$ での折り状態を初期形状として集中荷重を作用させた幾何学的非線形解析を有限要素モデルを用いて実行する。パネルの変形を考慮し，panel-pin モデルを用いた場合よりも実現象に近い詳細な評価を行う。これにより，生じうる部材ひずみ，ライズ・スパンと構造剛性の変化を評価し，図3(c)の分岐メカニズムモード方向の変形のベンディングアクティブ構造への応用可能性を検討する。解析には汎用有限要素解析ソフトウェアの Abaqus 2020[9]を用いる。

パネルの寸法は3節と同一とし，S3R と S4R シェル要素で図4のように離散化する。パネルのヤング率とポアソン比はそれぞれ CFRP の 20 GPa と0.2として線形を仮定する。ヒンジは軸線上に配置された9節点においてコネクター要素でモデル化し，3節で用いた $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ の対角成分の値の1/9である約 2.36×10^{-7} kN·m の回転剛性を与え，パネル同様に弾性を仮定する。隣接ユニットのパネルの接着部の節点には，変位が同一になるよう multi-point constraint (MPC) を与える。また，対称性を保ちつつモデルの剛体変位を拘束するため，図4においてひし形で表される中央のユニットの2節点の x, z 方向変位を拘束する。さらに，正方形で表される2節点の y 方向変位を拘束し，z 座標が同一になるように変位を制約する。

図5(a), 6(a), 7(a)に示す向きの集中荷重が4箇所に作用している3通りの荷重条件1~3について格子状構造の変形を4.2～4.4節でそれぞれ評価する。荷重の大きさは正負の値をとる荷重係数を図中の基準荷重に乗じてスケーリングすることで決定する。各荷重条件における荷重係数の上下限値は幾何学的非線形解析が収束する範囲で格子状構造の変形量を参考に決定した。

変形状態の評価には図4に示すスパン $s_1 \sim s_4$ とライズ r_1，r_2 を用いる。節点 A~I を xy 平面上に投影した点を $\bar{A} \sim \bar{I}$ とし，$s_1 \sim s_4$ をそれぞれ点の組 $(\bar{A}, \bar{I})$，$(\bar{C}, \bar{G})$，$(\bar{B}, \bar{H})$，$(\bar{D}, \bar{F})$ 間の距離とする。また，点 E を変位を拘束したひし形と正方形で示す4節点の平均位置の点とし，r_1，r_2 をそれぞれ点の組 (B, E)，(B, D) の z 座標の差の絶対値とする。スパンとライズの初期値はそれぞれ $s_1 = s_2 \simeq 2.90\,\mathrm{m}$，$s_3 = s_4 \simeq 2.30\,\mathrm{m}$，$r_1 = r_2 = 0\,\mathrm{m}$ である。

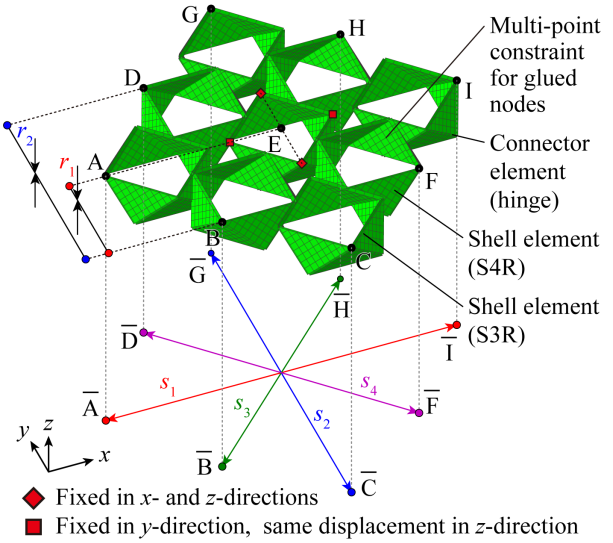


図4　有限要素モデル[4,5]

4.2　荷重条件1（主経路方向の荷重）

図5(a)に示す主経路方向の荷重を作用させる。図5(b, c)はそれぞれ荷重係数が–0.01, 0.01のときの形状であり，主経路両端の平坦折り状態に近い変形を示している。図中のメッシュの色は絶対値が最大の主ひずみの値の分布を表しており，非常に小さいひずみで平坦折り状態が実現されている。図5(d)はヒンジまたはパネルのひずみエネルギーの和を示しており，ヒンジの回転とパネルの弾性変形のいずれが格子状構造の変形において支配的かを示している。荷重条件1ではヒンジのひずみエネルギーが変形過程において常に大部分を占めており，主経路に沿った剛体折りによる変形をしていることを表している。

図5(e)に荷重係数に対するライズ–スパン比の変化を，図5(f, g)にそれぞれスパンの変化量に対するライズの変化量を図示する。これらより，格子状構造の面外方向の変形はほとんどないことが分かる。また，変形が進みパネルと荷重が平行になるにつれて，荷重係数の絶対値の増加に対するスパンの変化が小さくなっており，xy 平面方向の剛性が上がっていることを示している。

4.3　荷重条件2（分岐メカニズム方向の荷重）

図6(a)に示す荷重を作用させる。図6(b, c)はそれぞれ荷重係数が–0.7, 0.7のときの形状で，図3(c)の固有モード1と同様にガウス曲率が負の曲面を近似する面外方向変形を示す。図6(d)のようにひずみエネルギーは主にパネルで生じており，剛体折り変形ではないことが分かる。一方，図6(e), 7(e)より，荷重条件2では4.4節の荷重条件3より大きな面外変形を生じているにもかかわらず，変形に必要な荷重の大きさは同ライズ–スパン比で1/50程度である。さらに，図6(b, c)の絶対値が最大の主ひずみ，図6(d)のパネルのひずみエネルギーの和はいずれも図7(b–d)に示す荷重条件3の場合よりも小さい。

図6(e–g)より，特に変形初期においてスパンに対してライズが大きく増加していることが分かる。さらに，いずれのスパン，ライズ方向とも，荷重係数の絶対値の増加にともない変化が小さくなっており，剛性が上昇している。3節で示した分岐メカニズムモード方向に変形が進行していることから，変形初期はパネルの変形が小さく剛性も小さいが，変形が進行するとパネルの変形が生じるためだと考えられる。荷重係数が–0.7または 0.7の大変形を生じている場合でも，部材ひずみは十分小さく，CFRP は弾性範囲にあることが期待される[10]。上記の，比較的小さい荷重により大変形を生じること，変形にともない剛性が増加すること，大変形時も部材ひずみが比較的小さいことはいずれもベンディングアクティブ構造への適用に際して有利な特徴であるといえる。さらに，集中荷重のうち格子状構造を面内に圧縮する方向の力をタイバーあるいはケーブルを締める際に生じる力とみなすと，これらの要素を用いて変形を容易に生じさせることが可能であると期待される。ケーブルを用いた変形は図8に示す PETG 樹脂を用いた3D プリントで作成した5×5格子状構造の模型でも確認できた。

4.4　荷重条件3（面内の圧縮・引張方向の荷重）

図7(a)に示す格子状折紙構造を面内に引っ張る，または圧縮するような荷重を作用させる。面内に引っ張る場合，図7(b)に示すように角のパネルが集中的に曲げ変形する。一方，圧縮する場合，図7(c)に示すようにガウス曲率が正の曲面を近似するような面外方向の変形を生じる。図7(d)に示すようにひずみエネルギーは主にパネルの変形で生じている。また，図7(e–g)に示すように r_2 はほぼ0であるが，r_1 のスパンに対する増加量は荷重が大きくなるほど増加しており，剛性も低下している。

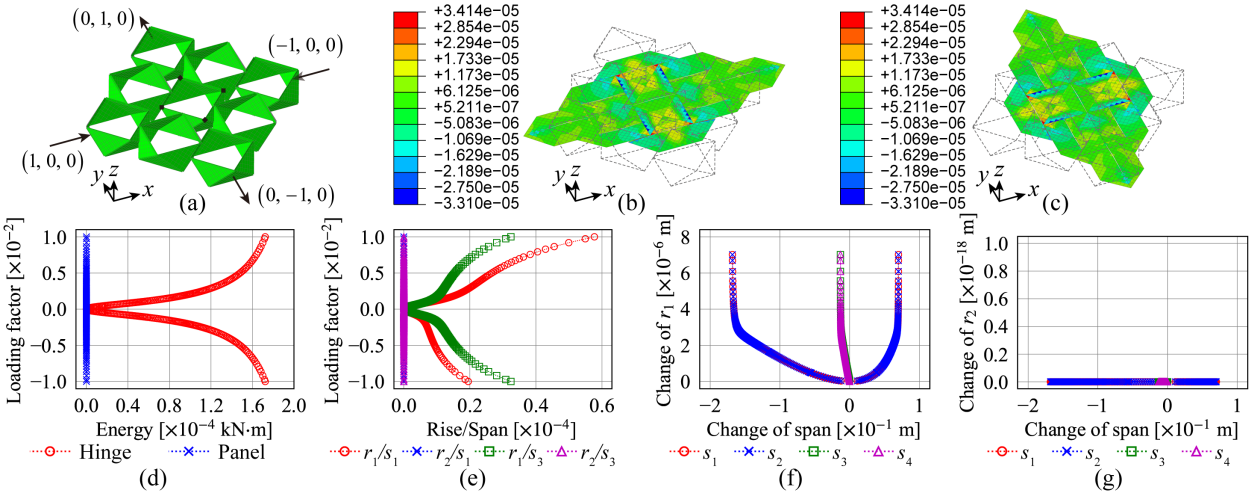


図5　荷重条件1：(a) 荷重方向，(b, c) 荷重係数がそれぞれ–0.01, 0.01のときの形状，(d) ヒンジまたはパネルのひずみエネルギーの和と荷重係数，(e) ライズ–スパン比と荷重係数，(f, g) スパンの変化量と r_1 または r_2 の変化量

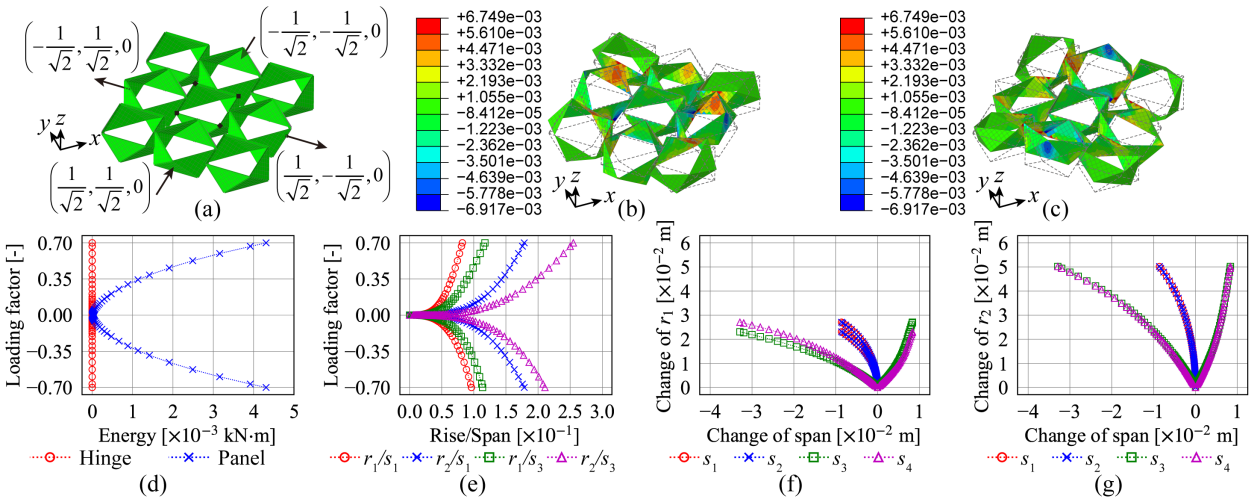


図6　荷重条件2：(a) 荷重方向，(b, c) 荷重係数がそれぞれ–0.7, 0.7のときの形状，(d) ヒンジまたはパネルのひずみエネルギーの和と荷重係数，(e) ライズ–スパン比と荷重係数，(f, g) スパンの変化量と r_1 または r_2 の変化量

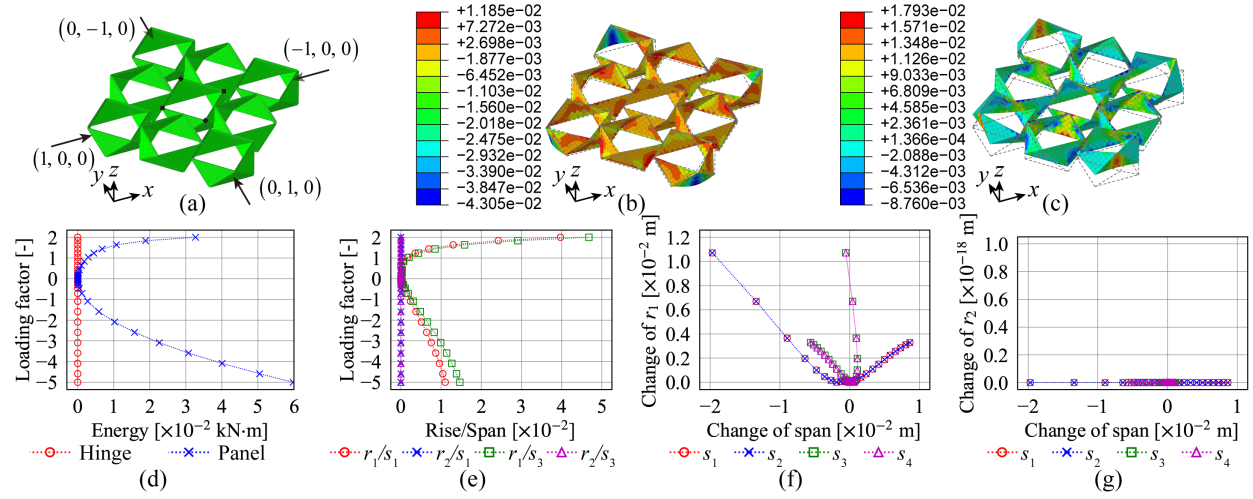


図7　荷重条件3：(a) 荷重方向，(b, c) 荷重係数がそれぞれ–5.0, 5.0のときの形状，(d) ヒンジまたはパネルのひずみエネルギーの和と荷重係数，(e) ライズ–スパン比と荷重係数，(f, g) スパンの変化量と r_1 または r_2 の変化量

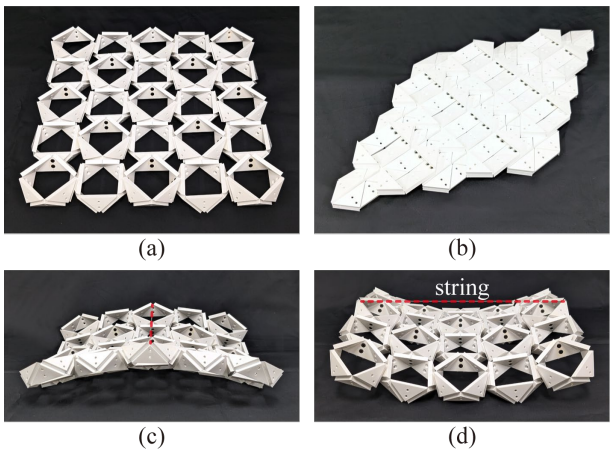


図8　PETG 樹脂を用いた3D プリントで製作した模型：(a) 展開状態，(b) 平坦折り状態，(c, d) 1本の糸で変形を固定した分岐メカニズムモードへの変形

3節の結果と荷重条件3の結果を合わせると，非平坦状態の格子状折紙構造は主経路方向および特異点での分岐メカニズムモード方向以外の変形については高い剛性を持っているといえる。

5 まとめと展望

本稿では，既報[4,5]での格子状折紙構造のパネルの非剛体折り変形を考慮した解析結果の概要を示し，ベンディングアクティブ構造への適用可能性について議論した。

Panel-pin モデルの接線剛性行列の固有値解析より，非平坦な剛体折りメカニズムの特異点で固有モードの順番が入れ替わり，構造全体が面外に曲げられ負のガウス曲率の曲面を近似する変形モードが卓越することを示した。さらに，シェル要素を用いてパネルの弾性変形を考慮した幾何学的非線形解析を行い，剛体折りである主経路方向，特異点での分岐メカニズム方向の変形に対する剛性やパネルのひずみを検討した。これにより，分岐メカニズム方向の変形が他の非剛体折りの変形方向より小さい部材ひずみで大変形を生じることを示した。

以上の結果と図8の模型による検証を合わせると，提案構造を平坦折り状態で運搬・組み立て，主経路に沿ってメカニズムの特異点である折り状態まで展開したのち，タイバーやケーブルを用いて分岐メカニズム方向の変形を生じさせることで，ベンディングアクティブ構造としての利用に適した性質を発揮することが期待される。

今後は模型による確認を交えながら，部材の弾性範囲で可能な最大のライズとスパンの比を検証するとともに，適切な材料を選定することでベンディングアクティブ構造としての設計・利用法を確立していく必要がある。また，本稿では合同な直角二等辺三角形パネルからなる3×3格子状折紙構造のみ解析したが，パネルの形状が異なる場合，ユニットの数が異なる場合について分岐メカニズム方向の変形特性がどのように変化するのかを定量的に検証することも今後の課題として挙げられる。

謝辞：本研究は JST CREST JPMJCR1911 および JSPS 科研費 JP25K17726 の助成を受けた。

参考文献

1) P.M. Reis, F.L. Jiménez, and J. Marthelot, Transforming architectures inspired by origami, Proc. Natl. Acad. Sci., 112 (40), pp. 12234–12235, 2015
2) E.T. Filipov, G.H. Paulino, and T. Tachi, Origami tubes with reconfigurable polygonal cross-sections, Proc. R. Soc. A, 472 (2185), 20150607, 2016
3) K. Saito, S. Pellegrino, and T. Nojima, Manufacture of arbitrary cross-section composite honeycomb cores based on origami techniques, J. Mech. Des., 136 (5), 051011, 2014
4) K. Hayakawa and M. Ohsaki, Origami-based flat foldable structure with non-flat singular point of rigid folding mechanism, Proc. IASS 2024, paper 133, 2024
5) K. Hayakawa and M. Ohsaki, Rigid- and flat-foldable grid origami structure exhibiting bifurcation of mechanism in non-flat state, Int. J. Solids Struct., 321, 113520, 2025
6) K. Hayakawa and M. Ohsaki, Panel-pin model for kinematic and equilibrium analysis of rigid origami, J. Int. Assoc. Shell. Spat. Struct., 64 (4), pp. 278–288, 2023
7) H. Zhou, M. Grasinger, P. Buskohl, and K. Bhattacharya, Low energy fold paths in multistable origami structure, Int. J. Solids Struct., 321, 265-266, 112125, 2023
8) E.T. Filipov, K. Liu, T. Tachi, M. Schenk, and G.H. Paulino, Bar and hinge models for scalable analysis of origami, Int. J. Solids Struct., 124, pp. 26–45, 2017
9) Dassault Systèmes, Abaqus 2020 documentation, 2019
10) B. Huang, M. Ma, X. Liu, Z. Shi, A. Wang, G. Xu, and Q.-r. Yue, Investigation on the fundamental mechanical properties and probabilistic characteristics of unidirectional carbon fiber reinforced polymer composite plates, Polym. Test., 131, 108355, 2024.

有限差分法による圧縮引張混在型自由曲面シェルの形状設計

中嶋 拓[1)]，大崎 純[2)]，三木 優彰[3)]
1)京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生・修士（工学），nakajima.taku.22x@st.kyoto-u.ac.jp
2)京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士（工学）
3)東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻 助教・博士（工学）

1　はじめに

シェル構造の曲面形状と力学的性能には強い相関があり，膜応力（面内力）により外力に抵抗する形状を設計することは重要である．鉄筋コンクリートや組積造によるシェル構造は，自重に対して面内の圧縮力のみで抵抗する形状が望ましい[1)]．しかし圧縮力のみで抵抗するという制約条件の下で実現可能な形状は限定的である．一方で，圧縮と引張の混在を許容し得る金属系材料や木質材料を用いることで，より多様なシェルの形状設計が可能となる．

2000年以降，図式力学（graphic statics）に基づいて，外力に対し膜応力のみで抵抗する構造を設計する手法が多く提案されている[2)]．Mikiら[3)]は，Airyの応力関数により水平投影応力を定義し，自重作用時のシェル曲面形状をNURBS曲面により設計する手法を提案した．膜応力のみで外力と釣合う連続体シェル構造の鉛直方向の釣合い方程式は，シェルの鉛直方向座標に関する2階の偏微分方程式として記述される[4)]．膜応力の主応力について圧縮と引張が混在するとき，鉛直方向の釣合い方程式は双曲型偏微分方程式となる．Miki and Mitchell[5)]は，釣合い方程式が双曲型となるシェルについて応力関数とシェル形状をともに変数として解形状を得る方法を提案した．しかし，双曲型の釣合い方程式は，境界条件が適切に設定されないとき解の存在が必ずしも保証されない．

著者らは，外力に対し圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う自由曲面シェルの形状設計手法を提案した[6)]．この手法は，シェルの釣合い方程式をTakeokaら[7)]の手法を参考に有限差分法で離散化し，線形連立方程式として解くことで釣合い形状を求める手法[8)]を，釣合い方程式が双曲型となるシェルに拡張したものである．提案手法は，線形連立方程式の係数行列を用いて解の存在や不定性の判定が可能である．本稿では文献[6]の，圧縮引張混在型自由曲面シェルの形状設計手法の概要を示すとともに，既報では対象としていない新たな数値例題により，提案手法が多様なシェル形状の生成に適用可能であることを示す．数値例題では，提案手法で導入した正則化手法とスムージング項の有効性を示すとともに，境界に直交する方向の膜応力が生じない自由境界を有する自由曲面シェルの設計例を示す．

2　シェルの釣合い方程式

2.1　グラフ曲面で定義したシェルの釣合い方程式

x, y方向を水平方向，z方向を鉛直方向とする直交座標系において，曲面の高さhがx, yの関数$h(x, y)$で表されるグラフ曲面のシェルを考える．ここでは，シェルの膜理論に基づき，面外方向の変形に関する曲げモーメントとせん断力は考慮しない．また，シェル断面の単位長さあたりの断面力を簡単のため応力とよぶ．

図1に示すシェルの微小要素について，yz平面とxz平面にそれぞれ平行な曲面の切断面での垂直応力をs_x, s_yとし，yz平面とxz平面にそれぞれ平行なせん断応力をt_{xy}, t_{yx}とする．このシェルの膜応力s_x，s_y，$t_{xy}\,(= t_{yx})$のベクトルをxy平面に投影し，水平面単位長さあたりの力に換算した断面力を，それぞれσ_x，σ_y，$\tau_{xy}\,(= \tau_{yx})$とし，水平投影応力とよぶ．水平投影応力σ_x，σ_y，τ_{xy}はそれぞれx，yの関数$\sigma_x(x, y)$，$\sigma_y(x, y)$，$\tau_{xy}(x, y)$として定義する．

シェルの膜応力と外力の釣合いを水平投影応力を用いて示す．シェルの水平方向の釣合い方程式は次式で表される．

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

また，鉛直方向の釣合い方程式は2階の偏微分方程式として次のように書ける．

$$\sigma_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f \tag{2}$$

ここで，fは単位面積当たりの鉛直方向荷重であり，本稿ではシェル形状に依存しない定数とする．

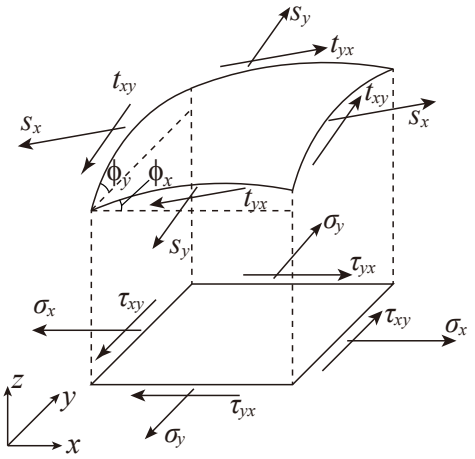


図1: シェルの微小要素に作用する力の釣合い

2.2 波動方程式の理論に基づく考察

本節では，シェルの釣合い方程式が双曲型となる場合について，波動方程式の初期値境界値問題に関する解法を参照し，圧縮引張混在型シェルの形状設計における解の存在について考察する．

双曲型の偏微分方程式の例として，波動方程式がある．ここでは波動方程式の解法の一例として，1次元波動方程式の初期値問題の解の導出について示す．次のような空間座標xと時間tに関する1次元波動方程式の初期値問題の解$h(x,t)$について考える．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \tag{3a}$$

$$h(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{3b}$$

ここで，$\varphi(x)$と$\psi(x)$は指定された関数である．この問題の解は次のように書ける[9]．これはd'Alembertの公式と呼ばれる．

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{4}$$

波動方程式(3a)は双曲型偏微分方程式であり，以下に示す2つの特性曲線をもつ．

$$x + ct = \text{const.}, \qquad x - ct = \text{const.} \tag{5}$$

特性曲線は与えられた条件が偏微分方程式に従って伝わっていく道筋を表すと解釈することができる．この例では特性曲線は直線となる．図2に示すように，特性曲線は2つの直線群として表され，波動方程式(3a)の解は式(5)で表される直線に沿って伝播する進行波と後退波の重ね合わせとなる．式(3b)で与えた初期値は，この特性曲線上を伝播すると解釈できる．

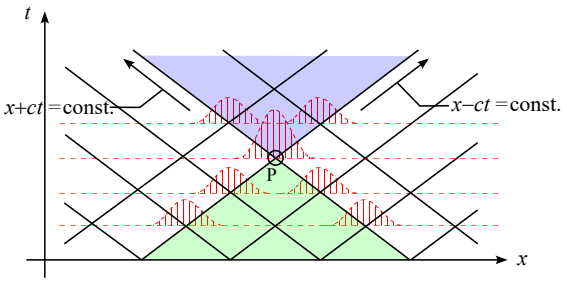


図2: 波動方程式における特性曲線

波動方程式は初期値や境界条件を与えた場合の初期値境界値問題について，数値解法が確立されている．一方で，初期値問題ではなく境界値問題として定義されるシェルの形状設計において，特性曲線により影響を受ける範囲の境界形状が矛盾する場合に，解が得られないことが既往の研究で指摘されている[5]．よって波動方程式の解法を単純にシェルの形状設計手法に適用することは難しい．

3 圧縮引張混在型シェルの形状設計手法

双曲型偏微分方程式の境界値問題として定義される圧縮引張混在型シェルの形状設計について，有限差分法で離散化したシェルの釣合い方程式を，線形連立方程式として解くことで釣合い形状を求める．境界の外側に仮想の格子点を新たに定義して形状表現の自由度を確保しつつ，解が不定となる場合に安定的に解形状を得るため，および得られる形状を滑らかな形状とするために，正則化手法とスムージング項を導入する．

3.1 釣合い方程式の有限差分法による差分近似

正方形の平面領域をx，y方向に分割し，各格子点のz座標を変数とし，鉛直方向の釣合い方程式を格子点のz座標を未知数とする線形連立方程式として解くことで，解形状を得る．xy平面をx，y方向にそれぞれ$N \times N$分割した格子点(i,j) $(i,j = 1,\ldots,N+1)$を考える．格子点(i,j)のz座標を$h_{i,j}$，鉛直方向荷重を$f_{i,j}$とすると，式(2)は中央差分を用いて次のように書ける．

$$\begin{aligned} &\sigma_x \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \\ &+ 2\tau_{xy} \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i+1,j-1} - h_{i-1,j+1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta x \delta y} \\ &+ \sigma_y \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta y)^2} = f_{i,j} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，δx，δyはそれぞれ格子点のx，y方向の間隔を示す．

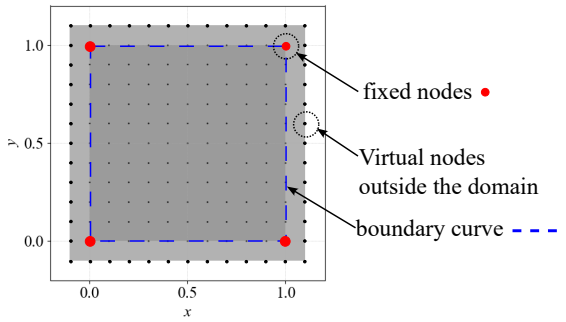


図3: シェルの平面投影領域と境界，およびその外側の仮想格子点[6)]

図3に示すように，シェルの境界の外側に仮想の格子点を新たに定義し，そのz座標$h_{i,j}$を境界上の格子点の偏導関数の定義に用いる．仮想格子点を加えることで，格子点の数は$(N+3)^2$となる．仮想格子点のz座標も変数とすることで，境界付近の形状を表現するための変数を増やすことができる．ただし，仮想格子点における釣合い方程式は使用しない．

境界条件を指定した後の独立な変数の数をn，連立方程式の数をmとする．変数であるz座標$h_{i,j}$をまとめたベクトルを$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，変数$\mathbf{x}$の係数をまとめた行列を$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，右辺$f_{i,j}$を連立方程式をたてる格子点についてまとめたベクトルを$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$とする．式(6)は次の線形連立方程式として書ける．

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7}$$

このとき，係数行列$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ のランクを$r = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$とすると，$r < n$となる場合には線形連立方程式の解は不定となる．また，線形写像$\mathbf{A}$について$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\mathbf{A})$が成り立たないとき，解は存在しない．

このように提案手法は係数行列のランクに着目することで解の存在や不定性を判断することができる．また本手法は連立方程式を1度解くだけでよく，波動方程式を陽解法で解く場合に必要な安定性に関する付加的な条件がないという利点を有する．

3.2 L2正則化項とスムージング項の導入

線形連立方程式について，係数行列のランクが変数の数より少ないとき解は不定になる．また，各格子点のz座標を変数として曲面形状を生成すると，局所的に凹凸のある形状が得られる場合がある．これらの課題に対し，安定して滑らかな曲面形状が得られる設計手法とするため，L2正則化項とスムージング項を導入する．

まず線形連立方程式(7)について，$\mathbf{x}$を引数とする以下の関数$F(\mathbf{x})$を定義する．

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + \lambda_1 F_2(\mathbf{x}) + \lambda_2 F_3(\mathbf{x}) \tag{8}$$

右辺の第2項は正則化項，第3項はスムージング項であり，それぞれパラメータλ_1, λ_2 $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$をかけたものとして定める．$F_1(\mathbf{x})$は，次のように定義する．

$$F_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \tag{9}$$

この関数$F_1(\mathbf{x})$の停留条件$\partial F_1(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$は，釣合い方程式を離散化した線形連立方程式(7)と一致する．

$F_2(\mathbf{x})$は正則化項であり，変数$\mathbf{x}$のL2ノルムの2乗として次のように定める．

$$F_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{x} \tag{10}$$

$F_3(\mathbf{x})$は，スムージング項であり，2階の偏導関数に基づいて定義する．差分法で離散化した曲面の格子点(i, j)におけるx，yについての2階の偏導関数は次のように書ける．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \tag{11a}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \tag{11b}$$

式(11a)，(11b)において変数$\mathbf{x}$の係数をまとめた行列を，それぞれ$\mathbf{D}_x \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathbf{D}_y \in \mathbb{R}^{m\times n}$とし，$z$座標を固定した格子点の$h_{i,j}$に関する項をまとめたベクトルをそれぞれ$\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y$とする．これらを用いて，$F_3(\mathbf{x})$は次のように定義する．

$$\begin{aligned} F_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\big\{&(\mathbf{D}_x\mathbf{x} + \mathbf{q}_x)^\top (\mathbf{D}_x\mathbf{x} + \mathbf{q}_x) \\ &+ (\mathbf{D}_y\mathbf{x} + \mathbf{q}_y)^\top (\mathbf{D}_y\mathbf{x} + \mathbf{q}_y)\big\} \end{aligned} \tag{12}$$

2階の偏導関数をまとめたベクトルのノルムを加えることで，得られる曲面の平滑性を考慮した形状生成が可能となる．

以上の$F_1(\mathbf{x})$，$F_2(\mathbf{x})$，$F_3(\mathbf{x})$により定義した関数$F(\mathbf{x})$を最小化する問題の停留条件は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \lambda_1 \mathbf{x} \\ &+ \lambda_2 \left\{\mathbf{D}_x^\top (\mathbf{D}_x\mathbf{x} + \mathbf{q}_x) + \mathbf{D}_y^\top (\mathbf{D}_y\mathbf{x} + \mathbf{q}_y)\right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{13}$$

この式を整理すると，次式を得る．

$$\left\{\mathbf{A}^\top\mathbf{A} + \lambda_1\mathbf{I} + \lambda_2\left(\mathbf{D}_x^\top\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^\top\mathbf{D}_y\right)\right\}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b} - \lambda_2\left(\mathbf{D}_x^\top\mathbf{q}_x + \mathbf{D}_y^\top\mathbf{q}_y\right) \tag{14}$$

本手法では，$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$が0の固有値を持つ場合でも式(14)の左辺の係数行列を正則化でき，線形連立方程式(14)を$\mathbf{x}$について解くことで，解形状を得ることができる．パラメータλ_1, λ_2を正の微小な値として与えることで，得られる解の誤差も微小な値に抑えることができ，かつ2階の偏導関数（曲率）の小さい曲面が得られる．

4　数値例題

数値例題としてモデル1〜3の結果を示す．各モデルの曲面の水平投影面は$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$の正方形領域とする．離散化における格子の分割数はx，y方向ともに$N = 30$とする．曲面生成において，曲面形状は荷重と応力の比率により決定されるため無次元化し，長さと荷重の単位は省略する．各モデルにおける式(14)のパラメータは$\lambda_1 = 10^{-9}$，$\lambda_2 = 10^{-9}$とする．それぞれのモデルの境界条件は各項に示す．曲面生成のプログラムはPython3を用いて作成し，鉛直方向の釣合い方程式を離散化した線形連立方程式は，数値計算ライブラリであるNumPyを用いて解く．

4.1　モデル1, 2

モデル1, 2は一様な水平投影応力分布・荷重分布を指定する．モデル1では，$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (0, 0, -1)$，$f = 4$とし，モデル2では，$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (-1, 1, 0)$，$f = 4$とする．それぞれ，鉛直方向の釣合い方程式(2)は次のように書ける．

$$\text{Model 1}: \quad -2\tau_{xy}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 4 \tag{15}$$

$$\text{Model 2}: \quad -\sigma_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \sigma_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 4 \tag{16}$$

モデル1, 2ともシェルの4隅の格子点の形状（z座標）を指定する．なお，モデル1は文献[6]において同様の例題を示しているが，z座標を指定する点を変更している．

モデル1, 2について得られた曲面形状を図4，6に示す．図中のコントアは格子点座標の高さ分布を，境界上の赤色の格子点は形状（z座標）を指定した点をそれぞれ示す．格子点における主応力分布と特性曲線の単位接ベクトルの向きを図5，7に示す．主応力分布図は線が赤のとき引張，青のとき圧縮であることを示し，線の長さが応力の大きさに比例するよう図示している．モデル1, 2はどちらも双曲放物面（hyperbolic paraboloid）が得られた．主応力の方向はモデル1がx，y軸に対して45度の角度をもっており，モデル2は軸に平行な方向となる．特性曲線は主応力の方向に対して45度の角度を持っていることが図5，7からわかる．

モデル1, 2は$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$のとき，線形連立方程式(14)の左辺の係数行列$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$が特異行列となり解が得られない．しかし$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 10^{-9}$としてスムージング項を与えれば式(14)の左辺の係数行列は正則となった．

また，モデル2について$\lambda_1 = 10^{-9}$は変更せず，$\lambda_2 = 0$とした場合に得られる解形状をモデル2aとして図8に示す．モデル2aで得られた解は格子点ごとに細かな凹凸を持つ形状となっており，滑らかな解が得られない．図8と図6を比較することで，スムージング項の有効性を確認することができる．

4.2　モデル3

次にモデル3として，自由境界を有するシェル曲面の設計について示す．水平投影応力の分布は，水平方向の釣合い方程式(1)を満たすように，平面座標の関数として次のように定義する．

$$\sigma_x(x, y) = -(x - 1)(y - 1) \tag{17a}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -((x - 0.5x^2) + (y - 0.5y^2) + 0.5) \tag{17b}$$

$$\sigma_y(x, y) = -(x - 1)(y - 1) \tag{17c}$$

また，荷重分布については$f = 4$として一様な荷重分布を指定する．水平投影応力のうち，$x = 1$において$\sigma_x(1, y) = 0$が，$y = 1$において$\sigma_y(x, 1) = 0$が，それぞれ成り立つ．すなわち，境界に直交する方向の直応力成分が0となり，自由境界には境界に平行な方向の直応力とせん断応力が生じる．自由境界に生じるせん断応力は，縁梁を設ければ，梁の軸力により端部の支持境界に伝達することが可能であり，開口とすることが可能となる．

得られた曲面形状を図9に，格子点における主応力分布と特性曲線の単位接ベクトルの向きを図11に示す．図9に示したように，$x = 0$と$y = 0$の境界は$h = 0.5$としてz座標を指定した．$x = 1$上の境界と，$y = 1$上の境界がアーチ状のシェル形状が得られた．図11から，原点に近い領域では主応力が圧縮のみとなり，自由境界に近い部分では圧縮と引張が混在していることがわかる．

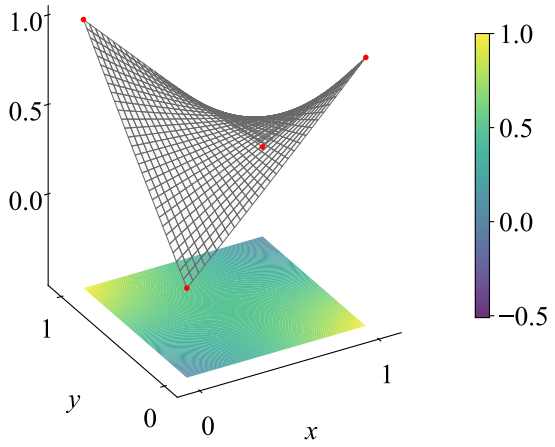


図4: モデル1の曲面形状

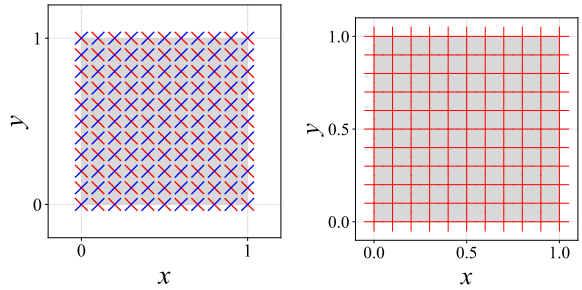


図5: モデル1の主応力分布(左)と特性曲線の向き(右)

また，圧縮のみが生じる部分は釣合い方程式が楕円型の偏微分方程式となるため特性曲線は現れていない．

4.3　釣合い方程式の係数行列に基づく考察

表1に，本項で示したそれぞれのモデル1〜3について，釣合い方程式の係数行列$\mathbf{A}$のサイズとランクr，拡大係数行列のランクrank$(\mathbf{A},\mathbf{b})$，解の誤差ノルム$\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$を示す．モデル1〜3は，$r$がrank$(\mathbf{A},\mathbf{b})$と等しいことから，解が存在すると判断できる．また$n>r$であり係数行列のランクが変数の数より少ないため解は不定になる．このように文献[6]の手法は，釣合い条件と境界条件を満足する解が存在するか否かを，線形連立方程式の係数行列のランクに基づいて確認することができる．解が不定となる場合にも式(14)を解くことで解形状を生成することが可能であり，各モデルの解の誤差ノルム$\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$は非常に小さな値となっていることから，各格子点で釣合い方程式を満足する形状であることが確認できた．

5　まとめ

本稿では，著者らが文献[6]で提案した，外力に対し圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う自由曲面シェル

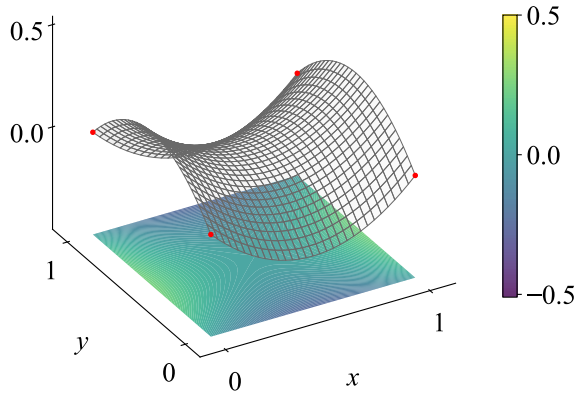


図6: モデル2の曲面形状

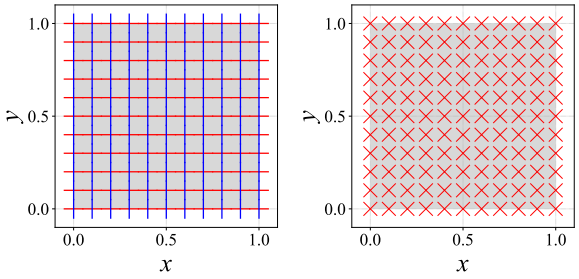


図7: モデル2の主応力分布(左)と特性曲線の向き(右)

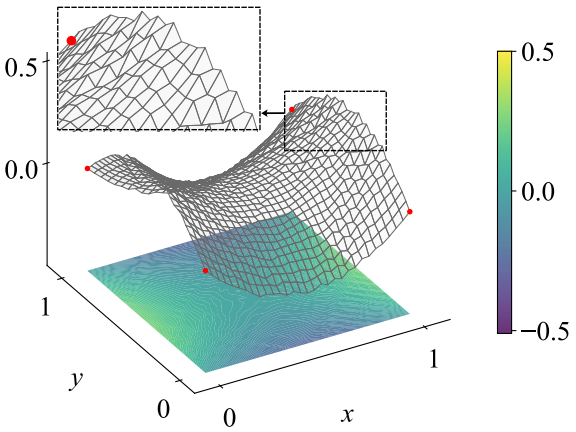


図8: モデル2aの曲面形状（スムージングなし）

に関する形状設計手法の概要を示すとともに，自由境界を有するシェルを含む新たな数値例題を示した．数値例題により，正則化項とスムージング項の有効性を確認し，また，境界に直交する方向の膜応力が生じない自由境界を有する自由曲面シェルの設計例により，文献[6]の手法が多様なシェルの形状生成に有効であることを示した．得られた形状は，外力に対して膜応力のみで釣合う力学的合理性に優れた曲面形状となる．本手法は，繰り返し計算を必要とする既往の手法[5]に比べて計算コストが少なく，かつパラメトリック曲面を

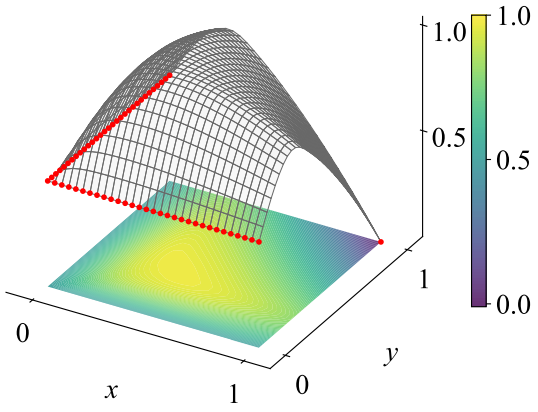


図9: モデル3の曲面形状

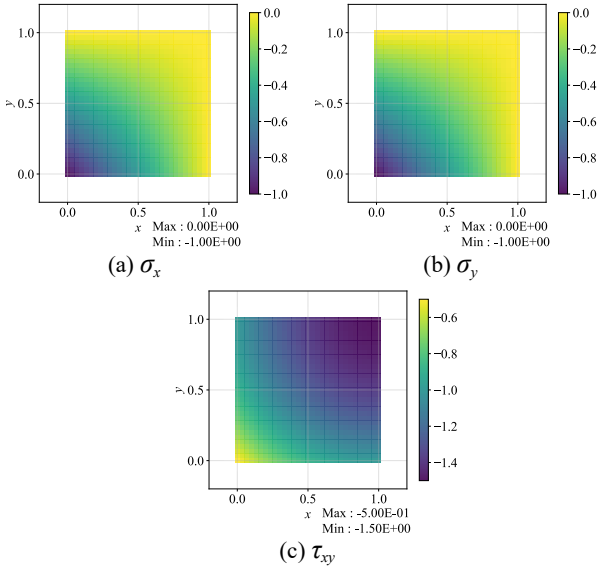


図10: モデル3の水平投影応力($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)分布

用いないことから形状表現の自由度が高い.

一方で，形状設計の過程でシェルの剛性や変形を考慮していないため，シェルの力学性状を把握するために有限要素解析による変形や曲げモーメントの影響について検証する必要があるが，これについては今後の課題としたい.

謝辞: 本研究は、JST CREST Grant Number JPMJCR 1911 の助成を得た.

参考文献

1）Isler, H.：Concrete Shells Derived from Experimental Shapes, *Structural Engineering International*, Vol.4(3), pp.142–147, 1994.

2）Block, P. and Ochsendorf, J.：Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, *J. Int. Assoc. Shell Spatial. Struct.*, Vol.48(3), pp.167–173, 2007.

3）Miki, M., Igarashi, T., and Block, P.：Parametric self-supporting surfaces via direct computation of Airy stress functions, *ACM Transactions on Graphics*, Vol.34(4), pp.89.1–89.12, 2015.

4）Csonka, P.：Theory and practice of membrane shells, VDI Verlag, 1987.

5）Miki, M. and Mitchell, T.：Interactive Exploration of Tension-Compression Mixed Shells, *ACM Transactions on Graphics*, Vol.41(6), pp.263.1–263.14, 2022.

6）中嶋 拓，大崎 純，三木 優彰：圧縮と引張が混在する自由曲面シェルの双曲型釣合い方程式に基づく形状設計，日本建築学会構造系論文集，Vol.90, No.831, pp.568–578, 2025.

7）Takeoka, R., Ohsaki, M. and Sakai, Y.：Non-parametric design of free-form shells with curved boundaries and specified reaction forces, *Engineering Structures*, Vol.255, pp.113892, 2022.

8）中嶋 拓，大崎 純：指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計，日本建築学会構造系論文集，Vol.88, No.808, pp.945–953, 2023.

9）Fritz, J.：Partial Differential Equations, Springer US, 1978.

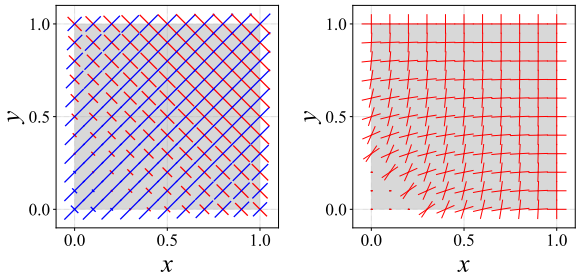


図11: モデル3の主応力分布(左)と特性曲線の向き(右)

表 1: 離散化した釣合い方程式のパラメータ比較

Model	m	n	r	rank($\mathbf{A}, \mathbf{b}$)	$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$
1	961	1085	960	960	1.41×10^{-9}
2	961	1081	961	961	6.21×10^{-8}
2a	961	1081	961	961	1.84×10^{-10}
3	961	1023	961	961	6.78×10^{-7}

粒子法による構造形態創生の性能比較

神田真澄 1)，眞鍋匡利 2)，藤井大地 3)
1)近畿大学大学院システム工学研究科，大学院生，2533850045y@hiro.kindai.ac.jp
2)株式会社増岡組
3)近畿大学工学部，教授，博士（工学）

1 はじめに

近年,施工や生産技術の向上，3D プリンターや新たなシミュレーション技術などの普及により，複雑な形態を持った建築物がより多く生まれてきており，それに伴い形態創生手法の開発の需要が高まっている.そして近年,地震などの自然災害による建物崩壊などの被害によって,従来の建築物や新しい建築物の耐久性能についてより懸念されるようになってきている．したがって，形態創生の中でも力学的に合理的でありながら，破壊などの大変形に対して考慮が出来る手法が必要になると考えられる.

一方，既往の構造形態創生に関する研究では，有限要素法などメッシュを用いる計算手法が多く使われるが、幾何学的非線形問題について解析を行う際にメッシュのねじれによって精度が悪化する問題が生じ，幾何学的非線形問題の解析が困難であることが知られている.

そこで，本研究室ではメッシュを必要としない計算手法である粒子法 1)（MPS 法 2)3)，HMPS 法 4)5)）と，藤井らが開発した二次元の設計領域から構造形態が創生可能な発見的手法である IESO 法を組み合わせた構造形態創生プログラムを開発し,幾何学的非線形問題を考慮した構造形態創生を検証する研究が行われている.

HMPS 法は,ハミルトン系として定式化され,3 次元におけるエネルギー保存の考慮が容易であることが利点である.一方,HMPS 法がエネルギー保存則に基づいてモデリングされているのに対し,MPS 法は粒子同士が伸縮ばねとせん断ばねによって結合され,粒子の相互作用によって生じるばねのひずみによって変形を計算する経験的なモデルであるため,粒子間の伸縮ばねとせん断ばねによる結合を切り離して,破壊のシミュレーションが可能であることが利点である.しかし,本研究室における既往の研究では,HMPS 法による 3 次元における構造形態創生に関する研究が中心であり,MPS 法を適用する研究が行われておらず,粒子法双方の比較に関する研究も行われていない.よって,粒子法を構造形態創生へ適用する研究において挙げられる問題は,破壊のシミュレーションが可能な手法が検討されていないこと,粒子法同士の比較によって構造形態創生における粒子法の特徴が整理されていないことであると私は考える.

よって本研究では MPS 法の構造形態創生への適用有効性,さらには,粒子法同士の性能比較を行うことで構造形態創生における粒子法の性能を整理,検証することが本研究の目的である.

2 粒子法の概要

2.1 MPS 法の概要

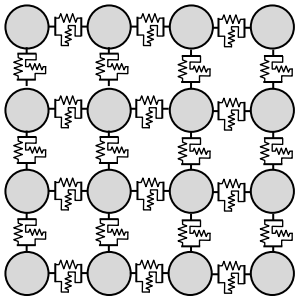


図 1. 伸縮ばねとせん断ばねによって結合された粒子

MPS 法では図 1 のように，弾性体を任意大きさの粒子が伸縮ばねとせん断ばねで結合されて構成されていると考える.その粒子に荷重や拘束条件などを与え，運動を行った粒子同士が起こす相互作用によって，連続体がどのように変形するのかを解析する手法である.

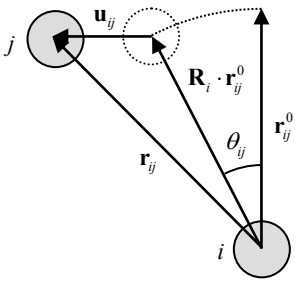


図 2. 粒子間の相対変位

MPS 法では図 2 のように,初期位置における粒子間の相対ベクトル r_{ij}^0 と現在時刻の相対ベクトル r_{ij},回転行列 R_i によって粒子間の変位を式(1)で表す.

$$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} - \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{r}_{ij}^0 \tag{1}$$

また,粒子間の伸縮ひずみとせん断ひずみは式(2),式(3)で得られる.

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{n}} = \frac{u_{ij}^{\mathrm{n}}}{\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{s}} = \frac{u_{ij}^{\mathrm{s}}}{\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|} \tag{3}$$

ただし, $\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|$ は式(4)から計算される.

$$\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right| = \sqrt{\left(x_{ij}^0\right)^2 + \left(y_{ij}^0\right)^2} = \sqrt{\left(x_j^0 - x_i^0\right)^2 + \left(y_j^0 - y_i^0\right)^2} \tag{4}$$

式(2),(3)より粒子間の垂直応力とせん断応力は式(5),(6)で表される.

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{n}} = 2G\varepsilon_{ij}^{\mathrm{n}} \tag{5}$$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{s}} = 2G\varepsilon_{ij}^{\mathrm{s}} \tag{6}$$

次に,MPS 法では離散化を行うために粒子間の物理量分布を重み関数により式(7)のように定義する.

$$w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|^2}{r_e^2} & \left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right| < r_e\right) \\ 0 & \left(r_e \le \left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \end{cases} \tag{7}$$

式(7)の重み関数を用いて,粒子 i の面積ひずみを定義すると,式(8)のように表される.

$$\left(\varepsilon_{\gamma\gamma}\right)_i = \frac{d}{n^0}\sum_j \varepsilon_{ij}^{\mathrm{n}}\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{8}$$

式(8)から式(9)の静水圧応力が表される.

$$\sigma_i^{\mathrm{m}} = \lambda\left(\varepsilon_{\gamma\gamma}\right)_i \tag{9}$$

以上の式から,垂直応力,せん断応力,静水圧応力の和による運動方程式から得られる粒子 i の現在時刻の加速度は式(10)によって計算される.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}\right]_{\mathrm{n}} + \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}\right]_{\mathrm{s}} + \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}\right]_{\mathrm{m}} \tag{10}$$

これまでに示した応力はトポロジー最適化による要素付加,要素除去の処理を行う際の指標として参照されるが,HMPS 法で定義される応力とは異なるため構造形態創生における性能比較が行えない.よって HMPS 法と共通の応力を MPS 法においても定義する必要があり,その方法について説明する.

HMPS 法で導かれるグリーンひずみは変形勾配テンソルによって表されるため,共通のひずみを MPS 法で定義するためには,初期位置における粒子間相対ベクトル r_{ij}^0 と現在時刻の相対ベクトルを変形勾配テンソルによって再定義する必要がある.それを次式(11)に示す.

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{F}_i \mathbf{r}_{ij}^0 \tag{11}$$

以上から相対変位は式(12)のようになる.

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{R}_i \mathbf{r}_{ij}^0 = \mathbf{F}_i \mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{R}_i \mathbf{r}_{ij}^0 = \left(\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\right)\mathbf{r}_{ij}^0 \tag{12}$$

式(12)を式(7)の重み関数を用いて離散化すると,式(13)のようになる.

$$\sum_j \mathbf{u}_{ij}\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) = \left(\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\right)\sum_j \mathbf{r}_{ij}^0\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{13}$$

式(13)の両辺に r_{ij}^0 のテンソル積を施すと式(14)のようになる.

$$\sum_j \mathbf{u}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) = \left(\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\right)\sum_j \mathbf{r}_{ij}^0 \otimes \mathbf{r}_{ij}^0\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{14}$$

以上から,式(15)が得られる.

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{u}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0\, w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right)\mathbf{A}_i^{-1} + \mathbf{R}_i \tag{15}$$

ここで,$\mathrm{A_i}$ は次式で計算される.

$$\boldsymbol{A}_i = \sum_j \boldsymbol{r}_{ij}^0 \otimes \boldsymbol{r}_{ij}^0\; w_{ij}^0\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{16}$$

以上から式(15)を用いてMPS法におけるグリーンひずみテンソルが式(17)で求められる.

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i - \mathbf{I}\right) \tag{17}$$

また, 第 2 ピオラキルヒホッフ応力テンソルは式(18)から計算される.

$$\mathbf{S}_i = \lambda\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{E}_i\right)\mathbf{I} + 2G\mathbf{E}_i \tag{18}$$

そして,粒子 i の応力は応力テンソルから式(19),(20)のように求められる.

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} S_{i11} & S_{i12} \\ S_{i21} & S_{i22} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\left(\sigma_x\right)_i = S_{i11},\quad \left(\sigma_y\right)_i = S_{i22},\quad \left(\tau_{xy}\right)_i = \frac{S_{i12} + S_{i21}}{2} \tag{20}$$

フォン・ミーゼス応力は式(21)で計算される.

$$\left(\sigma_{VM}\right)_i = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma_x\right)_i^2 + \left(\sigma_y\right)_i^2 + \left\{\left(\sigma_x\right)_i - \left(\sigma_y\right)_i\right\}^2 + 6\left(\tau_{xy}\right)_i^2\right\}} \tag{21}$$

以上より,MPS 法による構造解析を行い,その結果を参照

してトポロジー最適化による構造形態創生を行う.

2.2 HMPS 法の概要

HMPS 法は変形勾配テンソルを最小 2 乗近似によって直接求める手法である.

定式化は以下の手順である.まず,HMPS 法における粒子間相対ベクトル r_{ij}^0 と現在時刻の相対ベクトルも式(11)同様，変形勾配テンソルで表されるが,HMPS 法ではこの変形勾配テンソルを式(22)の誤差関数 e_i が最小のなるものとして定義する.

$$e_i(\mathbf{F}_i)=\sum_{j\neq i}\left|\mathbf{F}_i\,\mathbf{r}_{ij}^0-\mathbf{r}_{ij}\right|^2 w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{22}$$

ここでの重み関数は式(10)と同様である.ここで,式(22)の誤差関数が最小になるには,式(23)が成り立つ必要がある.したがって,HMPS 法における変形勾配テンソルは式(24)のようになる.

$$\frac{\partial e_i(\mathbf{F}_i)}{\partial \mathbf{F}_i}=0 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{F}_i=\left[\sum_j \boldsymbol{r}_{ij}\otimes \boldsymbol{r}_{ij}^0 w_{ij}^0\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right)\right]\boldsymbol{A}_i^{-1} \tag{24}$$

次に, HMPS 法における粒子 i の運動方程式を式(25)で表される.

$$\rho_i\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}=-\frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{r}_i}=-\frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{F}_i}\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{25}$$

ただし,W_i は式(26),(27)で表される.

$$W_i=\mathbf{\Pi}_i:\mathbf{F}_i \tag{26}$$

$$\mathbf{\Pi}_i=\mathbf{F}_i\,\mathbf{S}_i \tag{27}$$

以上から重み関数を用いて式(29)は式(32)のようになる.

$$\rho_i\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}=\sum_j\left(\mathbf{F}_i\,\mathbf{S}_i\,\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{r}_{ij}^0+\mathbf{F}_j\,\mathbf{S}_j\,\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{r}_{ij}^0\right)w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right) \tag{28}$$

次に，HMPS 法におけるグリーンひずみテンソルは式(27)を用いて式(20)と同様に定義され,式(21),(24)と同様の第 2 ピオラキルヒホッフ応力テンソルとフォン・ミーゼス応力が計算される.

HMPS 法では,粒子位置と応力位置が同じであるため,大変形の際に数値誤差による局所的な振動 [7]が発生する問題がある.その対処法として,式(29)で示される人工的な粘性力を式(31)に加えることで,振動を抑制する.

$$\mathbf{f}_i^{\mathrm{vis}}=c^{\mathrm{VIS}}\left[\rho_i\,c^{\mathrm{LAP}}\sum_{i\neq j}\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i\right)w_{ij}^0\left(\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|\right)\right] \tag{29}$$

以上より,HMPS 法による構造解析を行い,その結果を参照してトポロジー最適化による構造形態創生を行う.

3 構造形態創生手法の概要

本研究では,構造形態創生手法としてトポロジー最適化の一つである IESO 法を用いて形態創生を行う.

IESO 法では四角形要素で分割された 2 次元連続体に荷重や拘束等の条件を与えのひずみエネルギーを用いた感度指標を参照して要素除去，付加を行い，構造形態を創生する．IESO 法の構造形態創生問題では式(33)で定義する.

$$\begin{aligned}
&\textbf{設計変数}:\ \boldsymbol{\rho}^e=\left\{\rho_1^e,\rho_2^e,\cdots,\rho_i^e,\cdots,\rho_{N_D}^e\right\}\\
&\textbf{目的関数}:\ C\left(\boldsymbol{\rho}^e\right)=\mathbf{d}^T\mathbf{f}\ \rightarrow\ \text{minimize}\\
&\textbf{制約条件}:\ m_r\left(\boldsymbol{\rho}^e\right)=\sum_{i=1}^{N_D}\rho_i^e\Big/N_D\le\bar{m}_r\\
&\qquad\qquad\rho_i^e=0\ \text{ or }\ 1\qquad\left(i=1,\cdots,N_D\right)
\end{aligned} \tag{30}$$

ρ_i^e は粒子密度を表し，N_D は全粒子数を表す.制約条件については,設計対象要素の総質量比（m_r）が任意の総質量比の制約値（$\bar{m}_r$）を上回る場合，式(31)に示すルールにより要素除去（材料密度 1→0）を行う.

$$\begin{aligned}
&\rho_i^e=0\quad\text{if}\quad q_i{}^{(k)}<X_{cr}{}^{(k)}\qquad i\\
&\qquad\qquad=1,\ \cdots\ ,N_L{}^{(k)}
\end{aligned} \tag{31}$$

$q_i{}^{(k)}$ は k 番目要素の感度指標であり，次式で示す．ただし,近傍の 4 つの粒子から平均して算出される.

$$q_i^{(k)}=\textstyle\sum_{j=1}^{4}V_{n_j^k}^{p}/4 \tag{32}$$

$N_L{}^{(k)}$ は k ステップの残存粒子数で，$X_{cr}{}^{(k)}$ は閾値で，次式で定義される.

$$X_{cr}{}^{(k)}=q_{av}{}^{(k)}-\eta_E{}^{(k)}\cdot q_{sd}{}^{(k)} \tag{33}$$

$q_{av}{}^{(k)}$ と $q_{sd}{}^{(k)}$ は k ステップの感度指標の平均値と標準偏差を表し，$\eta_E{}^{(k)}$ は要素の除去量を制御する制御変数である．入力データとして与えられた除去率と，各ステップの残存要素数を掛けて得られる目標除去要素数に近い $\eta_E{}^{(k)}$ を探査し，要素除去を行う.

総質量比が制約値を下回った場合，式(37),(38)に示すルールによって要素付加（材料密度 0→1）を行う.

$$\begin{aligned}
&\rho_{s_{ij}}=1\quad\text{if}\quad q_i{}^{(l)}\ge\eta_A{}^{(l)}\cdot q_{av}{}^{(l)}\\
&i=1,\ \cdots\ ,N_L{}^{(l)}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$N_A{}^{(l)}=\lambda_A N_L{}^{(l-1)} \tag{35}$$

以上の操作を任意のステップ数くりかえし,制約条件を満たしながら，目的関数であるC（コンプライアンス）における $\boldsymbol{d}$（変位）を最小化することで,全体剛性が最大になるような最適解を探査する.

4 解析例

4.1 単純支持構造

初めに，図 3 に示す下端部の左端をピン支持，右端をローラー支持とした単純支持構造を用いて解析を行う．設計領域の分割数を 120×20，寸法は図 3 に示す通りとし，板厚は 0.01m とする．ヤング係数は 205×10^{6}kN/mm^{2}，ポアソン比は 0.3 とし，中央に 3kN の集中荷重を加えるといった条件とする．また，入力データとして影響半径を 0，目標質量比を 0.4，除去率と付加率をそれぞれ 0.05 として与え，解析を行う．ただし，解析から得られた最適形態を左右対称で出力するために 1/2 解析としている．

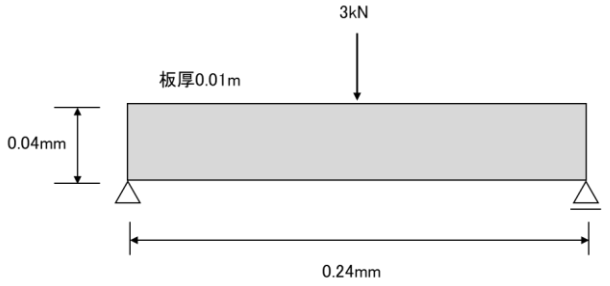
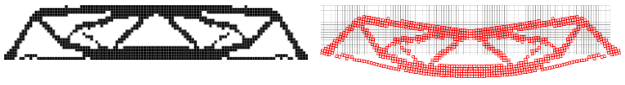
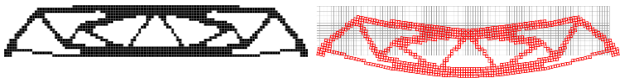


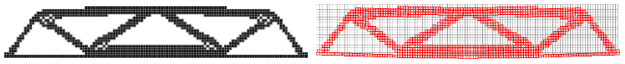
図 3. 解析モデル



MPS 法



HMPS 法



有限要素法

図 4．各手法による最適形態（左）と変形図（右）

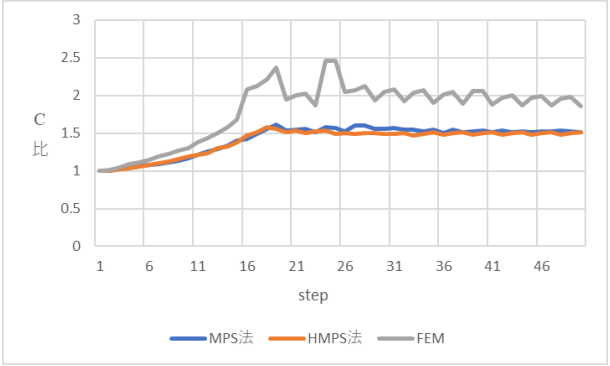


図 5. 各手法によるコンプライアンス比の比較図

図 4 は各手法による構造形態創生解析の結果から得られた最適形態と変形図を表している．

MPS 法，HMPS 法による解析で得られた最適形態の変形図を見ると，いずれの手法も中央の集中荷重を与えた部分が有限要素法によるものと同様，下に沈み込むような変形が示されている．それに伴うローラー支持部分の変形も同様，有限要素法による変形に似た，水平方向に滑るような変形が示されている．しかし，粒子法の解析による形態では，いずれも，有限要素法によるものと比較して水平方向の変形が大きく示されており，ローラーによる変形に伴って，構造物右側がより沈み込むような変形になっていることを示している．最適形態について，粒子法による解析で得られた最適形態はどちらも類似した形態となっており，有限要素法によるものと比較すると，複雑な形態が創生され部材が必要な形態になっているが，固定領域において要素が残っている点，形態中央の斜材の組まれ方が有限要素法によるものと類似している点を踏まえると，MPS 法によるトポロジー最適化においても，問題なく最適形態が創生されていることが考えられる．

次に，解析で得られた数値的な要素についての考察を行う．図 5 は，各手法による解析から得られた各最適化ステップのコンプライアンスを初期形態におけるコンプライアンスで除した，コンプライアンス比の推移を示している．HMPS 法と MPS 法のコンプライアンス比の推移を見てみると，19step 辺りから収束が始まり，31 ステップ辺りには収束しており，有限要素法によるものより最適化過程における最適形態の変化が安定していることが分かる．最適解に関しても，有限要素法による解析ではコンプライアンス比が 1.98，MPS 法による最適解では 1.52，HMPS 法による最適解では 1.52 といった解析結果が得られ，有限要素法による最適解よりコンプライアンス比の低い優良な解を得ることが確認された．

以上より，単純支持構造における微小変形問題のトポロジー最適化では，MPS 法による最適化及び，粒子法双方は従来有効性が示された有限要素法による解と比較して，有効であることが考えられる．

4.2.1 両端固定構造

次に，図 6 に示す両端固定構造を用いて解析を行う．設計領域の分割数を 90×30，寸法は図 6 に示す通りとし，板厚は 0.01m とする．ヤング係数は 205×10^{6}kN/mm

²，ポアソン比は 0.3 とし，中央に 3kN の集中荷重を加えるといった条件とする．また，入力データとして影響半径を 0，目標質量比を 0.4，除去率と付加率をそれぞれ 0.05 として与え，解析を行う．ただし，本例題においても 1/2 解析としている．

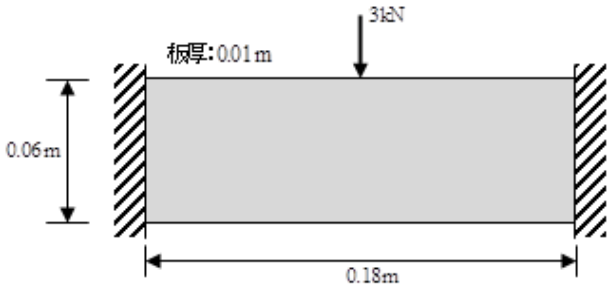
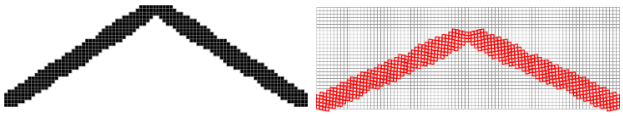
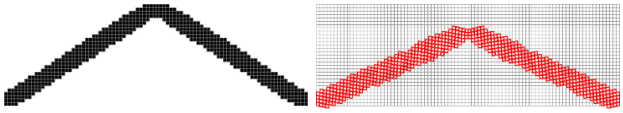


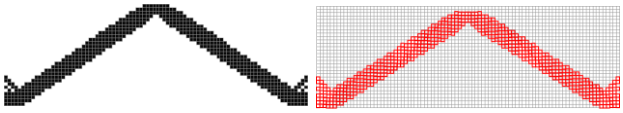
図 6. 解析モデル



MPS 法



HMPS 法



有限要素法

図 7. 各手法による最適形態（左）と変形図（右）

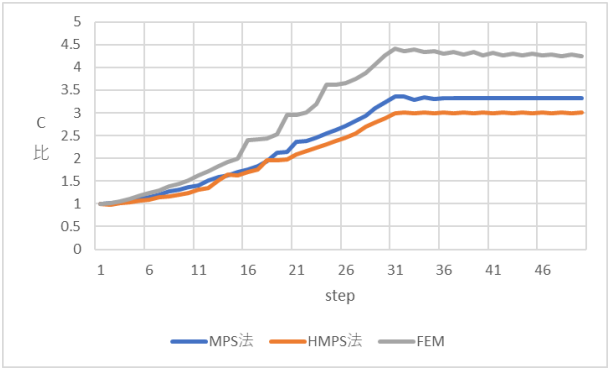


図 8. 各手法によるコンプライアンス比の比較図

図 7 は各手法による構造形態創生解析の結果から得られた最適形態と変形図を表している．

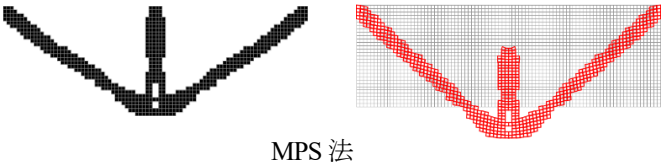
最適形態について，本例題でも,粒子法による解析で得られた最適形態はどちらも類似した形態となっており，有限要素法によるものと比較をしても,類似した形態が創生されている.次に，変形図を見ると,有限要素法による解析で得られた変形図同様,MPS 法においても,中央の集中荷重を与えた部分が下に沈み込むような変形が示されており,特に荷重面の屈曲するような変形が粒子法双方から確認されていることから本例題においても,粒子法の変形追従が詳細に行われていることが確認された.

次に，解析で得られた数値的な要素についての考察を行う．図 8 は，各手法による解析から得られた各最適化ステップのコンプライアンス比の推移を示している.いずれの手法も 32step 辺りから収束しており,有限要素法による解析ではコンプライアンス比が 4.25,MPS 法による最適解では 3.31,HMPS 法による最適解では 3.01 といった解析結果が得られ,この例題においても,有限要素法による最適解よりコンプライアンス比の低い優良な解を得ることが確認される.

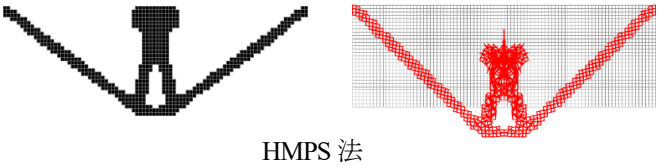
以上より,本例題においても,MPS 法及び,粒子法双方の有効性が,有限要素法による最適解との比較によって確認できた.

4. 2. 2 大変形問題における解析結果

次に，前項で行った両端固定構造において，荷重倍率を 1000 倍に上げて解析を行い，大変形を考慮した構造形態創生を行う．



MPS 法



HMPS 法

図 9 粒子法による最適形態（左）と変形図（右）

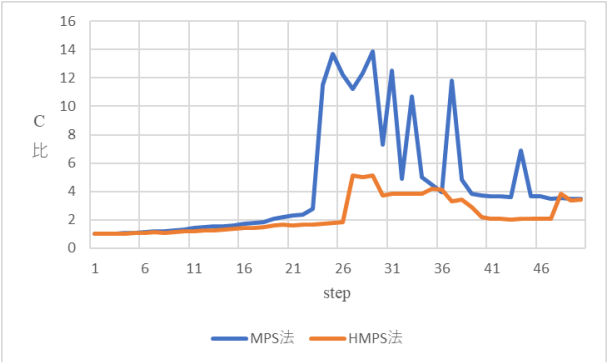


図 10. 各手法によるコンプライアンス比の比較図

図 9 は荷重倍率が 1000 倍時の各手法における最適形態と変形図を表している.

最適形態については,微小変形時における最適形態では圧縮によって荷重に対して抵抗しているのに対し,大変形を考慮した最適形態では引張で対抗するような最適形態に変化しており微小変形時と比べて大きく異なる形態が創生されることが確認できる.

次に，図 10 のコンプライアンス比の推移を見てみると両者ともコンプライアンス比の収束が安定していないことが分かるが,特に MPS 法のコンプライアンス比の推移が著しく変動しており,最適過程で形態が高い頻度で変わっていることが分かる.

5 まとめ

本研究では,基本的例題を用いて MPS 法，HMPS 法,有限要素法の 3 つの手法による構造形態創生解析を行い,そこから得られた解を比較し，粒子法による構造形態創生解析の有効性や性質について考察を行ってきた．MPS 法による解析で得られた変形図が，拘束条件や荷重条件などから想定されるような変形であること，最適形態やコンプライアンス比の推移が,既往の研究で有効性が示されている HMPS 法と有限要素法によるものと類似していることから，微小変形において，MPS 法による構造形態創生解析が有効であることが検証された.そして，シンプルな形態を得る点，コンプライアンス比がいずれの例題においても有限要素法による解と比較して粒子によるものの方が低い値を示している.その点を踏まえると,有限要素法に劣らない優良解を得られていることが考えられる．また，粒子法の解析による変形と有限要素法による変形を比較して ,支持条件によって影響を受ける変形などが明確に出力されており，粒子法の変形追従性能に関する知見も得られた.

そして大変形を考慮した構造形態創生では粒子法双方に以下の 2 点の問題が確認された.1 点目は,MPS 法による大変形解析では,コンプライアンス比の収束が弱くさらに多くの step 数解析を行う必要がある.2 点目は,HMPS 法による大変形解析では,既往の研究で報告されていた局所振動が構造形態創生においても発生することが確認され,更なる,局所振動の対処法に関する研究を行う必要があることが分かった.

参考文献

1) 越塚誠一：粒子法，丸善，2005
2) 宋武燮，越塚誠一，岡芳明 ： MPS法による弾性構造体の動的解析，日本機械学会論文集(A編)，VoL71, No. 701，pp. 16-22，2005.
3) 鈴木幸人．越塚誠一 ： 非線型弾性体に対する粒子法の開発， 日本計算工学論文集， VoL2007, No. 20070001， 2005，pp375-389.
4) 近藤雅裕，鈴木幸人，越塚誠一：最小自乗近似による粒子法弾性解析手法の振動抑制，日本計算工学会論文集，Paper No. 20070031，2007. 12
5) 鮫島有太佳, 眞鍋匡利, 藤井大地 ：HMPS法とCA-IESO法を用いたコンプライアンスメカニズムの形態創生, 日本建築学会構造系論文集， VoL88， No. 808, pp. 938-944，2022.
6) 藤井大地，山下真輝，清水満喜子 ： CA-IESO 法を用いた構造体の位相 最適化，日本建築学会構造系論文集，Vol. 86，No. 783，pp. 761-771，2021.
7) 近藤雅裕，鈴木幸人，越塚誠一：最小自乗近似による粒子法弾性解析手法の振動抑制，日本計算工学会論文集，Paper No.20070031, 2007

折り畳み可能な平面で構成されるハニカムの形態創生と考察

齋藤 魁利[1)]，佐藤 鼓[2)]，藤田 慎之輔[3)]
1)株式会社AMDlab，修士(工学)，saito40.feedback@gmail.com
2)近畿大学工学部建築学科，大学生
3)近畿大学工学部建築学科，准教授，博士(工学)

1　はじめに

ハニカム構造は，剛性を大きくしたい，費用・材料を少なくしたいといった目的がある中での1つの解だと考えられ，さらに立体的で折りたためる構造も設計することが可能である．

Jiangら[1]は，ハニカム構造をセルの壁が120°で接するねじれのない立体的な構造を対象として，設計方法と設計できる限界を議論しており，一方，Maleczekら[2]は，展開時に6角形，8角形の立体パターンとなり，対角線の折りがある，折りたたみ可能な構造に対して，計算方法を研究している．

しかし，部材を四角形平面と仮定した場合，意図する曲面でのハニカムの設計は難しくなる．

そこで本研究では，立体的で折りたためるハニカム構造を，曲面からの逆解析によって形態創生する手法を提案する．この設計手法では，設計者が曲面やハニカムの密度を入力するだけで形態創生を行うため，設計の負担が軽減される．そして，図1のように帯状へ折りたたむことができるため，歩留まりがよく，折りたたんで運搬しやすくなる．

また，形態創生を行ったハニカムに対して，どの程度部材が平面であるか，指定された曲面に沿えているかを検証した．

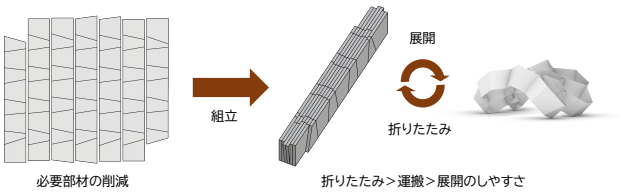


図1　必要部材の削減，折りたたみ＞運搬＞展開のしやすさ

2　形態創生の手法

2.1　探索方法

ハニカムを構成し，制約条件を評価した上で，その制約がすべて満たされるものを曲面からの逆解析により探索する．

入力として，曲面モデル，図2に示すハニカムの構成による密度（N_x, N_y），図3に示すZ方向のずれ幅（$_dz_{\mathrm{limit}}$），ハニカム下辺の長さ上限（$L_{\max}$）を与える．折りたたみ・展開方向は，X方向に引っ張られると折りたたまれ，Y方向に引っ張ると展開するようにする．

この形態創生ではrhino3dm.py[3]で曲面上の点を算出し，pyOpt[4]で制約条件を満たすものを探索する．

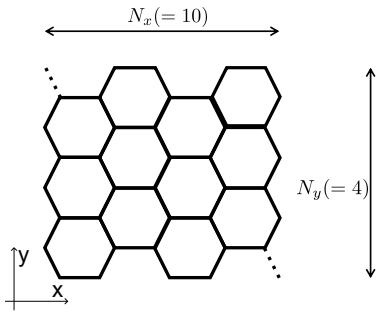


図2　ハニカムの構成

今回のハニカムを構成するとき，以下の条件が必要となる．

条件1. 部材幅は一定とする．
条件2. 入力した面形状へ展開する．
条件3. 図5におけるハニカムの角$\angle a, \angle b, \angle c$は$180° - \angle a = \angle b = \angle c$となり，折りたたむことができる角度とする．
条件4. 展開時，セルの壁は平面とする．
条件5. ハニカムの六角形の辺のうち，折りたたみ時に分けられる前辺3つと後辺3つのそれぞれの合計長さは同じとする．
条件6. 辺の長さは指定した長さより短くする．

条件7. 入力した面形状の四辺側に置く点は四辺上へ固定する．

ここで条件1～条件4をハニカム構成の時に利用する条件とし，条件4～条件7を制約条件とし，満たすものを探索する．この制約の中で条件6，条件7は，追加の形状制約である．

2.2 下点の生成

曲面上に配置するの下点は，図3のように生成を行う．rhino3dm.pyを利用し，3dmファイル内の与えられる入力である曲面データを取得，今回の設計変数であるu, vと曲面データから下点を生成する$(S_x(u,v), S_y(u,v), S_z(u,v))$．さらに解析の自由度を上げるため，今回の設計変数に追加して${}_dz$をZ方向に加え，点$(S_x(u,v),\ S_y(u,v),\ S_z(u,v) + {}_dz)$とする．このときの生成される点が配置できる空間は，図3の灰色の空間となる．

下点の生成後，下点を図2のように連結し，その結果を図4左に示す．

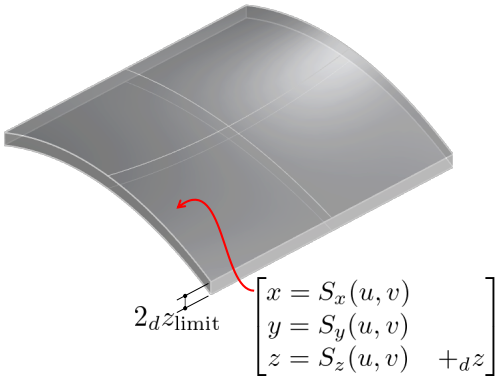


図3　変数$u, v, {}_dz$からXYZ座標へ変換

2.3 部材面の構成

生成した線分から部材面を構成する．ここで部材面の幅をWとする．

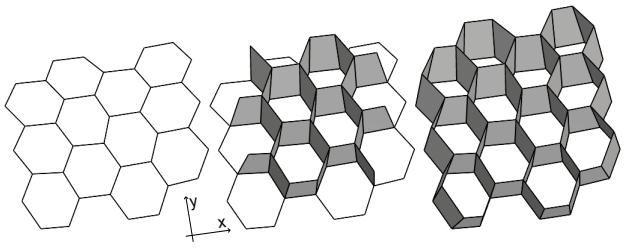


図4　連結した線から部材面を構成する

まず3つ又の部分では，条件1，条件3を満たすベクトル$\boldsymbol{v}_t$を定め，中央の上点を算出する（図5，式(1)）．

ここで図5の$\boldsymbol{v}_t$は3つ又の下点から上点への求めたいベクトル，$\boldsymbol{v}_{t,a}$はX方向へ伸びる3つ又のベクトル，$\boldsymbol{v}_{t,b}$，$\boldsymbol{v}_{t,c}$はY方向へ伸びる3つ又のベクトル，Tは，図8左で示される，赤色の3つ又中心の節点番号の集合である．この手順により，図4中のような，ハニカムの3つ又の部分全てに対して上点，部材面が算出できる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}'_t &= \left(\frac{\boldsymbol{v}_{t,c}}{|\boldsymbol{v}_{t,c}|} + \frac{\boldsymbol{v}_{t,a}}{|\boldsymbol{v}_{t,a}|}\right) \times \left(\frac{\boldsymbol{v}_{t,b}}{|\boldsymbol{v}_{t,b}|} + \frac{\boldsymbol{v}_{t,a}}{|\boldsymbol{v}_{t,a}|}\right) \\ \boldsymbol{v}_t &= \boldsymbol{v}'_t \times \frac{\mathrm{W}}{|f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}'_t, \boldsymbol{v}_{t,a})|} \quad (t \in T) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，

$$f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}|^2} \times \boldsymbol{n}$$

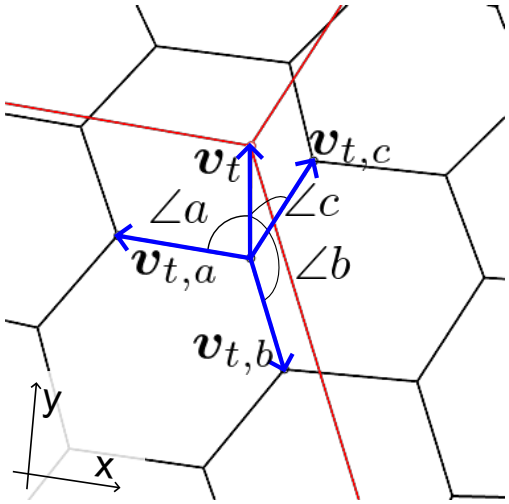


図5　ベクトル$\boldsymbol{v}_t$の算出

次にY方向側の端部では，3つ又で算出した下点から上点へのベクトル$\boldsymbol{v}_b$を利用し，条件1，条件3，さらに条件4を満たすベクトル$\boldsymbol{v}_d$を定め，端部へ通ずる上点を算出する（図6，式(2)）．ここで図6の$\boldsymbol{v}_d$は端部での下点から上点への求めたいベクトル，$\boldsymbol{v}_b$は$\boldsymbol{v}_d$と隣り合う3つ又で算出したベクトル，$\boldsymbol{v}_{d,a}$はX方向へ伸びるベクトル，$\boldsymbol{v}_{t,b}$はY方向へ伸びるベクトル，Dは図8右で示される，赤色の矢印先端の節点番号の集合である．この矢印の先が重なる上点は，それぞれで算出したの2点の中心を算出位置となる．

$$\boldsymbol{v}'_d = \left(\frac{\boldsymbol{v}_{d,a}}{|\boldsymbol{v}_{d,a}|} - \frac{\boldsymbol{v}_{d,b}}{|\boldsymbol{v}_{d,b}|} \right) \times (\boldsymbol{v}_{d,b} \times \boldsymbol{v}_b)$$
$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}'_d \times \frac{\mathrm{W}}{|f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}'_d, \boldsymbol{v}_{d,b})|} \quad (d \in D) \tag{2}$$

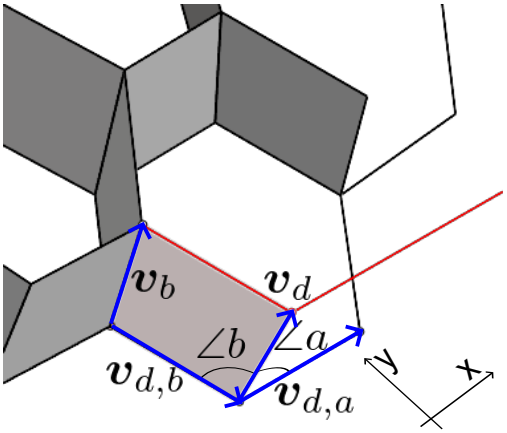


図6　ベクトル$\boldsymbol{v}_d$の算出

最後にX方向側の端部では，3つ又で算出した下点から上点へのベクトル$\boldsymbol{v}_c$を利用し，条件1，条件3，さらに条件4を満たすベクトル$\boldsymbol{v}_s$を定め，端部へ通ずる上点を算出する（図7，式(3)）．ここで図7の$\boldsymbol{v}_s$は端部での下点から上点への求めたいベクトル，$\boldsymbol{v}_c$は$\boldsymbol{v}_s$と隣り合う3つ又で算出したベクトル，$\boldsymbol{v}_{s,b}$，$\boldsymbol{v}_{s,c}$はY方向へ伸びるベクトル，Sは図8右で示される，青色の矢印先端の節点番号の集合である．矢印の先が重なる上点は，それぞれで算出したの2点の中心を算出位置とする．

$$\boldsymbol{v}'_s = \left(\frac{\boldsymbol{v}_{s,b}}{|\boldsymbol{v}_{s,b}|} - \frac{\boldsymbol{v}_{s,c}}{|\boldsymbol{v}_{s,c}|} \right) \times (\boldsymbol{v}_{s,c} \times \boldsymbol{v}_c)$$
$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}'_s \times \frac{\mathrm{W}}{|f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}'_s, \boldsymbol{v}_{s,c})|} \quad (s \in S) \tag{3}$$

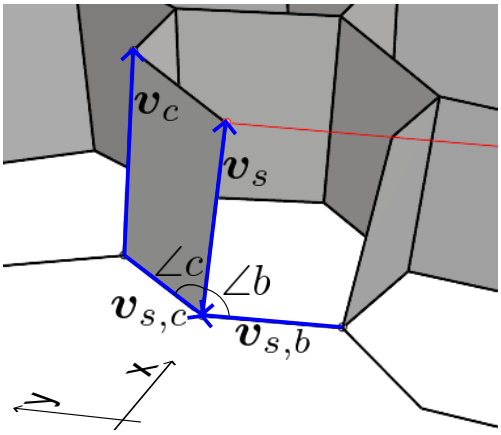


図7　ベクトル$\boldsymbol{v}_s$の算出

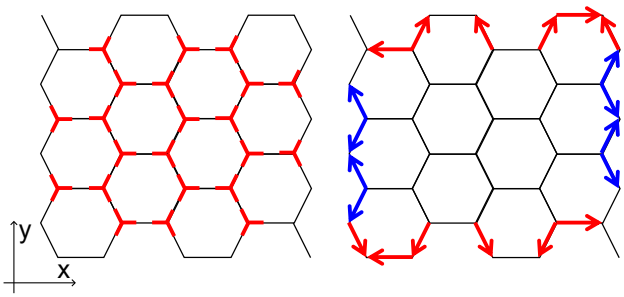


図8　算出される位置，左：3つ又，右：端部

これにより，ハニカムの構成が完了する（図4右）．

2.4　制約条件

以上までで条件1～条件4を満たすハニカムを構成できたが，目的としているハニカムは，さらに条件4～条件7を制約として満たす必要がある．

条件4では，面にねじれが生じないようにする（図10，式(4)，式(5a)）．ここで$\boldsymbol{v}_e$は図10の線のベクトル，$\boldsymbol{v}_{e,1}$，$\boldsymbol{v}_{e,2}$は図10の線から上点へのベクトル，Eは図4左で示されるすべての辺番号の集合である．

$$\boldsymbol{v}'_{e,1} = f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}_{e,1}, \boldsymbol{v}_e)$$
$$\boldsymbol{v}'_{e,2} = f_{\mathrm{proj}}(\boldsymbol{v}_{e,2}, \boldsymbol{v}_e)$$
$$\frac{\boldsymbol{v}'_{e,1} \cdot \boldsymbol{v}'_{e,2}}{|\boldsymbol{v}'_{e,1}||\boldsymbol{v}'_{e,2}|} = \cos(0) = 1 \quad (e \in E) \tag{4}$$

条件5では，ハニカムを閉じれるように，折りたたんだ後の辺2つが同じ長さとなるようにする（図9，図11左，式(5b)）．ここで$L_{\alpha,1}$，$L_{\alpha,2}$，$L_{\alpha,3}$は折りたたんだ後に1つの辺となる片側，$L_{\beta,1}$，$L_{\beta,2}$，$L_{\beta,3}$は折りたたんだ後に1つの辺となるもう片側，A，Bは図11左のそれぞれ赤，青で示される辺集合の番号の集合である．

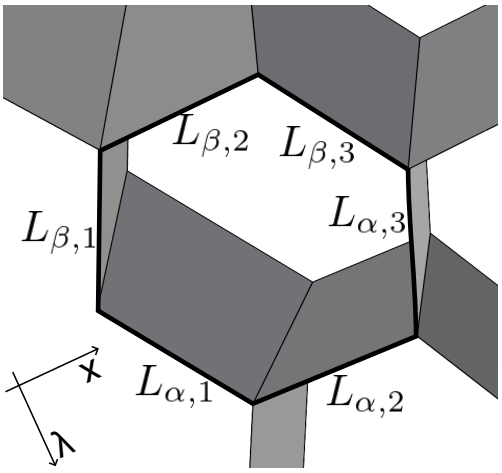


図9　条件5の制約

条件6では，全体の辺の長さを落ち着かせることで，

形状を安定させる（図10，式(5c)）．ここで，$\boldsymbol{v}_e$は図10の線のベクトル，$L_{\max}$は辺長しきい値，Eは図4左で示されるすべての辺番号の集合である．

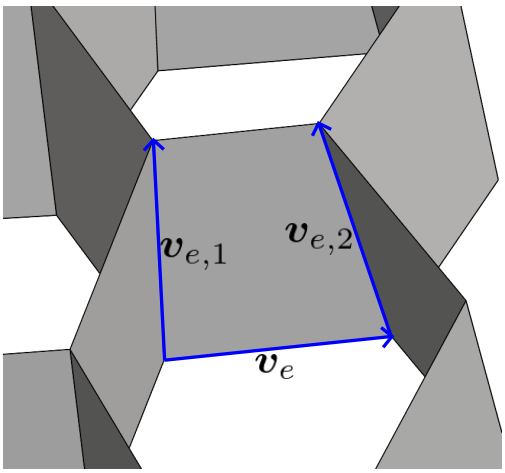


図10　条件4と条件6の制約

条件7では，解析でハニカムが縮まらないように，四辺へ固定させる（図11右，式(5d)，式(5e)）．ここで，u_j，v_jは設計変数のu，vパラメーター，$\bar{u}_j$，$\bar{v}_j$は設計変数のu，vパラメーターの指定値，E_u，E_vは図11右のそれぞれedge1，edge2上の下点の節点番号の集合である．

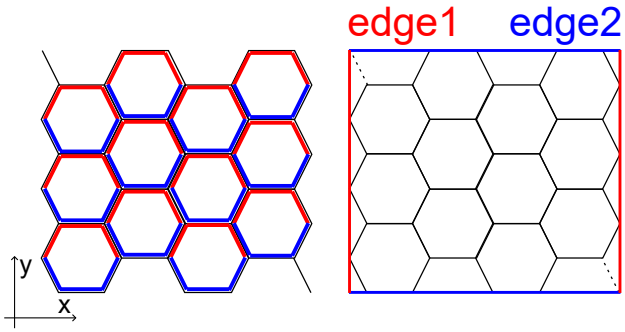


図11　条件5の影響位置（左）と条件7の制約（右）

$$\text{条件4}: \frac{\boldsymbol{v}'_{e,1} \cdot \boldsymbol{v}'_{e,2}}{|\boldsymbol{v}'_{e,1}||\boldsymbol{v}'_{e,2}|} = 1 \quad (e \in E) \tag{5a}$$

$$\text{条件5}: \sum_{i=1}^{3} L_{\alpha,i} = \sum_{i=1}^{3} L_{\beta,i} \quad (\alpha \in A, \beta \in B) \tag{5b}$$

$$\text{条件6}: |\boldsymbol{v}_e| < L_{\max} \quad (e \in E) \tag{5c}$$

$$\text{条件7}: u_j = \bar{u}_j \quad (j \in E_u) \tag{5d}$$

$$v_j = \bar{v}_j \quad (j \in E_v) \tag{5e}$$

表 1　モデルと探索結果

モデル名	neg1	pos1	neg2
ガウス曲率	負	正	負
曲面サイズ	4x4	4x4	8x8
N_x, N_y	10, 4	10, 4	14, 8
辺長しきい値（$L_{\max}$）	0.85	0.83	0.82
$_{dz}$limit	0.1	0.1	0.1
最適性条件	OK	OK	OK

以上の式(5a)～(5e)を制約条件として探索を行い，目的とするハニカムの形態創生を行う．

3　探索結果

今回3つのモデルで逆解析を行い，形態創生を行った．今回のモデルは，入力する曲面のガウス曲率が負のモデル2つ（neg1，neg2）と，正のモデル1つ（pos1）とし，ガウス曲率が負のモデルの1つ（neg2）は規模の大きいモデルとしている．部材幅Wを1として，入力したデータと結果を表1に示し，neg1の入力曲面と探索結果を図12，pos1の入力曲面と探索結果を図13，neg2の入力曲面と探索結果を図14に示す．

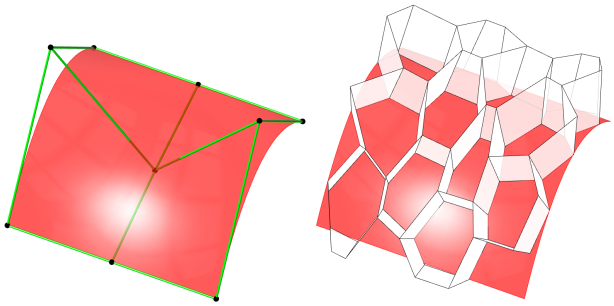


図12　neg1 入力曲面（左）と探索結果（右）

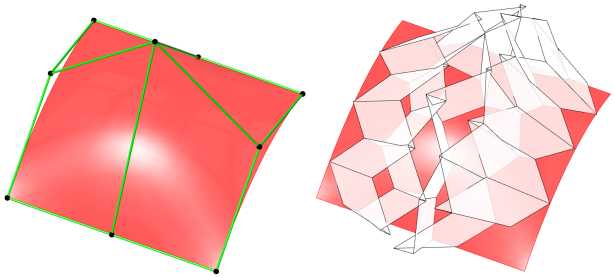


図13　pos1 入力曲面（左）と探索結果（右）

表1に示すように，neg1，pos1，neg2の全てで最適性条件であるKKT条件を満たす解を出すことができたが，

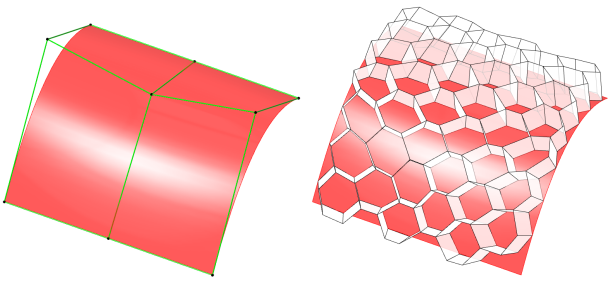


図14　neg2 入力曲面（左）と探索結果（右）

pos1の探索結果（図13右）では，部材が重なる部分が発生した．これは部材幅に依存するため，許容できる幅を超えなければ実用上問題はないと考えられる．

4　検証

どの程度部材が平面であるか，指定された曲面に沿えているかを検証する．今回は形態創生の結果で部材が重なる部分のあるpos1について検証を行う．

まず，ハニカムの部材がどの程度平面であるかを検証する．平面の検証には，日本産業規格「幾何偏差の定義及び表示」[5]の平面度の表示を用いた．結果を図15, 図16に示す．図15より, 全体的にほとんどの部材が0に近いことがわかる．図16では，裏から確認により，平面度の最大値5.34×10^{-4}が確認できる．これは，曲面サイズ4x4や部材幅W $= 1$と比較して十分に小さい値である．以上より，pos1の部材はほぼ平面であると結論付けられる．

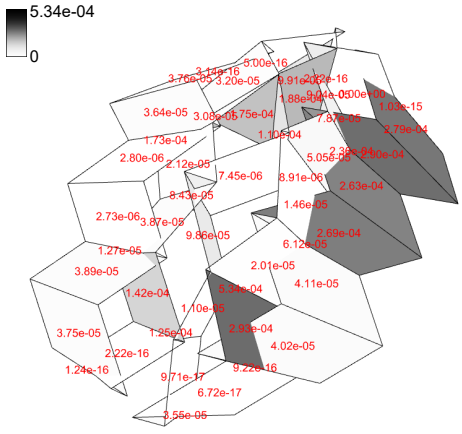


図15　pos1 平面度

次に，ガウス曲率が正となる曲面に正しく沿えているかを検証する．この検証では，モデルの裏や部材ごと

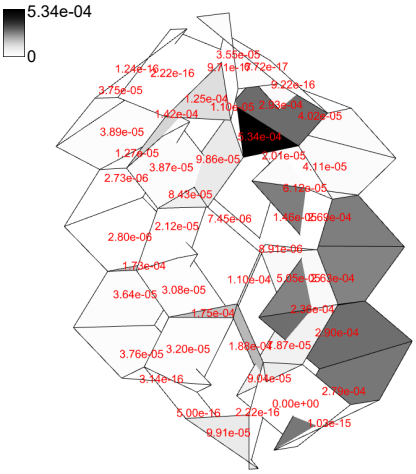


図16　pos1 平面度：裏から確認

の$_dz$の差が大きい部分を観察することで検証を行う．結果を図17，図18に示す．図17より，裏から確認したとき, 中心部は$_dz$に負の値を与えられ, 曲面に沈み込んでいるている様子である．周辺部では$_dz$に正の値を与えられ, 浮いているように見えた．これは, ハニカムが入力曲面の凹凸が少ない方が構成しやすいため，凹凸が少なくなるように$_dz$が与えられたのではないかと考えられる．図18では，部材ごとの$_dz$の差が大きい部分を拡大したものである．この図では曲面に対して，凹凸がでるようにハニカムが構成されており，この凹凸があることにより全体的にガウス曲率が正となる曲面へ沿わせることができたのではないかと考えられる．

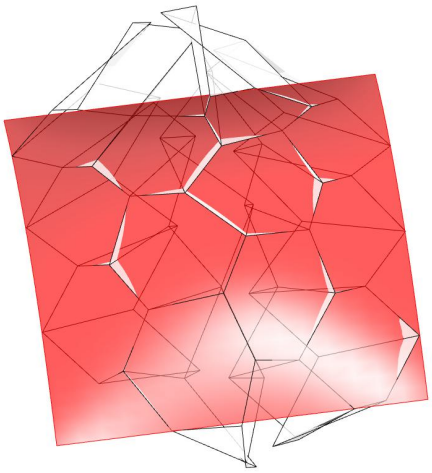


図17　pos1 裏から確認

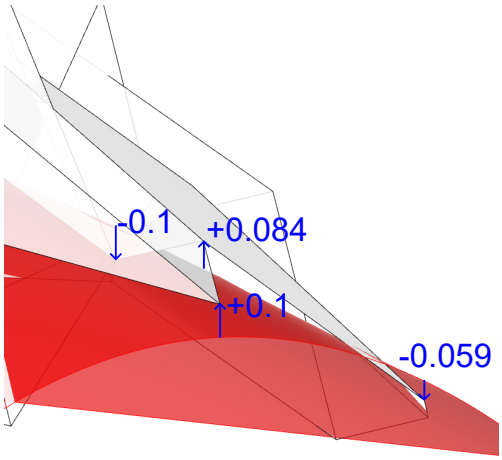


図18　pos1 拡大と$_dz$の数値

5　まとめ

今回は立体的で折りたためるハニカム構造を，曲面からの逆解析によって形態創生することができた．ガウス曲率が負となるモデルや正となるモデルでハニカムを構成することはできたが，正となるモデルでは部材ごとの$_dz$の差が大きくなるように，曲面に対し凹凸がでるようなハニカムが構成されてしまうことが確認できた．

参考文献

1）Caigui Jiang, Jun Wang, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Freeform honeycomb structures. In *Computer Graphics Forum*, Vol. 33, pp. 185–194. Wiley Online Library, 2014.

2）Rupert Maleczek, Gregoire Loriot de Rouvray, and Clemens Preisinger. Linear double folded stripes. In *Proceedings of IASS Annual Symposia*, Vol. 2015, pp. 1–12. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2015.

3）Scott Davidson. Calling compute with python. `https://developer.rhino3d.com/guides/compute/compute-python-getting-started/` GitHub: `https://github.com/mcneel/rhino3dm`, [Accessed 22 Sep. 2024].

4）Ruben E Perez, Peter W Jansen, and Joaquim RRA Martins. pyopt: a python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 45, pp. 101–118, 2012.

5）日本産業規格. 幾何偏差の定義及び表示. JIS B 0621.

正方形平面の支持架構付きグリッドシェルの屋根の形状と部材断面の同時耐震最適化

白井健志 [1)]，寺澤友貴 [2)]，竹内　徹 [3)]
1)(株)竹中工務店，修士(工学)，shirai.kenji@takenaka.co.jp
2)東京科学大学環境・社会理工学院建築学系，准教授，博士(工学)
3)東京科学大学環境・社会理工学院建築学系，教授，博士(工学)

1 序

グリッドシェル構造の構造形態創生は，固定荷重に対する探索が主流であり動的地震荷重に対する手法は未だ発展途上である。文献(1)では，一般化応答スペクトル解析法(GRSA)に基づく提案手法 [1), 2)]により，地震荷重にも効果的な屋根形状とその力学特性について分析された。一方，経済性にも寄与する屋根部材断面最適化の影響は未解明である。本研究では，地震荷重レベル，支持架構剛性，支持架構による地震エネルギー吸収の有無をパラメータとした屋根の形状と部材断面の単目的最適化を行い，最適解を構造合理性と経済性の価値観で比較分析する。さらに，力学特性や座屈性状を検証する。

2 数値解析概要

2.1 想定建物

図 1 に想定建物の数値モデルを，表 1 に部材諸元を示す。検討対象は文献(1)と同様の体育館や商業施設を想定した正方形平面の鉄骨造の 3 層支持架構付単層グリッドシェル構造とする。屋根架構は 3m グリッドに直交材，斜材，外周材を割付け，支持架構外周部に弾性ブレースまたは座屈拘束ブレース(BRB)を配置する。屋根・外壁荷重は 1.2kN/m^2, 床荷重は 5.0kN/m^2 とし屋根形状や部材断面に依らず固定とする。初期断面はライズを 7.9m とし，固定荷重と 1 次設計時の地震荷重に対して屋根架構安全率 2.0, 支持架構安全率 1.5 で許容応力度設計した。以降，弾性ブレース付モデルを CB モデル，BR s B 付モデルを BRB モデルと呼称する。

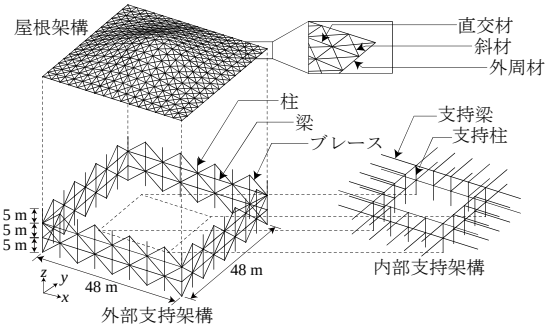


図 1　想定建物

表 1　部材諸元

(a) 弾性部材

部材名		def	soft	hard
屋根架構	直交材	ϕ406.4×16(最適化対象)		
	斜材	ϕ26		
	外周材	ϕ406.4×9.5		
支持架構	柱・梁	ϕ406.4×16	ϕ355.6×11.1	ϕ609.6×22
	耐震ブレース	ϕ216.3×12.7	ϕ216.3×5.8	ϕ355.6×12.7
	支持柱	ϕ406.4×9.5	ϕ318.5×10.3	ϕ558.8×19
	支持梁	ϕ267.4×6	ϕ216.3×5.8	ϕ355.6×12.7

(b) 弾塑性部材(BRB)

階層	w [kN]	A_i	C_i	Q_u [kN]	Q_{un} [kN]	N [kN]	A_{eq} [mm^2]
3	11952	1.54	1.53	23176	5794	236	1676
2	11952	1.22	1.21	32858	8215	334	2376
1	11376	1.00	1.00	38285	9571	389	2769

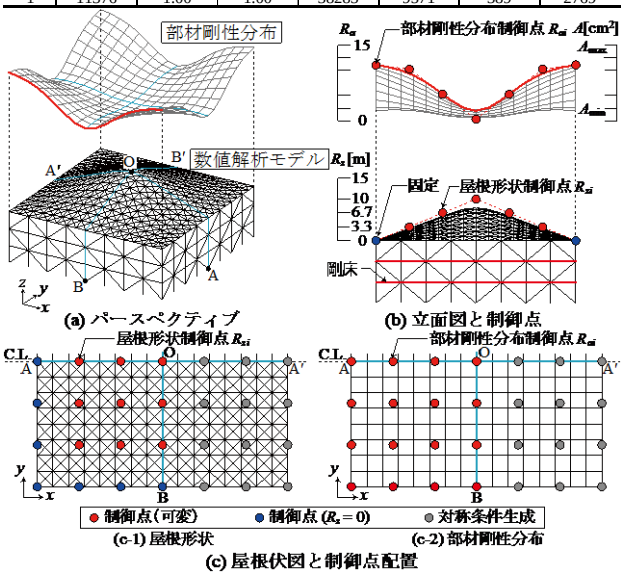


図 2　設計変数

2.2 最適化問題の定式化

(a) NURBS 曲面を用いた設計変数の表現

図2に設計変数の概要を，表2に最適化問題の概要を，表 3 に最適化の部材断面リストを示す。設計変数は，図 2(b)(c)に示す屋根の形状と部材剛性分布を生成する NURBS 曲面の制御点鉛直方向座標 R_{zi}, R_{ai} とする。部材剛性分布の曲面の鉛直方向座標と部材断面積 A には，最適化問題毎に一対一の対応関係を与え，直交材断面には表 3 から対応する一般構造用鋼管を割当てる。

(b) 目的関数に用いる総歪エネルギーと鋼材重量比

総歪エネルギーU は，固定荷重に対する U_{DL} と地震荷

重に対する U_{ELxy} を式(1)で計算して総和し，構造合理性の指標(価値観)とする。

$$U_{DL} \text{ or } U_{ELxy} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{MEM}\frac{A_k l_k}{E_k}({}_k\sigma_N{}^2 + {}^{(i)}_k\sigma_M{}^2 + {}^{(j)}_k\sigma_M{}^2) \quad (1)$$

ここに MEM は部材数，A は断面積，l は部材長，E はヤング率，σ_N は軸応力度，${}^{(i)}\sigma_M$ は i 端の曲げ応力度である。U_{ELxy} は各方向の総歪エネルギーを $1/\sqrt{2}$ 倍した和(斜め 45 度方向入力)として評価する [1]。鋼材重量比 $w(\boldsymbol{R}_a)$は図 1 の形状の鋼材重量 W_0 に対する探索解の鋼材重量 $W(\boldsymbol{R}_a)$ の比 $W(\boldsymbol{R}_a)/W_0$ とし，経済性の指標(価値観)とする。

(c) 制約条件

制約条件は R_{zi} と R_{ai}(直交材断面積 A)の上下限値の制約に加え，直交材と外周材の短期許容圧縮応力度に基づく応力制約(CR<1.0)，ラチスシェル屋根構造設計指針に基づく屋根部の鉛直たわみ角の変形制約($\theta < \theta_{cr}$=1/300 rad.)，部材回転角 [1]の変形制約($RA<RA_{cr}$=1/150 rad.)を適用する。応力と変形制約は目的関数のペナルティ ϕで表現する。

(d) 構造合理性のみを価値観とする最適化問題

構造合理性(総歪エネルギーの低減)のみを価値観とする最適化問題は，屋根形状のみを最適化する G，直交材断面のみを最適化する M，最適屋根形状に対して直交材断面のみを最適化する G-M，屋根の形状と直交材断面を同時最適化する G&M として，式(2)~式(8)で定義する。

G)	Minimize	$: f(\boldsymbol{R}_z) = U+\phi$	(2)
	Subject to	$: 0\,\text{m} \le R_{zi} \le 15\,\text{m}$	(3)
M), G-M)	Minimize	$: f(\boldsymbol{R}_a) = U+\phi$	(4)
	Subject to	$: 0 \le R_{ai} \le 15$	(5)
G&M)	Minimize	$: f(\boldsymbol{R}_z, \boldsymbol{R}_a) = U+\phi$	(6)
	Subject to	$: 0\,\text{m} \le R_{zi} \le 15\,\text{m}$	(7)
		$: 0 \le R_{ai} \le 15$	(8)

(e) 構造合理性と経済性を価値観とする最適化問題

構造合理性(総歪エネルギーの低減)と経済性(鋼材重量の低減)を価値観とする最適化問題は，屋根の形状 s と直交材断面を同時最適化する G&M-W，直交材断面のみを最適化する M-W とし，式(9)~式(13)で定義する。

G&M-W)	Minimize	$: f(\boldsymbol{R}_z, \boldsymbol{R}_a) = w(\boldsymbol{R}_a)\times U+\phi$	(9)
	Subject to	$: 0\,\text{m} \le R_{zi} \le 15\,\text{m}$	(10)
		$: 0 \le R_{ai} \le 15$	(11)
M-W)	Minimize	$: f(\boldsymbol{R}_a) = w(\boldsymbol{R}_a)\times U+\phi$	(12)
	Subject to	$: 0 \le R_{ai} \le 15$	(13)

(f) 最適化アルゴリズム

最適化アルゴリズムは実数値 GA [4]を用い，交叉手法には AREX，世代交代モデルには JGG [5]を適用する。集団サイズは 4(設計変数次元+1)，繰返し計算回数は 200 とし，乱数生成した初期集団から最適解を探索する。

表 2　最適化問題の概要

最適化問題	3章		4章			
	M	M-W	G	G&M	G&M-W	G-M
目的関数	$U+\phi$	$w(\boldsymbol{R}_a)\times U+\phi$	$U+\phi$		$w(\boldsymbol{R}_a)\times U+\phi$	$U+\phi$
屋根形状	DL or Single or Double or Multi		Opt(最適化)			Opt-G
設計変数	$\boldsymbol{R}_a$		$\boldsymbol{R}_z$	$\boldsymbol{R}_z$, $\boldsymbol{R}_a$		$\boldsymbol{R}_a$
地震荷重レベル	1 G		1 G or 0.5 G			1 G
支持架構剛性	def		def or hard or soft			def
ブレース	CB or BRB		CB or BRB			CB
制約条件	CR<1.0 , $RA<RA_{cr}$, $\theta<\theta_{cr}$		CR<1.0 , $RA<RA_{cr}$, $\theta<\theta_{cr}$			
			0 m ≤ R_{zi} ≤ 15 m			
	$0 \le R_{ai} \le 15$		$0 \le R_{ai} \le 15$			
	29.94 cm^2 ≤ A ≤ 687.0 cm^2		29.94 cm^2 ≤ A ≤ 196.2 cm^2			
アルゴリズム	実数値GA(AREX/JGG)		実数値GA(AREX/JGG)			

DL-M(-W-BRB)
① ② ③
①屋根形状 (DL, Single, Double, Multi)
②経済性の価値観 $w(\boldsymbol{R}_a)$ の有無 (なし, W)
③支持架構の地震エネルギー吸収の有無 (CB, BRB)
※N/A ②なし ③ CB

(a) 3 章

Opt-G&M
①
(-W-0.5G-soft-BRB)
② ③ ④ ⑤
①設計対象 (G, G&M, G-M)
②経済性の価値観 $w(\boldsymbol{R}_a)$ の有無 (なし, W)
③地震荷重レベル (1G, 0.5G)
④支持架構の水平剛性 (def, soft(def×1/2), hard(def×5))
⑤支持架構の地震エネルギー吸収の有無 (CB, BRB)
※N/A ②なし ③ 1G ④ def ⑤ CB

(b) 4 章

図 3　検討パラメータとモデル命名規則

表 3　部材断面リスト

(a) 3 章

断面番号 S	部材諸元	A [cm^2]	I [cm^4]
S1	ϕ216.3×4.5	29.94	1,680
S2	ϕ318.5×6.9	67.55	8,200
S3	ϕ406.4×9.5	112.4	22,200
S4	ϕ406.4×12.7	157.1	30,500
S5(初期設計)	ϕ406.4×16	196.2	37,400
S6	ϕ508×16	247.3	74,900
S7	ϕ609.6×16	298.4	132,000
S8	ϕ700×16	343.8	201,000
S9	ϕ711.2×19	413.2	248,000
S10	ϕ812.8×19	473.8	373,000
S11	ϕ914.4×19	534.5	536,000
S12	ϕ914.4×22	616.5	614,000
S13	ϕ1016×22	687.0	849,000

(b) 4 章

断面番号 S	部材諸元	A [cm^2]	I [cm^4]
S1	ϕ216.3×4.5	29.94	1,680
S2	ϕ267.4×6.0	49.27	4,210
S3	ϕ318.5×6.9	67.55	8,200
S4	ϕ355.6×7.9	86.29	13,000
S5	ϕ355.6×9.5	103.3	15,500
S6	ϕ355.6×11.1	120.1	17,800
S7	ϕ355.6×12.7	136.8	20,100
S8	ϕ406.4×12.7	157.1	30,500
S9(初期設計)	ϕ406.4×16	196.2	37,400

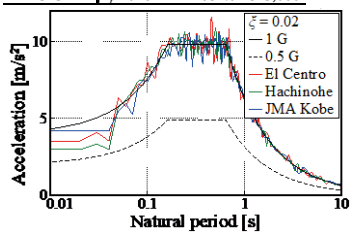


図 4　入力地震動

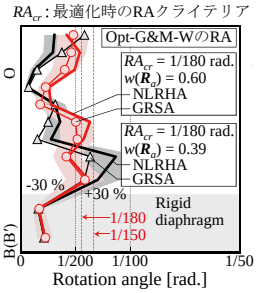
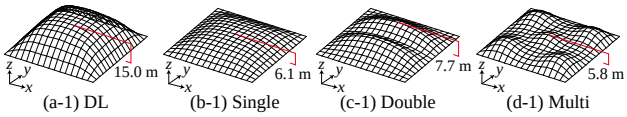


図 5　GRSA の精度

2.3 数値解析手法

数値解析手法は静的応力解析，振動固有値解析，時刻歴応答解析(NLRHA)，線形・弾性・弾塑性座屈解析，一般化応答スペクトル解析(GRSA)を用いる。静的応力解析は構造形態創生と得られた設計案の力学特性評価に用いる。振動固有値解析，NLRHA，線形・弾性・弾塑性座屈解析は設計案の力学特性評価に用いる。NLRHA の増分変位は Newmark β法(β=1/4)で計算し，弾性・弾塑性座屈解析は弧長増分法を用いる。GRSA は構造形態創生に用い，U_{ELxy} を算出する。図 5 に最適化時の RA の制約値 RA_{cr}



(a-1) DL　(b-1) Single　(c-1) Double　(d-1) Multi

図 6　断面最適化する屋根形状(屋根架構のみ描画)

表 4　最適解の特性値

(a) CB モデル

Model ID	U_{DL}	U_{ELxy}	U	W[t]	CR_{max}	RA_{DL}	RA_{ELx}	RA_{ELy}	S_{min}	S_{max}
DL (Initial)	27.0	747.8	774.8	261.4	0.783	1/821	1/149	1/149	S5	S5
DL-M	10.7	102.4	113.1	915.3	0.469	1/2636	1/1240	1/1240	S13	S13
DL-M-W	20.5	646.9	667.4	203.9	0.817	1/757	1/180	1/180	S2	S9
Single (Initial)	85.0	451.3	536.3	229.0	0.644	1/344	1/174	1/174	S5	S5
Single-M	28.0	48.7	76.7	801.3	0.302	1/1323	1/2753	1/2753	S12	S13
Single-M-W	75.1	375.8	450.8	179.4	0.969	1/287	1/241	1/244	S2	S8
Double (Initial)	120.9	598.4	719.3	233.2	1.492	1/151	1/71	1/162	S5	S5
Double-M	24.4	51.2	75.7	816.3	0.327	1/1056	1/2680	1/2645	S13	S13
Double-M-W	80.0	400.1	480.1	203.9	0.785	1/186	1/187	1/201	S2	S11
Multi (Initial)	221.8	499.7	721.5	234.3	1.354	1/89	1/128	1/128	S5	S5
Multi-M	41.9	59.3	101.2	818.9	0.351	1/503	1/1997	1/1997	S12	S13
Multi-M-W	101.2	271.2	372.3	290.1	0.627	1/181	1/309	1/281	S2	S12

(b) BRB モデル

Model ID	U_{DL}	U_{ELxy}	U	W[t]	CR_{max}	RA_{DL}	RA_{ELx}	RA_{ELy}	S_{min}	S_{max}
DL-BRB	27.0	32.4	59.4	261.4	0.322	1/798	1/1030	1/1028	S5	S5
DL-M-BRB	10.7	7.2	17.9	915.3	0.214	1/2481	1/4459	1/4460	S13	S13
DL-M-W-BRB	34.8	41.1	75.9	68.7	0.589	1/371	1/339	1/296	S1	S4
Single-BRB	84.8	27.7	112.5	229.0	0.457	1/328	1/1211	1/1211	S5	S5
Single-M-BRB	28.4	3.8	32.3	800.3	0.154	1/1242	1/6490	1/6490	S12	S13
Single-M-W-BRB	76.8	23.7	100.5	99.9	0.690	1/185	1/449	1/442	S1	S8
Double-BRB	121.1	26.7	147.8	233.2	0.834	1/148	1/523	1/983	S5	S5
Double-M-BRB	24.7	3.9	28.7	816.3	0.188	1/1019	1/6271	1/6297	S13	S13
Double-M-W-BRB	58.2	17.6	75.8	246.2	0.461	1/352	1/1256	1/998	S2	S12
Multi-BRB	222.6	23.2	245.8	234.3	1.052	1/88	1/979	1/979	S5	S5
Multi-M-BRB	42.5	4.5	47.0	813.6	0.202	1/478	1/6396	1/6396	S12	S13
Multi-M-W-BRB	54.2	9.6	63.7	462.4	0.290	1/233	1/2001	1/2077	S3	S12

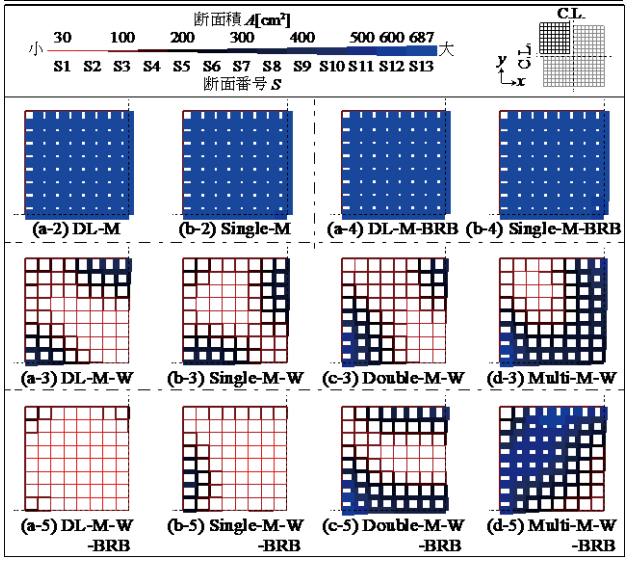


図 7　最適解の部材断面分布

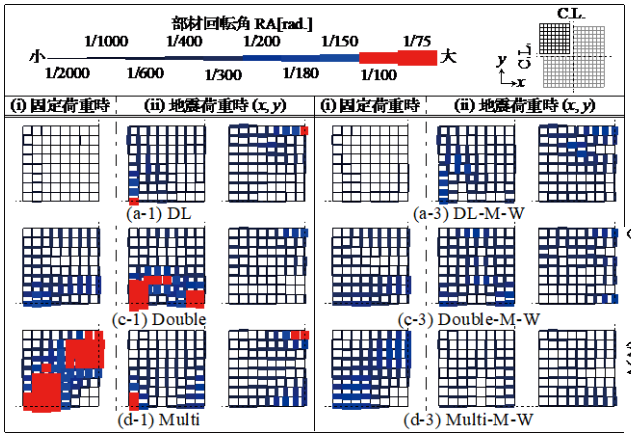


図 8　部材回転角(RA)分布

をパラメータとする NLRHA と GRSA の支持架構を含む稜線 BOB'の地震応答値の比較を示す。GRSA は NLRHA の変位応答を最大誤差 30 %程度で評価可能である。以降，地震応答は図 4 のスペクトル適合 3 波の平均値とする。

3　恣意的なグリッドシェル屋根形状の部材断面最適化

まず，3 章では，形状を固定したグリッドシェル屋根(意匠設計者から恣意的な形状を要求された状況に相当)を対象に屋根の部材断面の耐震最適化を行う。表 2 に最適化問題の概要を，図 3(a)に検討パラメータとモデル命名規則を，図 6 に直交材断面を最適化する屋根形状を示す。支持架構剛性は標準 *def* とし，地震荷重はスペクトルピーク値 1.0G とする。比較を容易にするため，表 4 に初期案と最適解の特性値(CR_{max} は最大検定値，$RA_{DL,EL}$ は各荷重に対する RA の最大値，S_{min}, S_{max} は最小・最大断面)，図 7 に部材断面分布，図 8 に部材回転角分布，図 9 に地震応答値を各節を横断して掲載し，視認性の都合で屋根架構は斜材を省略して示す。

3.1 支持架構のエネルギー吸収が無い場合の最適解

構造合理性のみを考慮した最適解(~-M 系，図 7(a-2)(b-2))は，部材の断面積の増加が面外剛性の増大に直結するため，屋根形状に依らず上限断面近傍のみが配置され，鋼材重量は大幅に増加するが総歪エネルギーは大幅に低減された(表 4(a))。一方，経済性も考慮した最適解(~-M-W 系，図 7(a-3)~(d-3))は，初期案の各部材応答(図 8)の大小に応じて断面が配置され，屋根形状に依らず鋼材重量を抑えつつ屋根部応答(図 9(b))を設計クライテリアに納める現実的な設計案が選択された。この結果は，部材断面積のみの低減による構造合理性の改善は困難であること，部材断面は構造合理性と経済性の両方に大きく寄与し，その分布は最適化の価値観に依存することを示す。

3.2 支持架構のエネルギー吸収が有る場合の最適解

支持架構のエネルギー吸収が有る場合は，恣意的な屋根形状の初期案でも屋根部応答(図 9(c))は設計クライテリアを満たすため，経済性も考慮した最適解(~-M-W-BRB 系，図 7(a-5)~(d-5))は固定荷重時の RA 分布((a-1)~(d-

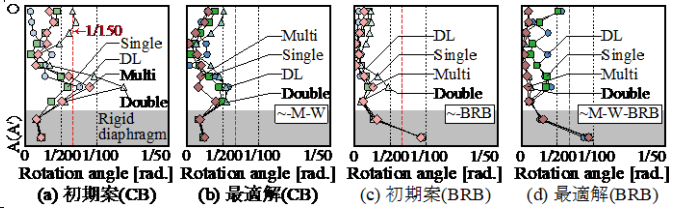


図 9　地震応答(x 方向入力)

1))に対応した断面分布となり，総歪エネルギーと鋼材重量を抑制した設計案が選択された。一方，構造合理性に特化した場合は(~M-BRB 系，図 7(a-4)(b-4))，支持架構によるエネルギー吸収が無い場合と同様に部材断面リストの上限近傍が選択され，鋼材重量は顕著に増大した。

以上より，意匠設計者から恣意的な屋根形状を要求された状況では，(1)構造合理性と経済性の両方の価値観を考慮した屋根部材断面の最適化を実施する，(2)制振部材など支持架構のエネルギー吸収によって初期案のまま屋根部応答を設計クライテリアに抑える，(3)(1)と(2)の併用，の設計アプローチが現実的かつ有効と考えられる。

4 屋根の形状と直交材断面の同時耐震最適化

4 章では，意匠上の制約は無視できると仮定し，グリッドシェル屋根の形状と直交材断面の広範な耐震最適化を行う。表 2 と図 3(b)に最適化問題とモデル命名規則のまとめを示す。ただし，表 3(b)に示すように，4 章では直交材は初期設計時から断面積が減少する範囲を探索し，形状操作が許容された状況において初期案から部材断面を減らすことで構造合理性を改善できる可能性を調査する。比較を容易にするため，表 5 に最適解の特性値，図 13 と図 12 に最適解の屋根形状と断面分布，図 11 に全最適解の総歪エネルギーと鋼材重量，図 15 に固有振動特性，図 16 に地震応答値を各節を横断して掲載する。

4.1 屋根の形状と断面と構造形態創生の価値観の関係

屋根の形状と部材断面と構造形態創生の価値観の関係性を分析する。図 10 の全探索解の総歪エネルギー－鋼材重量関係に示すように，Opt-G(灰色)と Opt-G-M(赤色)の解空間はそれぞれ総歪エネルギーまたは鋼材重量に偏って分布し，最適解の総歪エネルギーの差は殆ど無く，

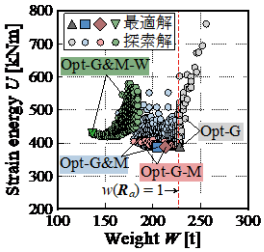


図 10　全探索解の U - W 関係

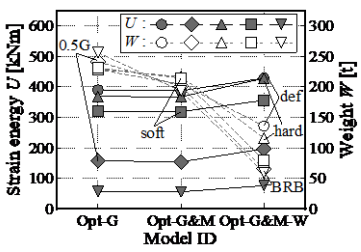


図 11　最適解の U と W の比較

表 5　最適解の特性値

Model ID	U_{DL}	U_{ELxy}	U	W [t]	CR_{max}	RA_{DL}	RA_{ELx}	RA_{ELy}	S_{min}	S_{max}
Opt-G	122.1	268.1	390.2	228.3	0.847	1/176	1/652	1/156	S9	S9
Opt-G-M	124.4	263.3	387.8	213.0	0.821	1/166	1/640	1/150	S6	S9
Opt-G&M	119.2	268.4	387.6	204.4	0.838	1/173	1/597	1/154	S8	S9
Opt-G&M-W	113.8	314.9	428.8	136.2	0.999	1/180	1/198	1/180	S3	S9
Opt-G-0.5G	58.2	100.0	158.2	241.3	0.631	1/336	1/154	1/774	S9	S9
Opt-G&M-0.5G	57.3	97.6	154.8	201.4	0.591	1/330	1/150	1/760	S7	S9
Opt-G&M-W-0.5G	56.1	141.2	197.2	65.9	0.996	1/274	1/182	1/197	S1	S6
Opt-G-hard	96.3	272.8	369.1	228.9	0.999	1/262	1/352	1/150	S9	S9
Opt-G&M-hard	93.9	273.9	367.8	216.9	0.999	1/259	1/324	1/150	S8	S9
Opt-G&M-W-hard	104.9	323.8	428.7	116.2	0.999	1/180	1/180	1/196	S2	S8
Opt-G-soft	85.1	235.1	320.3	231.3	0.588	1/250	1/391	1/392	S9	S9
Opt-G&M-soft	84.8	234.4	319.2	214.5	0.589	1/239	1/368	1/368	S8	S9
Opt-G&M-W-soft	94.2	262.4	356.5	79.6	0.989	1/182	1/181	1/181	S1	S8
Opt-G-BRB	28.5	28.8	57.4	256.2	0.346	1/614	1/1271	1/1263	S9	S9
Opt-G&M-BRB	27.0	29.2	56.2	193.6	0.357	1/590	1/991	1/967	S5	S9
Opt-G&M-W-BRB	42.4	34.4	76.8	59.4	0.803	1/340	1/365	1/425	S1	S5

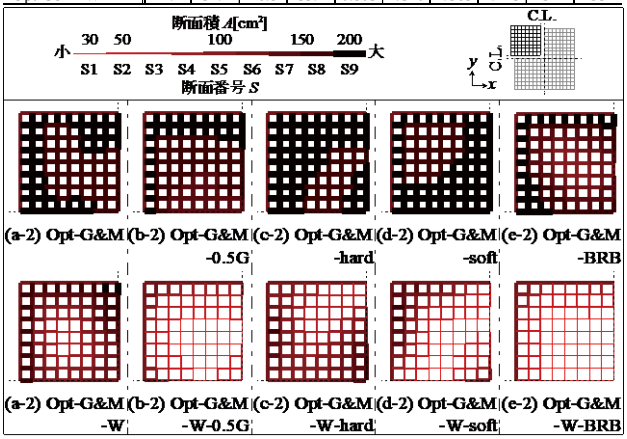


図 12　部材断面分布

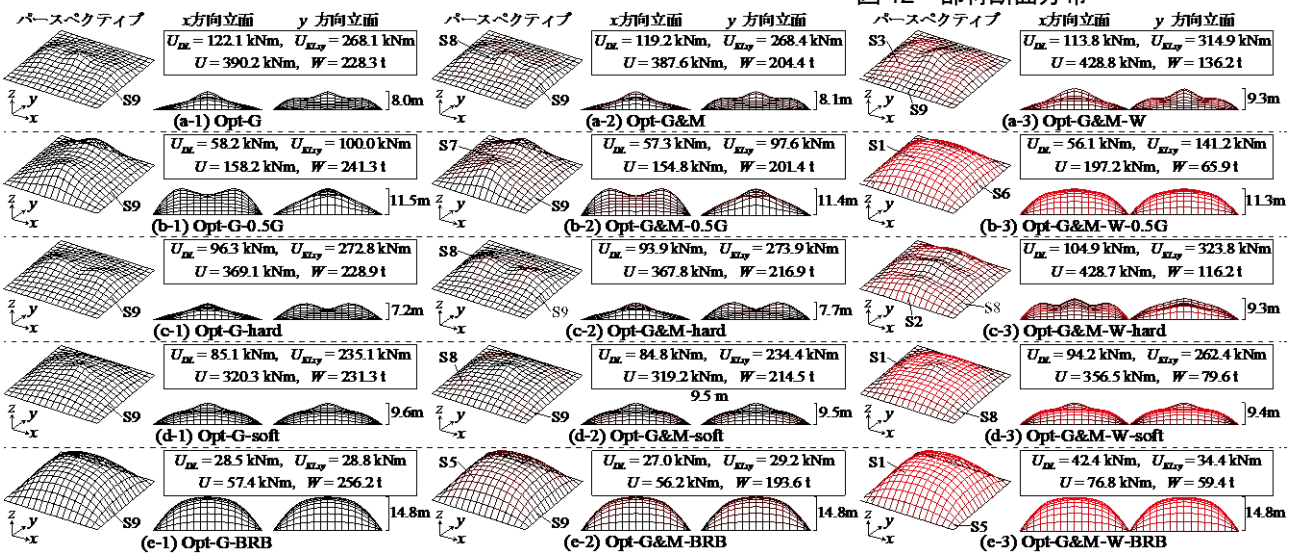


図 13　最適解の屋根の形状と部材断面

部材断面:赤(小) S1 S2 S3 S4 S5 S6 S7 S8 S9 黒(大)

Opt-G&M(青色)や Opt-G&M-W(緑色)は Opt-G-M の解空間の総歪エネルギーを殆ど超えない。この結果は，屋根の形状が主に構造合理性に影響し，形状操作が許容される場合でも部材断面の低減による構造合理性の改善は限定的であることを示す。また，図 13 に示すように Opt-G 系と Opt-G&M 系の最適解の形状と断面分布は殆ど変わらず, 経済性の価値観が含まれる場合(Opt-G&M-W 系)に断面分布が顕著に変化する。この結果は，構造合理性の観点では，最適な屋根形状と部材断面分布は独立関係にあることを示す。図 11 に示すように，Opt-G&M-W 系の鋼材重量は顕著に低減しており，本検討の構造合理性と経済性を両立する最適化問題の有効性が示唆される。

4.2 支持架構のエネルギー吸収が無い標準的な最適解

支持架構のエネルギー吸収が無い最適解を分析する。構造合理性の観点では最適な屋根形状と断面分布は独立関係にあるため，構造合理性のみを考慮した Opt-G と Opt-G&M は殆ど同様の 3 つの局部的隆起を有する扁平な屋根形状と部材断面分布となった(図 13(a-1)(a-2))。一方，経済性も考慮した Opt-G&M-W(図 13(a-3))は地震応答(図 16(a))が増大する代償に部材断面と鋼材重量は小さくなり，屋根形状は Opt-G と Opt-G&M と類似するものの固有振動特性(図 15(a-2)(a-3))は顕著に変化した。

4.3 地震荷重レベルの影響

地震荷重レベルが最適解に与える影響を分析する。Opt-G-0.5G や Opt-G&M-0.5G は複数の局部的隆起を有し地震荷重により効果的な扁平形状 [1](図 13(b-1)(b-2))が，Opt-G&M-W-0.5G は屋根全体が単峰で隆起する固定荷重により効果的な形状 [1](図 13(b-3))が選ばれ，経済性も考慮した場合には，地震荷重レベルに依っては地震応答に不利だが，経済的な設計案が選択されることを示す。

4.4 支持架構剛性の影響

支持架構剛性が最適解に与える影響を分析する。最適化の価値観に依らず，支持架構剛性が高い場合は複数の局部的隆起を有し振動モード(図 15(c-3))に抵抗する形状 [1](図 13(c-1)~(c-3))，支持架構剛性が低い場合は全体が単峰で隆起する形状 [1](図 13(d-1)~(d-3))となった。なお, Opt-G&M-W 系の鋼材重量は，屋根部応答が励起されにくい支持架構剛性が低い方がより低減される傾向にある。

4.5 支持架構による地震エネルギー吸収の影響

支持架構のエネルギー吸収の有無が最適解に与える影響を分析する。支持架構のエネルギー吸収により屋根部の地震応答が劇的に低減されるため(図 16(c))，最適化

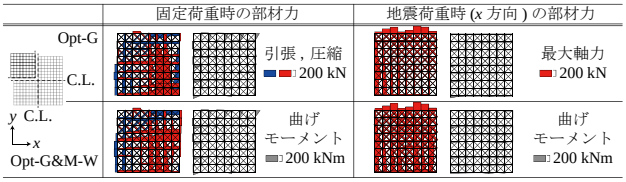


図 14　部材応力分布

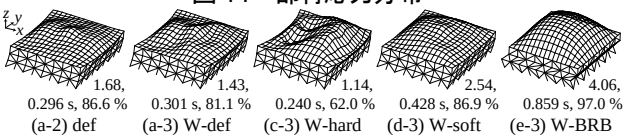


図 15　卓越固有特性(Opt-G&M-~, *x* 方向(R_T, T, *EMR*))

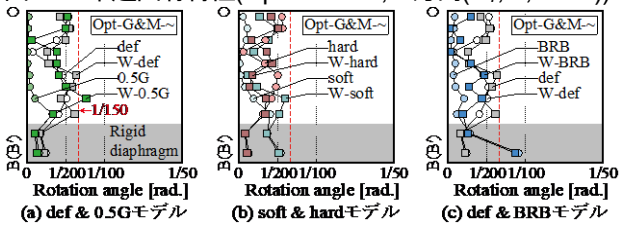


図 16　地震応答(*y* 方向入力)

の価値観に依らず全体が単峰で隆起する固定荷重に効果的な形状 [1](図 13(e-1)~(e-3))となった。Opt-G&M-W-BRB の鋼材重量は全最適解中で最小であり，支持架構への制振部材導入は屋根設計の経済性の観点で有益である。

5 最適解の座屈荷重係数

代表的な設計案の屋根部のみを抽出したモデルの線形座屈モードと線形・弾性・弾塑性座屈荷重係数を分析し，カラムカーブに基づく弾塑性座屈荷重の評価法の適用性を検証する。線形座屈荷重係数λ_{cr}^{lin} は線形座屈解析の固有値，弾性座屈荷重係数λ_{cr}^{el} および弾塑性座屈荷重係数λ_{cr}^{pl} は座屈解析の接線剛性行列の固有値が 1.0 となった時点，または計算が収束しない場合はその時点の荷重係数とする。屋根モデルは中間節点を設けて個材座屈を表現する。斜材と外周材は弾性とし，屋根外周部をピン支持とする。非線形座屈解析では，最大振幅を屋根スパンの 0.1%(本検討では 48 mm)に調整した線形座屈モード形状の初期不整量を節点座標に与える。特に弾性座屈解析では弾性座屈荷重低減係数α_0(λ_{cr}^{lin} に対するλ_{cr}^{el} の低減率)の初期不整敏感性を調査するため, 0.1%以上の不整量も検討する。荷重分布は，図 17 に示す固定荷重と同様の等分布荷重(Pattern U)と，大きさを 2 倍にして X または Y 方向に集中させた偏載荷重(Pattern X, Y)とし，荷重係数は各荷重分布に対する屋根の座屈安全率を意味する。

5.1 線形座屈モードと座屈荷重係数

図 18 に 1 次線形座屈モードと座屈パターン(+が山，−が谷)を示す。線形座屈モードは，文献(1)で明らかにされ

た平面を循環する逆対称一波モード系のパターン A(図 18(b)(c)(d))，平面に対して一方向の逆対称一波モード系のパターン B(図 18(a))，平面中央をピークとして全方向に広がる逆対称半波モード系のパターン C(図 18(e)(f))に加えて，鋼材重量が大きく低減された場合に局所的に変形が集中する線形座屈モード(図 18(b)(d)(f))が卓越する傾向にある。図 19 に各種の座屈荷重係数を示す。各種の座屈荷重係数は，偏載荷重時や鋼材重量が大幅に低減された場合に大幅に低下する傾向があるが，等分布荷重時で最低 4.5 以上，偏載荷重時で最低 2.3 以上確保できる。

5.2 弾塑性座屈荷重の簡易評価法の適用性

最後に，修正ダンカレー式 [6]や鋼構造許容応力度設計規準 [7]に準ずるカラムカーブに基づく弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{elpl} の評価法の適用性を検証する。図 20 に初期不整量－弾性座屈荷重低減係数 α_0 関係，図 21 に弾塑性座屈解析結果と評価式の比較を示す。ここで，P_{cr}^{lin} は線形座屈荷重，P^{pl} は幾何学的線形・材料非線形の静的増分解析による降伏荷重，Λ_S は正規化細長比であり，Λ_S の評価には α_0=0.5(推奨下限値 [6])を適用した。初期不整量が 0.5%の範囲まで，殆どの場合で α_0 は指針 [6]の推奨下限値 0.5 を上回った。ただし，経済性も考慮して鋼材重量が大幅に低減された場合は α_0 が推奨下限値を下回る場合があるものの，本検討の範囲では，推奨下限値を使用した弾塑性座屈荷重の評価値は座屈解析結果を安全側に評価した。

6 結

本研究の範囲で得られた結論は以下の通りである。

1) 屋根の形状は主に構造合理性の改善に影響し，部材断面は構造合理性と経済性の改善に影響する。
2) 恣意的な形状を有する屋根の設計は，(1)構造合理性と経済性を考慮した部材断面最適化，(2)支持架構によるエネルギー吸収，(3)(1)と(2)の併用が有効である。
3) 構造合理性に特化した場合は，屋根形状の操作の有無に依らず選択可能な範囲の最大断面が使用され，経済性も考慮した場合は，鋼材重量を抑えつつ屋根部応答を設計クライテリアに納める設計案が選択される。
4) 支持架構のエネルギー吸収が有る場合や支持架構剛性変動時においても，最適化の価値観に依らず，最適解には構造合理性に優れた屋根形状が選択される。ただし，経済性も考慮した場合は，地震荷重レベルに依っては経済的な設計案が優先される場合がある。
5) 最適解の座屈安全率は，鋼材重量が大幅に低減された場合に大きく低下する傾向があるが，十分な余裕度を有し，弾性座屈荷重低減係数の推奨下限値 0.5 と弾塑性座屈荷重の評価式により安全側に簡易評価できる。

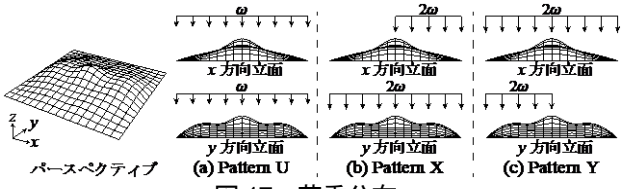


図 17　荷重分布

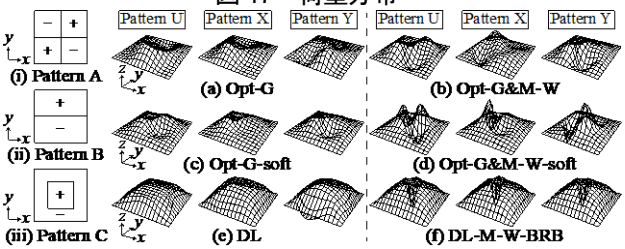


図 18　1 次線形座屈モード

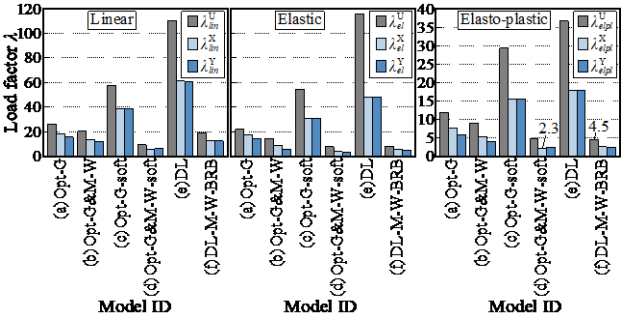


図 19　線形・弾性・弾塑性座屈荷重係数

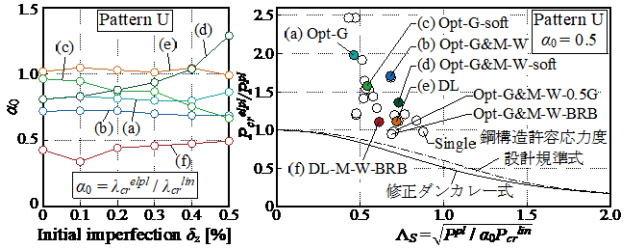


図 20　弾性座屈荷重低減係数 α_0　　図 21　弾塑性座屈荷重の評価

参考文献

1) Y. Terazawa, R. Kaneko, A. Niimi, T. Takeuchi : Form-finding of metal gridshells focusing on the tradeoff relationship between total strain energy for dead load and seismic load, Journal of Structural and Construction Engineering, Vol.89, No.823, pp.967-978, 2024.9
2) Y. Terazawa, A. Niimi, D. Nair, T. Takeuchi : Generalized response spectrum analysis based computational morphogenesis for metal gridshells with buckling-restrained braces subjected to seismic loading, Computers and Structures, No.275, 106914, 2023.1
3) Y. Terazawa, T. Takeuchi : Generalized Response Spectrum Analysis for Structures with Dampers, Earthquake Spectra, EERI, 2018.5
4) Akimoto, Y., Nagata, Y., Sakuma, J. Ono, I. and Kobayashi, S. : Proposal and Evaluation of Adaptive Real-coded Crossover AREX, Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence, Vol.24, No.6, 2009.11 DOI: 10.1527/tjsai.24.446
5) Kobayashi, S. : The Frontiers of Real-coded Genetic Algorithms, Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence, Vol.24, No.1, pp.147-162, 2009.1 DOI: 10.1527/tjsai.24.147
6) 日本建築学会：ラチスシェル屋根構造設計指針，2016.11
7) 日本建築学会：鋼構造許容応力度設計基準，2019.10

アルミニウム模型による Bending-Active 単層籠目格子シェルの形状分析

小久保　結平 [1)]，山下　哲郎 [2)]
1)工学院大学大学院工学研究科建築学専攻，dm24030@g.kogakuin.jp
2)工学院大学建築学部，教授，博士(工学)，tetsuo_y@cc.kogakuin.ac.jp

1 はじめに

木造ラチスシェル構造の施工方法として、マンハイムの多目的ホール [1)]やダウンランドのグリッドシェル [2)]など [3)]、部材の弾性曲げによって曲面を形成する Bending-Active ラチスシェルがある。この場合、木材は現場で曲げて施工されるため、必然的に構造に初期応力を内包し、ラチスシェル構造において重要な座屈耐力に影響を及ぼす。このような部材の初期曲げを考慮したシェルの釣合形状を探索する Dynamic Relaxation 法 [4)] など、初期曲げを考慮したラチスシェル構造の解析や実験を行う研究も盛んになっている [5)-6)]。

白鳥ら [7)]は、形状解析に特化しない汎用有限要素解析ソフトで、偏心を伴って木材を 3 方向に重ねた籠目格子シェルの形状解析、及び連続して座屈解析を行う手法(以下、ASE&BSE 法)を開発した。しかし、この解析手法は実験で検証されていない。

そこで春日ら [8)]は ASE&BSE 法よる形状、及び座屈解析手法の有効性検討のための、Bending-Active 単層木造籠目格子シェルの形状形成および座屈実験を実施した。その結果、ASE&BSE 法による解析 [7)]と比較して、座屈耐力に大きな乖離が確認された。その要因の一つとして、大きな形状初期不整の影響が考えられる。具体的には、使用したスギの部材の初期たわみや、部材内のヤング係数の不均質性、加えて、学生による施工によって生じた誤差などによりスパンの約 1/200 におよぶ大きな面外方向の不整が生じた。

そこで本研究では、木材特有の不均質性を排除し、初期たわみが小さく、比較的高精度の施工が期待できるアルミニウム模型により Bending-Active 単層籠目格子シェルを作成した。これにより、文献(7)に示される ASE&BSE 法による形状解析結果と、実験によって得られた形状との比較検討を行い、当該解析手法の妥当性および有効性を、より高い精度で検証することを目的とする。

2 試験体

2.1 ASE&BSE 法による形状解析 [7)]

ASE&BSE 法とは、初期の直線部材の両端に内向きの強制変位を与え，部材を座屈させて曲面を形成する解析手法である。この方法は，初期の部材長さと両端の境界位置によって変形後の釣合形状が決定する。最初に、球形の籠目格子シェルを仮定し、球の測地線に配置されたアーチ部材をスパン方向に沿って直線状に伸ばし、格子平板として再構築する。更に図 1 に示すように，形状解析で部材両端には、球面上にある部材両端位置（境界位置）への強制変位を与える。境界はピンローラー支持とし、全ての部材は梁要素でモデル化し，固定荷重は考慮せず、要素のせん断変形を無視している。

3 方向の格子では接合部を固定すると平板から曲面への変形が困難であるため、接合部の解析モデルには仮想のルーズホール（長穴）機構を用いる。仮想ルーズホール機構とは，部材同士を接合しつつ、曲面に沿って接合部を滑らせるために，曲げ剛性のみを有する要素（BSE）と軸剛性のみを有する要素（ASE）の組み合わせにより、節点が移動可能となる機構である（図 2）。

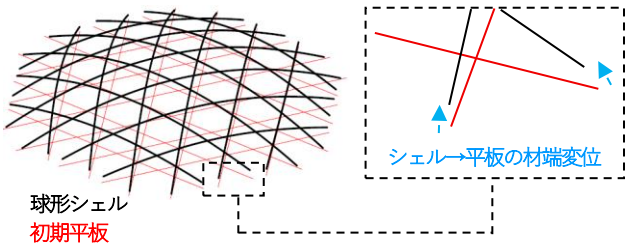


図 1　平板境界に与える強制変位

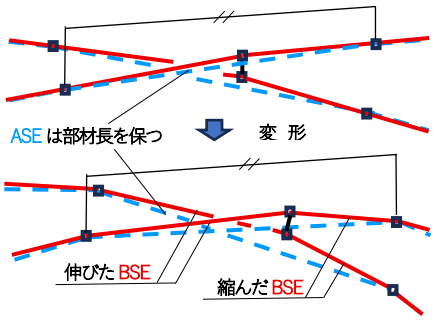


図 2　仮想ルーズホール機構

2.2　設計寸法

試験体を図 3 に示す。対角長さ 1m、ライズスパン比は 0.13 であり、各方向の部材本数は 6 本とし、3 方向の部材を重ねて形成する（図 4）。シェルの境界形状は正六角形を球面に鉛直投影して定めた（図 5）。部材の断面は 10×1.88mm の矩形、材料はアルミニウム合金（A6063）を用いる。1 部材あたり 10 箇所の材厚をデジタルノギスで計測し、すべての部材において、その 10 箇所すべてが 1.88mm であることを確認した。また、全部材の静的曲げ試験（図 6）を実施し、ヤング係数 E[N/mm^2]を算出した（表 1）。

2.3　接合部

形状解析により得られた部材同士の交点位置に、あらかじめ直径 2.2mm の孔を開けた。その後、各部材を重ね、孔位置を一致させた上で、M2 ボルトを用いて部材同士を接合した（図 7）。また、1 層目と 3 層目の部材の交点では、部材間に 10mm × 10mm × 1.88mm のスペーサーを挿入した。スペーサーは部材と同じアルミ材より切り出した。

2.4　境界支持部

図 8 に境界支持部の構成を示す。形状解析ではピン支持を仮定しているため、本研究では、境界支持部の回転自由度を十分に確保できるユニバーサルジョイントを用い、完全なピン支持とした。ユニバーサルジョイントと部材との接合においては、部材軸の延長線上にユニバーサルジョイントの回転中心（ピン位置）があるように、接合部の全ねじの加工を行った。ユニバーサルジョイントとテンションリングは高ナットを介して M8 ボルトで接合する。このボルトのヘッドは 3 章での部材軸の決定の際に用いる。

3　形状測定

形状計測は、3D スキャンと 3D 非接触計測システムの 2 つの方法で行う。

3.1　3D スキャン

形状の測定には、東京都立産業技術研究センターが所有している、測定範囲 940×700×550mm、X/Y 平均解像度 0.193mm の「パターン投影式三次元デジタイザ」を使用し、3D スキャンによって点群データを取得した。

試験体は、使用する三次元デジタイザの測定範囲を超える大きさであるため、1 回のスキャンでは全体を測定することができない。そのため、試験体のスキャンは全部で 8 通りの配置パターンで部分的に実施した（図 9）。「表置き」と「裏置き」の各 1 パターンに加えて、「縦置き」では六角形の各辺を回転台上で支持する 6 パターンの配置を行った。これら計 8 パターンすべてにおいて、回転台を回転させながらスキャンを行った。さらに、得られたスキャンデータを確認し、不足している部分がある場合には、その箇所を部分的に追加スキャンして補った。

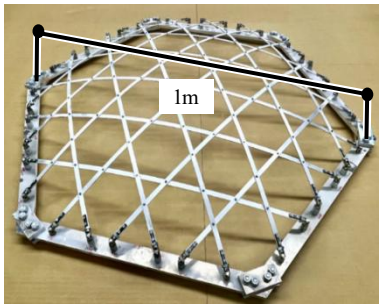


図 3　試験体

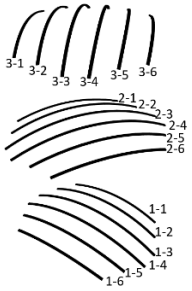
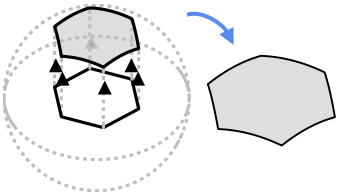


図 4　部材の積層


図 5　境界形状の決定

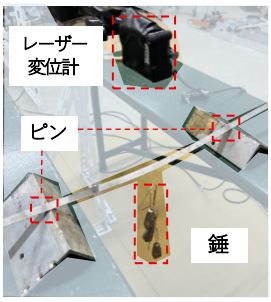


図 6　静的曲げ試験

表 1　部材のヤング係数

部材番号	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
E [N/mm2]	69707	69934	70821	71125	71934	72425
部材番号	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
E [N/mm2]	71138	71721	72364	73482	73500	71057
部材番号	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
E [N/mm2]	72383	72805	71986	71056	71593	71739

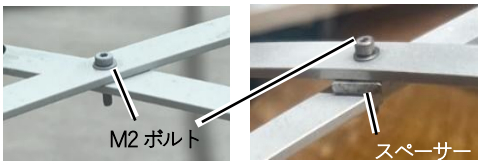


図 7　部材交点の接合

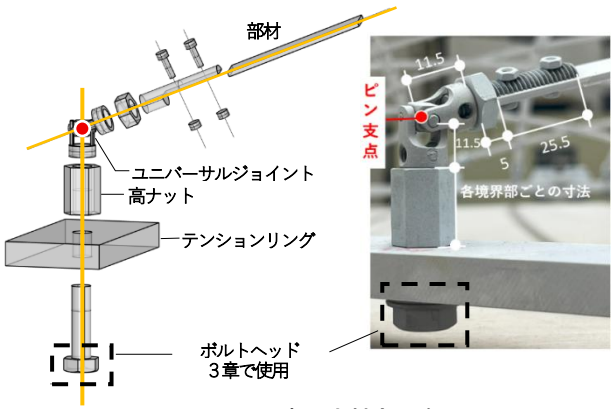


図 8　境界支持部の概要

3.1.1　3D スキャンデータ

各配置で取得した 3D スキャンデータは、点群データを基に、最終的に 1 つの連続したメッシュデータ（.stl）として出力される（図 10）。本研究ではメッシュの原データである点群データを使用する。

本計測では、生成されたメッシュデータに乱れが確認された（図 11）。特に、境界部の細かなディテールや部材の厚み方向において、その乱れが顕著に見られた。これは、スキャン対象のシェルが大きい一方で、部材が薄いことに加え、使用したスキャナーが文献(9)のものよりも測定範囲が広く、平均解像度が粗くなってしまったことが原因である。このような乱れの多いスキャンデータのみから部材軸を同定するのは困難である。そのため、本研究では Rhino+Grasshopper を用いて実測寸法に基づく部材や部品のサーフェイスモデルを作成し、点群データにフィットさせることで部材軸を定める。

3.1.2　3D スキャンデータからの部材軸の決定

上記のフィッティングには Rhino+Grasshopper に標準的に装備されている Galapagos(遺伝的アルゴリズムのソルバー)を用いて部材軸を定める。図 12 に示す部材交点付近と境界支持部を除去したアーチと、該当するユニバーサルジョイントとテンションリングを接合する M8 ボルトのヘッドを取り出し、それらを 1 セットとして、以下の手順を全 18 本のアーチに対して繰り返し行う。

最初に、M8 ボルトのヘッド（ボルトヘッド）のサーフェイスモデルを作成し、該当する点群データにフィットさせることでボルトヘッドの中心軸（ボルトヘッド軸）を定める。

1) 図 12 に示す 1 つのボルトヘッドの点群を$p_i(i = 1,2,3,\dots,n)$とする。nは一つの境界支持部におけるボルトヘッドの点群の個数である。

2) 予めノギスで実測した寸法に基づき、Rhino 上でボルトヘッドの形状をサーフェイスモデル$S_{BoltHead}$として作成する（図 13）。$S_{BoltHead}$の底面は円形であり、その円の中心点を起点に$S_{BoltHead}$を三次元的に移動、回転させる。

3) 点p_iから$S_{BoltHead}$上で最短距離となる点を$p'_i(i = 1,2,3,\dots n)$とし、2 点間の距離$d_i = p_i p'_i$の 2 乗和をaとする（図 13）。

$$a = \sum_{i=1}^{n}(d_i)^2 \rightarrow minimize$$

Galapagos を用いて、aが最小となる$S_{BoltHead}$の位置を決定する。定まった$S_{BoltHead}$の底面中心点から、底面の法線方向に直線を伸ばし、これをボルトヘッド軸とする（図 14）。1)~3)の過程をアーチ両端で行い、算出されたそれぞれのボルトヘッド軸をl_{b1}、l_{b2}とする。

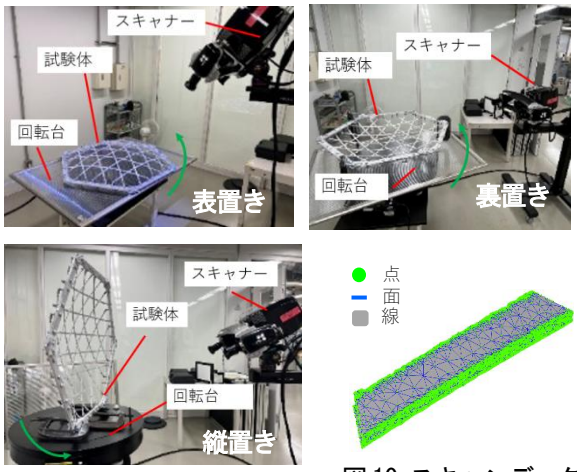


図 9　3D スキャンの様子

図 10 スキャンデータ

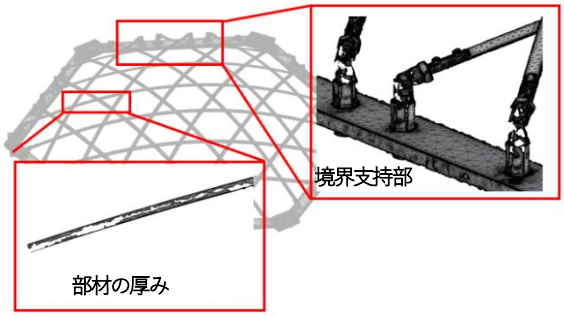


図 11 スキャンデータの乱れ

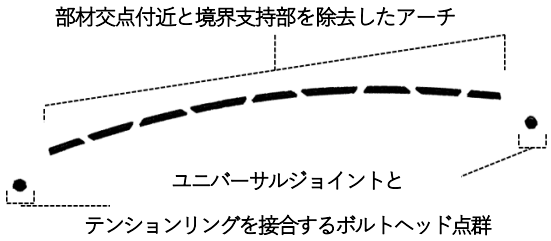


図 12　スキャンデータから取り出した 1 セット

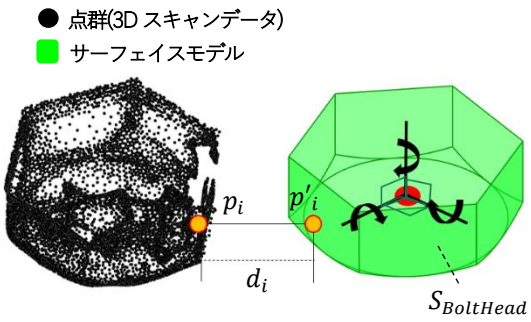


図 13　ボルトヘッドサーフェイスと点群のフィット

次に、1 部材（アーチ）のサーフェイスモデルを作成し、該当する点群データにフィットさせることで部材軸を定める。

1) 図 12 に示す部材交点付近と境界支持部を除去した部材を構成する点群を$q_i(i = 1,2,3, \dots, m)$とする。図 15 に示すように、この点群付近に、k_1を始点、k_{10}を終点とし、点$k_i = (x_i, y_i, z_i)(i = 1,2,3, \dots,10)$を通過点とするスプライン曲線$l_a$を配置する。また、曲線$l_a$の始点と終点である$k_1$と$k_{10}$は、ボルトヘッド軸$l_{b1}$、$l_{b2}$上に必ず存在する。

2) 図 16 のように、部材軸となる曲線l_aの通過点k_iを重心とし、点k_iにおける曲線l_aの接線ベクトル$\vec{t}_i(i = 1,2,3, \dots 10)$に直交する平面上に、$\vec{t}_i$軸周りに$\theta_i(i = 1,2,3, \dots,10)$回転可能な長方形$R_i(i = 1,2,3, \dots,10)$を作成する。長方形$R_i$の寸法は、試験体に使用した部材の断面$10 \times 1.88mm$とする。長方形$R_i$を、曲線$l_a$に沿って長方形$R_{i+1}$に連続するよう回転させながら押し出し、部材の表面を形成する（図 17）。これらによって形成されたサーフェイスをS_{Arch}とする。また、S_{Arch}の断面はR_iが材軸まわりに個々に回転することでねじれのあるサーフェイスを形成することが可能となる。

3) 点q_iからS_{Arch}上で最短距離となる点を$q'_i(i = 1,2,3, \dots m)$とし、2 点間の距離$D_i = q_i q'_i$の 2 乗和をAとする（図 18）。

$$A = \sum_{i=1}^{m} (D_i)^2 \rightarrow minimize$$

Galapagos を用いて、Aを最小化するk_iの座標(x_i, y_i, z_i)と断面の角度θ_iを同時に求める。1)~3)の過程で算出されたS_{Arch}中心軸である曲線$\bar{l}_a$を 3D スキャンデータ上の部材軸とする。

4) 交差する 2 本の部材軸の距離が最小となる点を交点位置とする（図 19）。

3.2 3D 非接触計測システムによる形状計測

次に、もう一つの計測方法として、3D 非接触計測システムによる形状計測法について述べる。

3D 非接触計測システム VENUS3D R®は、試験体に貼り付けた反射マーカーの位置をカメラで捉えることで物体の形状を計測できる。カメラは赤外線を用いた複数台の高解像度カメラで構成され、計測対象を複数の方向から撮影することで、各マーカーの 3 次元座標(x, y, z)を取得することができる。本研究では、部材の幅と同直径のシールマーカーを部材の上面に貼る。図 20 のように、部材交点間の概ね中点にシールマーカーを配置し、境界支持部付近では、境界金物に接する位置に配置した。

マーカーの中心は部材軸から偏心しているため、計測点から部材厚の半分内側に移動した点を部材軸と仮定している。

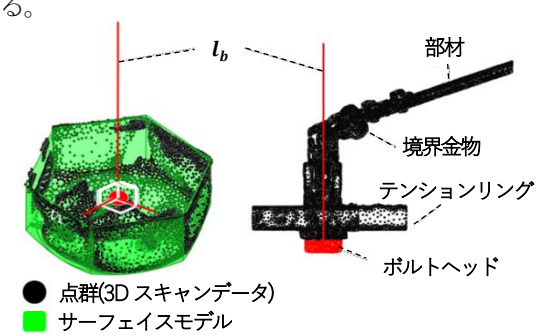


図 14 ボルトヘッド軸の定義

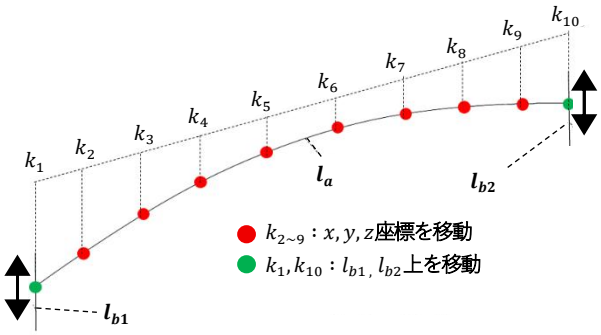


図 15 スプライン曲線の定義

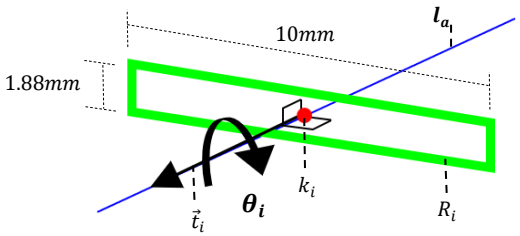


図 16 回転断面の定義

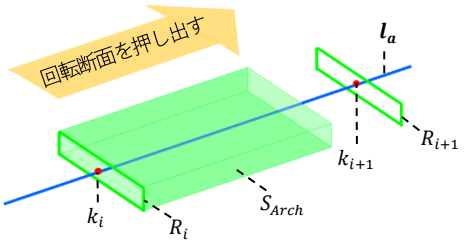


図 17 断面の押出しによるサーフェイス

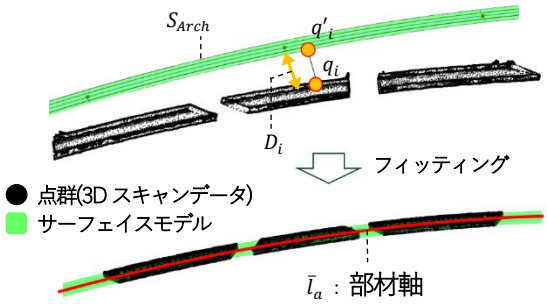


図 18 アーチサーフェイスと点群のフィット

3.2.1　マーカー座標データからの部材軸の決定

1 部材上のマーカー座標を 1 セットとし、以下の手順を全 18 本のアーチに対して繰り返し行う。

1)　マーカー座標は 0.01 秒毎に計測され、今回の計測時間は約 3 秒であるため一つのマーカーにおいて約 300 個の座標データが計測される。そのため、各マーカーの座標は約 3 秒間に計測された座標の平均値として定める。各マーカーの座標を通過点とするスプライン曲線l_vを定める。

2)　アーチ状になった部材の構面として、全通過点に最も接近した平面を Rhino+Grasshopper を用いて算出し、アーチ構面とする。アーチ構面の法線ベクトルと各通過点における曲線l_vの接線ベクトルの外積ベクトルを曲線l_vの法線ベクトル$\overrightarrow{n_v}$とする。図 21 より、各通過点を法線ベクトル$\overrightarrow{n_v}$方向に材厚の半分（$0.94mm$）だけ移動させ、移動後の点を新たな通過点としてスプライン曲線l_{v_new}を定め、部材軸とする。

3)　3D スキャンデータと同様、交差する 2 本の部材軸の距離が最小となる点を交点位置とする。

3.3　両者の比較

さらに、3D スキャン計測と 3D 非接触計測システムによる計測結果の比較を行う。評価にあたっては、各交点において、3D スキャンの測定値を始点、3D 非接触計測システムの測定値を終点とするベクトルで示す（図 22）。また、各交点での接線ベクトル、部材構面内に存在する接線ベクトルと直交するベクトル、この 2 つベクトルの外積から求まるベクトルから構成される直交座標系上で乖離ベクトルを分解し、試験体曲面の面外方向、面内方向の成分とする。その結果、面外・面内方向いずれにおいても乖離は 1 mm 以内であった（図 23）。

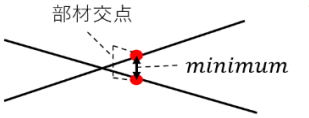


図 19 部材の交点位置

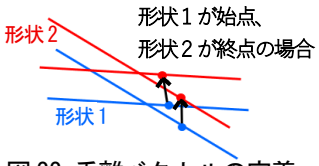


図 22 乖離ベクトルの定義

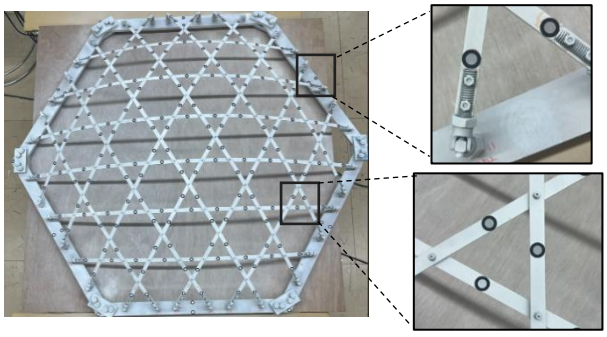


図 20　マーカーの設置位置

4　測定値と解析値の形状比較

最初に 3D スキャンデータから得られた部材軸の形状と試験体の設計に用いた解析形状の比較を行う。各交点および境界位置において、測定値を始点、解析値を終点とするベクトルで示す（図 24）。試験体の境界および頂点付近では、測定形状が解析形状より上側に位置し、それ以外の中間領域では逆になっている。ベクトルのノルムの最大値は 3.71mm であった。また、試験体の測定した部材長と設計時の形状解析で仮定した部材長を比較すると最大で 1.99mm、平均で 0.62mm の差があった。

次に、3D スキャンと 3D 非接触計測システムで計測した部材長と境界位置を用いて再度形状解析を行った。図 25,26 に測定形状と実験寸法に基づく再解析形状との比較を示す。面外方向の乖離は、3D スキャンと解析、3D 非接触計測システムと解析との比較において、それぞれ 0.85mm、0.78mm（スパン 1000 mm に対し 1/1160、1/1240）となり、1/1000 以内となった。一方、面内方向の乖離は 1.28mm、1.84mm であり、面外方向より大きい。このことから、各種誤差に対しては、釣合曲面の面外方向より、面内方向のずれの方が高い敏感性を示すと考えらえる。ここでいう各種誤差には、計測精度に起因するもの、境界部の部品の公差、施工精度に伴うものなど、複数の要因が含まれる。

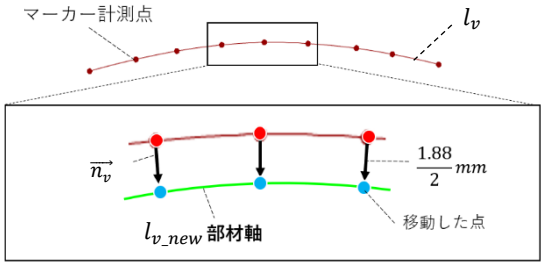


図 21　座標データの移動

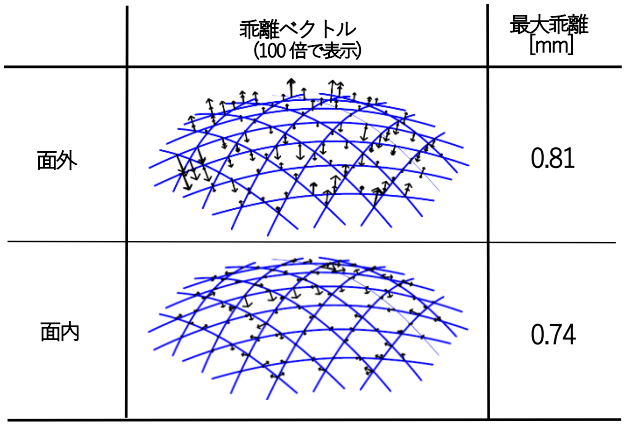


図 23　　形状比較
3D スキャンと 3D 非接触計測システム

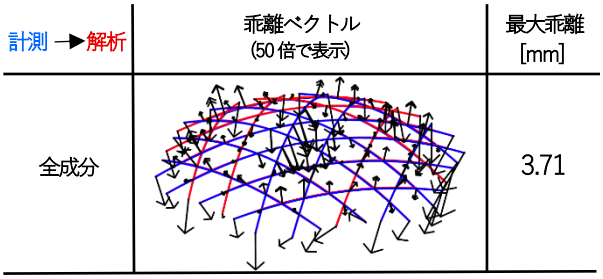


図 24　形状比較

3D スキャンと設計に用いた解析形状

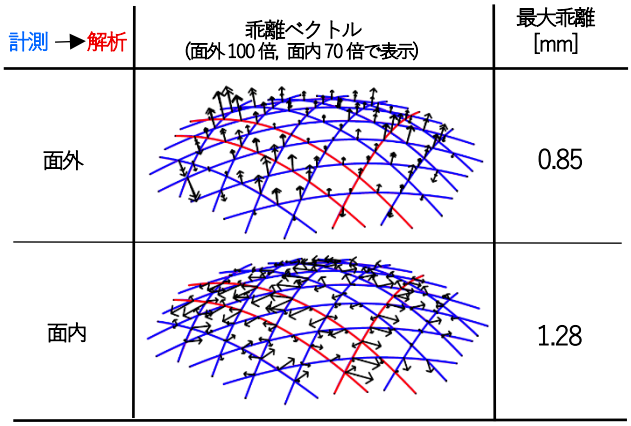


図 25　形状比較

3D スキャンと実験寸法に基づく再解析形状

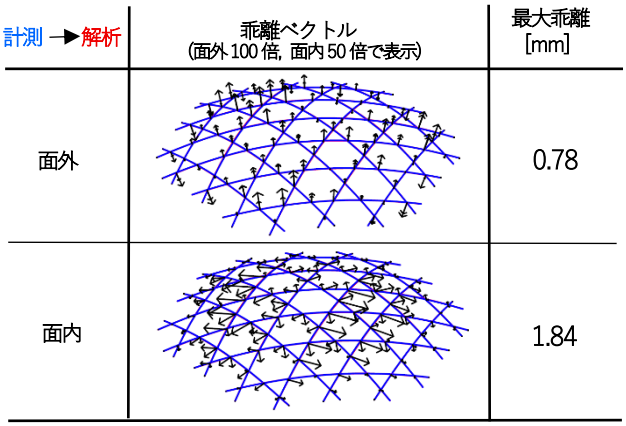


図 26　形状比較

3D 非接触計測システムと実験寸法に基づく再解析形状

6　まとめ

本研究では ASE&BSE 法の形状解析手法の有効性を検証するために、アルミニウムを用いた Bending-Active 単層籠目格子シェルを作成し、3D スキャンおよび 3D 非接触計測システムによって計測した形状と解析形状との比較を行った。概要を以下にまとめる。

1) スキャンデータに多少の乱れが含まれていても試験体の外形を捉えられていれば、3D スキャンにより得られた点群データにサーフェイスモデルをフィットさせることで、形状を精度よく同定することが可能である。
2) 測定形状と設計時の形状解析の結果との比較では、乖離が顕著であり、部材長においても平均で 0.62mm の差異が確認された。
3) 測定した部材長と境界位置を用いて、再度形状解析を行った結果、スパン 1 m に対して面外方向の乖離はそれぞれ 1/1176、1/1282 であり、測定と解析は比較的良好に一致した。

参考文献

1) E. Happold and W.I. Liddell:Timber Lattice Roof for the MannheimBundesgartenschau, The Structural Engineer, Vol.53, pp.99-135, 1975
2) R. Harris, J. Rohmer, O. Kelly and S. Johnson : Design and Construction of the Downland Gridshell, Building Research and information, Vol.31, No.6, pp.427-454, 2003
3) J. Chilton and G. Tang : TIMBER GRIDSHELLS - Architecture, structure and craft-, Routledge, 2017
4) B. D'Amico, A. Kermani and H. Zhang:Form finding and structural analysis of activity bent timber grid shells, Engineering Structures 81, pp.195-207, 2014
5) R. Mesnil, J. Ochsendorf and C. Douthe:Influence of the pre-stress on the stability of elastic grid shells, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) symposium 2013, Wroclaw.
6) 山本憲司, 中村達也, 本間俊雄：格子平板の初期曲げにより形成されるグリッドシェルの形状解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol.76, No.668, pp.1803-1812,2011
7) 白鳥寛, 山下哲郎：汎用 FEM ソフトを用いた木造三方向籠目格子シェルの形状解析と座屈解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 88 巻 809 号, pp.1145-1155, 2023-7
8) 春日拓実,山下哲郎: Bending-Active 木造籠目格子シェルの形状形成および座屈実験　その 1: 単層シェル,日本建築学会大会学術講演梗概集,2024
9) 内田亘樹, 山下哲郎 : 3D プリントされたアルミ合金製円筒ラチスシェルの軸圧縮座屈実験, 日本建築学会技術報告集, 28 巻 70 号, pp.1172-1177, 2022-10

スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法を用いたトポロジー最適化に関する基礎的検討

谷村 瑠威[1)]，眞鍋 匡利[2)]，藤井 大地[3)]
1)近畿大学大学院システム工学研究科，2533850023v@hiro.kindai.ac.jp
2)株式会社増岡組，修士(工学)，m.manabe@acm.org
3)近畿大学工学，教授，博士(工学)，dfujii@hiro.kindai.ac.jp

1 緒言

粒子法（例えばSPH法[1]，MPS法[2]）は，主に流体解析において発展してきたメシュフリー解析手法の一種である．構造問題においては，有限要素法では解析が困難な不連続体の解析や大変形問題に用いられており[3, 4, 5]，大変形解析におけるロバスト性から，幾何学的非線形性を考慮したトポロジー最適化問題[6]に対しても適用されている．Suzuki and Koshizuka[7]は，非線形弾性体を対象としたハミルトニアン粒子法を提案しており，最小二乗近似により変形勾配テンソルを求めている．Kondo et al.[8]は，Suzuki and Koshizuka[7]の手法に人工的なポテンシャルを導入することで，ゼロエネルギーモードにより生じる数値振動を抑制した．Kikuchi et al.[9]は，Kondo et al.[8]で導入された人工的なポテンシャルを修正し，人工粘性による安定化項を追加し，嚥下シミュレーションに適用している．ハミルトニアン粒子法についても，ESO法[10]に基づくトポロジー最適化問題[11, 12]へ適用されているが，数理計画法に基づくSIMP法[13]等のトポロジー最適化手法には適用されていない．

剛性問題を対象としたトポロジー最適化では，有限要素法における節点上に設計変数を配置すれば[14]，フィルタリング[15, 16]，プロジェクション[17]等の手続きにより要素に密度をマッピングすることで，連続した滑らかな材料分布が得られる．また，設計変数が節点上に定義されることで，グレースケールを許容するものの，設計変数の等値線あるいは等値面として外形形状を抽出することが容易であり，ヘビサイドプロジェクション[17]等の射影法を用いることで要素密度を2値化することも可能である．一方，有限要素法の代替手法として粒子法を用いた場合は，計算点が粒子（有限要素法における要素）中心位置のみであるため，プロジェクションの導入や外形形状の抽出が困難であった．

ところで，粒子法におけるゼロエネルギーモードにより生じる数値振動は，SPH法においては，応力を計算する粒子と運動を計算する粒子とを分離するDPD（Dual Particle Dynamics）を導入ことにより解決できる[18, 19]．ここで，応力を計算する粒子を有限要素法における要素，運動を計算する粒子を有限要素法における節点とみれば，トポロジー最適化におけるフィルタリングやプロジェクションの導入が可能となる．ハミルトニアン粒子法においても，Takekawa et al.[20, 21]は，有限差分法で用いられるスタガード格子をスタガード粒子として導入することで，応力を評価する粒子と速度を評価する粒子とを分離しているが，例題が地震波の伝播シミュレーションに限定されている．邵ら[22]は，ライスナー・ミンドリン板を対象としたハミルトニアン粒子法にスタガード粒子を導入し，厚肉シェルの面外曲げ問題に適用しているが，スタガード粒子が配置される面内方向の変形については検討されていない．

本報告では，運動を計算する粒子と応力を計算する粒子とを分離したスタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法を弾性体の準静的問題へ展開し，微小変形問題における解析精度を検証することで，トポロジー最適化問題への適用性について確認する．

なお，スタガード粒子配置のようなDPDにおいては，エネルギー保存精度については十分に検証されていないものの，本報告では減衰を考慮した準静的な問題を扱うため，エネルギー保存精度については問題としない．

2 スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法の定式化

2.1 支配方程式

動的弾性体の支配方程式は，次式で表される．

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = -\Pi\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} \tag{1}$$

Πは第1ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル，$\mathbf{F}$は変形勾配テンソルであり，ひずみエネルギー関数Wは，次式で表される．

$$W = \Pi : \mathbf{F} \tag{2}$$

ここで，第1ピオラ・キルヒホッフ応力テンソルΠは，第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル$\mathbf{S}$を用いて次式で表される．

$$\Pi = \mathbf{FS} \tag{3}$$

2.2 変形勾配テンソル

ハミルトニアン粒子法[7]では，変形勾配テンソルを重み付き最小二乗近似により求める．ただし，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法においては，運動を計算する粒子iと応力を計算する粒子jとを分離する．重み関数w_{ij}^0は，影響半径r_e内でのみ値を持つ関数として，Kikuchi et al.[9]と同様に次式で定義する．

$$w_{ij}^0 = \begin{cases} \dfrac{r_e}{\left|\mathbf{r}_{ij}^0\right|} - 1 & , \left|\mathbf{r}_{ij}^0\right| < r_e \\ 0 & , \left|\mathbf{r}_{ij}^0\right| \geq r_e \end{cases} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{r}_{ij}^0$は初期位置における粒子iと粒子jの相対位置であり，各粒子jについて，次式で定義される誤差関数e_jを最小化する．

$$e_j = \sum_i \left|\mathbf{F}_j \mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{r}_{ij}\right|^2 w_{ij}^0 \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{r}_{ij}$は現在位置における粒子iと粒子jの相対位置である．式(5)を最小化する粒子jの変形勾配テンソル$\mathbf{F}_j$は，

$$\frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{F}_j} = 2\sum_i \left(\mathbf{F}_j \mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{r}_{ij}\right) \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 = 0 \tag{6}$$

より，次式となる．

$$\mathbf{F}_j = \sum_i \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \mathbf{A}_j^{-1} \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_j = \sum_i \mathbf{r}_{ij}^0 \otimes \mathbf{r}_{ij}^0 w_{ij}^0 \tag{8}$$

2.3 構成則

サンブナン・キルヒホッフ材料を仮定すれば，粒子jの第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル$\mathbf{S}_j$は，粒子jのグリーン・ラグランジュひずみテンソル$\boldsymbol{\epsilon}_j$を用いて次式で定義される．

$$\mathbf{S}_j = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}_j + \lambda \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\epsilon}_j\right)\mathbf{I} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_j = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_j^T \mathbf{F}_j - \mathbf{I}\right) \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{I}$は恒等テンソル，μとλは次式で定義されるラメの弾性定数である．

$$\mu = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{11}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)} \tag{12}$$

2.4 時間積分法

粒子iについての運動方程式は，弾性ポテンシャルエネルギーVより次式となる．

$$m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_j \mathbf{F}_j \mathbf{S}_j \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0 \Delta B_j w_{ij}^0 \tag{13}$$

$$V = \sum_j \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_j : \mathbf{S}_j \Delta B_j \tag{14}$$

ここで，m_iは粒子iの質量，ΔB_jは粒子jの体積である．ただし，粒子iは質量を持たないため，粒子iの加速度$\partial \mathbf{v}_i / \partial t$は式(13)を変形した次式で求める．

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{\sum_j \mathbf{F}_j \mathbf{S}_j \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{r}_{ij}^0 \Delta B_j w_{ij}^0}{\sum_j \Delta B_j w_{ij}^0} \tag{15}$$

粒子iの速度$\mathbf{v}_i$と位置$\mathbf{x}_i$は，シンプレクティック性のある時間積分法により次式で更新する．

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}\right)^k \Delta t \tag{16}$$

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \mathbf{v}_i^{k+1} \Delta t \tag{17}$$

ここで，ΔtはCFL条件を満足する時間ステップである．なお，粒子jの位置$\mathbf{x}_j$は，影響半径r_eを最小粒子間距離としたときの重み関数w_{ij}^0を用いて，粒子iの位置の重み付き平均として次式で求められる．

$$\mathbf{x}_j = \frac{\sum_i \mathbf{x}_i w_{ij}^0}{\sum_i w_{ij}^0} \tag{18}$$

2.5　動的緩和法に基づく準静的解析

以上の定式化は非減衰系であるため，変位は収束しない．そこで，動的陽解法の枠組みにおいて静的な釣り合い状態を求めるために，運動減衰を用いた動的緩和法[23]を導入する．すなわち，弾性ポテンシャルエネルギーVが増加に転じたときに，すべての粒子iについて速度$\mathbf{v}_i$を0とする．この操作を変位が収束するまで繰り返すことで，静的な釣り合い状態を求める．

2.6　応力の計算

粒子jのコーシー応力テンソル$\boldsymbol{\sigma}_j$は，粒子jの第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル$\mathbf{S}_j$を用いて，次式で定義される．

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \frac{1}{J_j}\mathbf{F}_j\mathbf{S}_j\mathbf{F}_j^T \tag{19}$$

ここで，J_jは変形勾配テンソル$\mathbf{F}_j$のヤコビアンである．

$$J_j = \det\mathbf{F}_j \tag{20}$$

粒子jのフォン・ミーゼスの相当応力$\hat{\sigma}_j$は，粒子jの偏差応力テンソル$\mathbf{s}_j$を用いて次式で定義される．

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{s}_j^2\right)} \tag{21}$$

$$\mathbf{s}_j = \boldsymbol{\sigma}_j - \sigma_{mj}\mathbf{I} \tag{22}$$

ここで，σ_{mj}は次式で定義される粒子jの平均応力である．

$$\sigma_{mj} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}_j\right) \tag{23}$$

なお，粒子iのフォン・ミーゼスの相当応力$\hat{\sigma}_i$は，重み関数w_{ij}^0を用いて，粒子jのフォン・ミーゼスの相当応力$\hat{\sigma}_j$の重み付き平均として次式で求める．

$$\hat{\sigma}_i = \frac{\sum_j \hat{\sigma}_j w_{ij}^0}{\sum_j w_{ij}^0} \tag{24}$$

3　数値実装

ハミルトニアン粒子法のアルゴリズムは，プログラミング言語Fortranにより実装し，OpenMPにより並列化する．計算機は，CPU：Intel Core i9 14900K，RAM：64GBのものを使用する．スタガード粒子の生成には，オープンソースの有限要素メッシュ生成ソフトウェアGmsh[24]を用いる．Gmshにより，8節点6面体1次要素を用いた有限要素メッシュを生成し，節点iは運動を計算する粒子i，要素jは応力を計算する粒子jとして扱う．粒子jの初期位置$\mathbf{x}_j^0$は，要素j-節点iのコネクティビティ情報から，要素jを構成する節点iの平均位置とする．

4　数値例

本報告では，有限要素法による参照解と比較し，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法のトポロジー最適化問題への適用性について検証する．解析モデルは，長さ1.6m，1辺0.2mの正方形断面を持つ片持はりとし，微小変形問題として先端に1.0kNの荷重を作用させる．材料の物性値は，ヤング率:210GPa，ポアソン比:0.3，単位体積質量:7,850kg/m^{3}とする．有限要素解析には，オープンソースの有限要素法ソルバー：CalculiX[25]を使用し，要素分割は8節点6面体1次要素（C3D8）を用いたボクセル分割とする．検証項目については，剛性最大化を目的としたトポロジー最適化問題の目的関数として平均コンプライアンスが用いられることから，変位と応力を対象とする．なお，応力についてはフォン・ミーゼスの相当応力を比較対象とするが，コーシー応力テンソルを用いて定義できるフォン・ミーゼスの相当応力分布が適切であれば，トポロジー最適化問題への適用は可能であると考えられる．

4.1　要素長:40mmの場合

6面体要素の1辺の長さを40mmとした場合について検証する．このとき，節点数:1,476，要素数:1,000となる．図1は有限要素法（以下，FEM），図2はスタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法（以下，HPM）によるによる変位ベクトルノルム分布を表す．最大変位ベクトルノルムは，FEMで0.048mm，HPMで0.049mmであり，参照解との誤差は+2.1%と，良好な結果を示している．

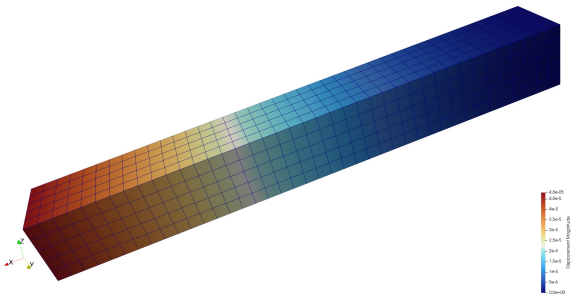


図1　変位分布（FEM:l_e=40mm）

図3はFEM，図4はHPMによるによるフォン・ミーゼスの相当応力分布を表す．フォン・ミーゼスの相当応力の最大値は，FEMで1.10MPa，HPMで0.84MPa

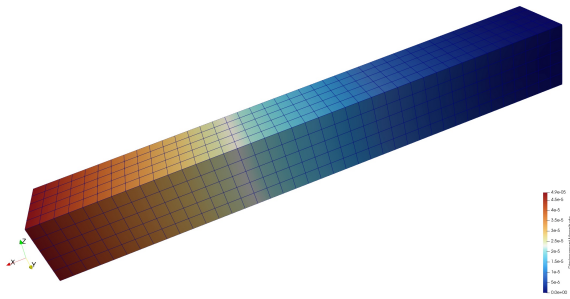


図2　変位分布（HPM:l_e=40mm）

である．参照解との定量的な誤差は大きいものの，定性的には同様の分布性状を示している．

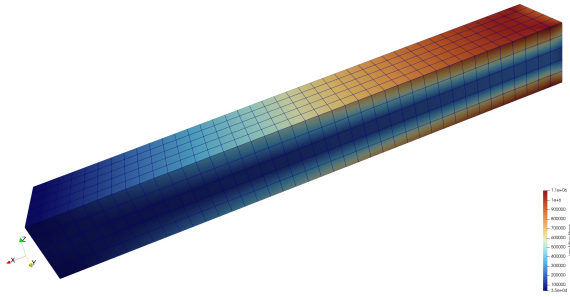


図3　ミーゼス応力分布（FEM:l_e=40mm）

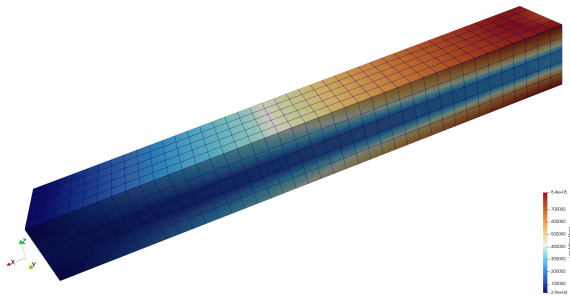


図4　ミーゼス応力分布（HPM:l_e=40mm）

4.2　要素長:20mmの場合

6面体要素の1辺の長さを20mmとした場合について検証する．このとき，節点数:9,801，要素数:8,000となる．図5はFEM，図6はHPMによるによる変位ベクトルノルム分布を表す．最大変位ベクトルノルムは，FEMで0.049mm，HPMで0.0489mmであり，参照解との誤差は−2.1%と，良好な結果を示している．

図7はFEM，図8はHPMによるによるフォン・ミーゼスの相当応力分布を表す．フォン・ミーゼスの相当応力の最大値は，FEMで1.20MPa，HPMで1.00MPaである．要素長:40mmの場合と比較して精度は向上しているものの，参照解との定量的な誤差は大きいが，定

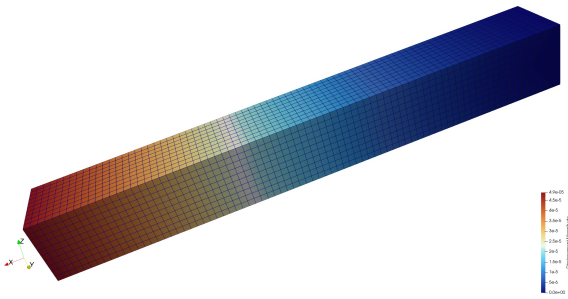


図5　変位分布（FEM:l_e=20mm）

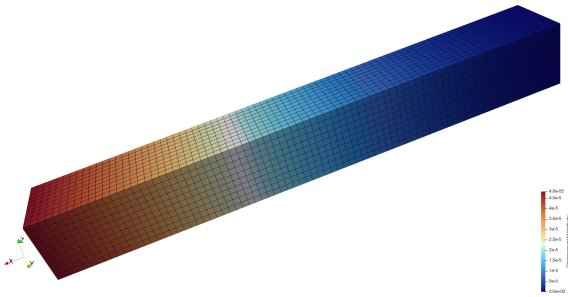


図6　変位分布（HPM:l_e=20mm）

性的には同様の分布性状を示している．

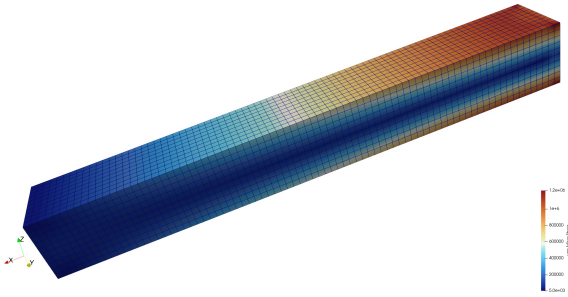


図7　フォン・ミーゼス応力分布（FEM:l_e=20mm）

4.3　考察

数値例の結果，変位ベクトルノルム分布については参照解との誤差が±2.1%と，分割数に関わらず精度良く近似できている．ただし，フォン・ミーゼスの相当応力分布については，定性的には同様の分布性状を示しているものの，定量的には誤差が大きい結果となったが，以下の要因が考えられる．有限要素法で節点のスカラー量を計算する場合は，一般的に，要素中のガウス積分点で求められたスカラー量から要素を構成する節点に外挿し，最終的に節点のスカラー量は，節点を共有する各要素から外挿されたスカラー量の平均値として求められる．しかしながら，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法においては粒子jの位置，すなわち有限要素法における要素中心位置のみ

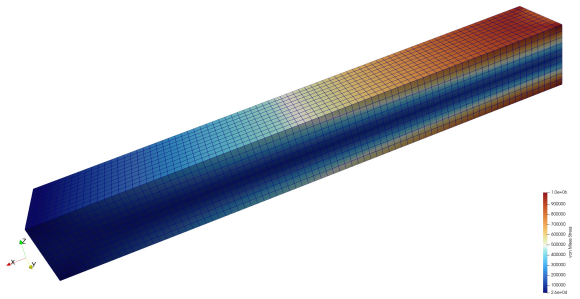


図8　フォン・ミーゼス応力分布（HPM:l_e=20mm）

にスカラー量を持つため，有限要素法における定ひずみ要素と同等の表現能となる．また，式(24)では，フォン・ミーゼスの相当応力が影響半径内で均されることも原因であると考えられる．

5　結語

本報告では，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法について，トポロジー最適化への適用性について確認した．本報告で得られた結果を以下に示す．

1. スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法を，弾性体の準静的問題に展開し，定式化を示した．
2. 微小変形問題を対象とした数値例により，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法のトポロジー最適化への適用性を検証した．その結果，変位ベクトルノルム分布については参照解との誤差が±2.1%と，分割数に関わらず精度良く近似できていることがわかった．一方，フォン・ミーゼスの相当応力分布については，有限要素法による参照解と定量的な誤差は大きいものの，定性的には同様の分布性状を示すことがわかった．

以上の結果から，スタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法はトポロジー最適化手法における有限要素法の代替手法として適用可能であると考えられる．ただし，応力制約のように応力値を定量的に評価する場合には，運動を計算する粒子位置でのスカラー量の外挿について改善が必要である．また，本報告では微小変形問題を対象としたが，今後は大変形問題についても検証し，本報告で示したスタガード粒子配置に基づくハミルトニアン粒子法をトポロジー最適化問題へ展開する．

参考文献

1）Monaghan, J. J.: An introduction to SPH, *Computer Physics Communications*, Vol.48, No.1, pp.89-96, 1988

2）Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123, No.3, pp.421-434, 1996

3）Gray, J. P., Monaghan, J. J. and Swift, R. P.: SPH elastic dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, No.49, pp.6641–6662, 2001

4）宋武燮, 越塚誠一, 岡芳明: MPS法による弾性構造体の動的解析, 日本機械学会論文集A編, Vol.71, No.701, pp.16–22, 2005

5）近藤雅裕, 越塚誠一, 鈴木幸人: 3次元MPS法弾性体解析へのシンプレクティックスキームの適用, 日本機械学会論文集A編, Vol.72, No.716, pp.425-431, 2006

6）真鍋匡利, 山田崇恭, 泉井一浩, 西脇眞二: 粒子法を用いたレベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集A編, Vol.77, No.784, pp.2054–2066, 2011

7）Suzuki, Y. and Koshizuka, S.: A Hamiltonian particle method for non-linear elastodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.74, No.8, pp.1344–1373, 2008

8）Kondo, M., Suzuki, Y. and Koshizuka, S.: Suppressing local particle oscillations in the Hamiltonian particle method for elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.81, No.12, pp.1514–1528, 2010

9）Kikuchi, T., Michiwaki, Y., Kamiya, T., Toyama, Y., Tamai, T. and Koshizuka, S.: Human swallowing simulation based on videofluorography images using Hamiltonian MPS method, *Computational Particle Mechanics*, Vol.2, No.3, pp.247–260, 2015

10）Huang, X. and Xie, Y. M.: Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications Wiley, 2010

11）藤井大地, 山下真輝, 眞鍋匡利: HMPS法とIESO法を用いた有限変形を伴う弾性構造体の位相最適

化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.84, No.764, pp.1337–1344, 2019

12）鮫島有太佳, 眞鍋匡利, 藤井大地: HMPS法とCA-IESO法を用いたコンプライアントメカニズムの形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.88, No.808, pp.938–944, 2023

13）Bendsøe, M. P. and Sigmund, O.: Topology Optimization -Theory, Methods, and Applications-, Springer, 2004

14）Matsui, K. and Terada, K.: Continuous approximation of material distribution for topology optimization *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.59, No.14, pp.1925-1944, 2004

15）Lazarov, B. S. and Sigmund, O.: Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.86, No.6, pp. 765–781, 2011

16）Kawamoto, A., Matsumori, T., Yamasaki, S., Nomura, T., Kondoh, T. and Nishiwaki, S.: Heaviside projection based topology optimization by a PDE-filtered scalar function, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.44, No.1, pp.19-24, 2010

17）Guest, J. K., Prévost, J. H. and Belytschko, T.: Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.61, No.2, pp.238-254, 2004

18）Dyka, C. T., Randles, P. W. and Inge, R. P.: Stress points for tension instability in SPH, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, No.13, pp.2325–2341, 1997

19）Randles, P. W., Petschek, A. G., Libersky, L. D. and Dyka, C. T.: Stability of DPD and SPH, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol.26, pp.339–357, 2003

20）Takekawa, J., Mikada, H. and Goto, T.: A Hamiltonian particle method with a staggered particle technique for simulating seismic wave propagation, *Pure and Applied Geophysics*, Vol.171, No.8, pp.1747–1757, 2014

21）Takekawa, J., Mikada, H. and Goto, T.: An accuracy analysis of a Hamiltonian particle method with the staggered particles for seismic-wave modeling including surface topography, *Geophysics*, Vol.79, No.4, pp.T189–T197, 2014

22）邵陽, 伊藤広貴, 柴田和也, 越塚誠一: Hamiltonian MPS粒子法によるReissner-Mindlin シェルの解析モデル, 日本計算工学会論文集, Vol. 2012, pp. 20120013–20120013, 2012

23）Papadrakakis, M.: A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.25, No.1, 1981

24）Geuzaine, C. and Remacle, J.-F.: Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.79, No.11, pp.1309–1331, 2009

25）Dhondt, G.: The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications, Wiley, 2004

アルミニウム合金による金属積層造形を用いた大変形弾性板の引張実験及び解析的研究

内田乙葉[1)]，澤田樹一郎[2)]
1) 島根大学総合理工学部建築デザイン学科，学部生
2) 島根大学総合理工学部建築デザイン学科，教授，博士(工学)

1 はじめに

金属積層造形は近年，急速な発展を遂げ，従来の切削加工や鋳造技術では困難であった複雑形状や軽量構造の実現を可能にしている．特に，設計自由度が飛躍的に向上しており，形状や内部構造の最適化が可能となる．それに伴い，性能の最適化につながる点が注目される．さらに，チタン合金，アルミニウム合金，ニッケル基合金，ステンレス鋼など多様な金属材料の選択肢がある点も大きな利点であり，用途や要求性能に応じた最適な材料設計を可能としている．これにより，航空宇宙分野や医療分野などにおいて，個別ニーズに応じた精密な製品の提供が可能な革新的技術として期待されている[1][2]．

一方で，建築分野における金属積層造形の応用は，他分野と比較してまだ発展途上にあるが，自由度の高い構造デザインや省資源化を実現する手法としてその技術の必要性は高まっている．加えて，従来の加工法では実現が難しい複雑な部材や軽量化と高強度を両立した部材の研究開発において，金属積層造形は効果的なアプローチとなり得る．本研究では金属積層造形によって作製した“大変形弾性板”という部材を対象に，引張実験及び解析的研究を行う．さらに，切断加工によって作製された部材との比較を通じてその加工依存性について言及することを目的とする．

2 “大変形弾性板”とは

大変形弾性部材とは，鋼板を特殊な形状に切断加工し弾性限を拡大した部材である．この部材を建物の内部に方杖状に組み込むことにより，建物の残留変形の低減が期待される．また，部材の厚さは5.0㎜~6.0㎜程度の薄型かつ平面的な形状であるため、構造的制約を受けにくく多様な構造物に組み込めるという利点もある．地震後の使用継続性や早期復旧性といった観点より，地震後の構造体の残留変形を最小限にとどめる設計が求められるなか，金属の弾性復元力を利用した新たな地震応答低減部材として大変形弾性板に関する研究が精力的に行われている[3]-[11]．本部材は，鹿児島大学より 2015 年に特許出願，2017 年に特許公開されているが査定申請されていないため，現在この技術は誰のものでもない[12]．図 1 に大変形弾性板のモデルを示す．

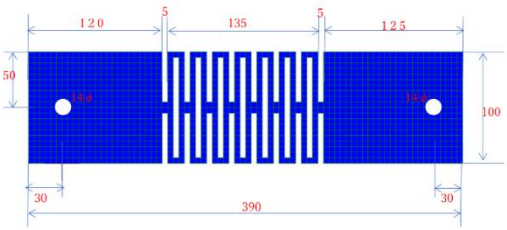


図 1 大変形弾性板モデル

3 研究目的

先行研究では，大変形弾性板の弾性限を拡大させることを目的として，鋼材に代わりアルミニウム合金を用いた事例が報告されている[10][11]．従来は切断加工によってこのような部材の製作が行われてきたが，本研究では大変形弾性板を金属積層造形によって実現し，引張実験及び解析的研究を行うことで，アルミニウム合金における力学的特性や変形挙動がどのように変化するかを明らかにすることを試みる．さらに，加工手法の違いが部材性能に及ぼす影響を検討し，建築分野における金属積層造形の有効性と適用可能性を評価することを目的とする．

4 大変形弾性板の試験体モデル

本来であれば，従来と同一寸法の部材を金属積層造形によって再現することが望ましい．しかしながら，造形に要する費用や造形装置の積層条件等の制

約を考慮し，本研究では縮小モデルとして従来部材の 7 つの矩形変形部を一つの矩形変形部に変更した．さらに部材厚さを 10 mm とした条件で製作を依頼した．図 2 に金属積層造形により作製した大変形弾性板のモデルを示す．さらに図 3 に金属積層造形により作製した大変形弾性板を示す．

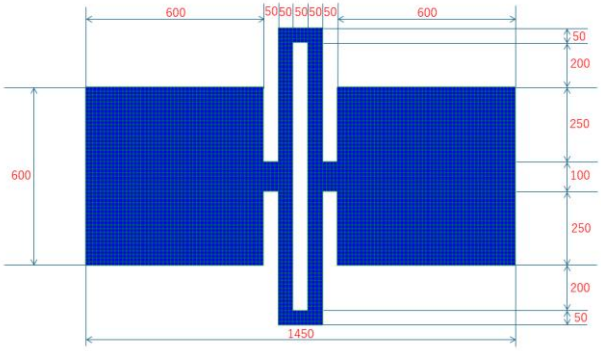


図 2 大変形弾性板モデル

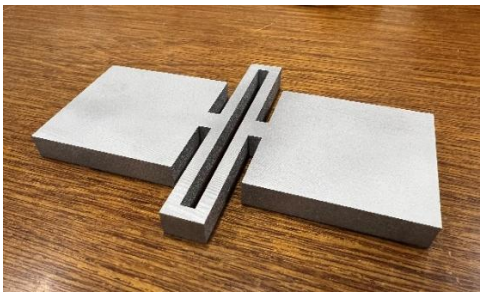


図 3 金属積層造形により作製した大変形弾性板

金属積層造形に使用された機器は EOS M 290(株式会社 NTT データ ザムテクノロジーズ製品)であり，使用材料は AlSi10Mg である．AlSi10Mg は，アルミニウムを主成分とする鋳造用軽量合金であり，優れた鋳造性と機械特性を有している．金属積層造形においても適応性が高く，複雑な形状の製品の製造にも高い寸法精度を実現する．

5 引張実験

5.1 引張実験概要

引張実験は島根大学建築構造実験室内の万能試験機に設置して行われた．万能試験機を図 4 に示す．なお，部材の素材特性を表 1 に示す．なお，部材の素材特性はミルシートより値を引用した．



図 4 万能試験機

5.2 引張実験手順

1. 試験体の寸法を計測する．
2. 万能試験機に試験体を設置する．
3. 万能試験機の動作確認終了後，引張実験を実施する．荷重(N)及び変形(mm)は、万能試験機に内蔵するヘッド間距離の計測値をデータロガで読み取る．
4. 試験体の変形限界まで載荷した後，徐荷を行う．
5. 安全が確認された後，試験体を取り出す．
6. 入手したデータからグラフを作成し弾性限の比較を行う．

ただし，剛性が初期剛性の 10%低下した点を弾性限と定義する．試験体の設置状況を図 5 に示す．

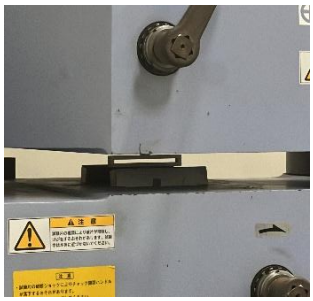


図 5 試験体設置状況



図 6 引張実験中の試験体

表 1 部材の素材特性

ヤング係数(MPa)	70000
単軸降伏応力(MPa)	225
ポアソン比	0.34
破断伸び(%)	11
試験体厚さ(mm)	10

5.1 引張実験結果

図 7 は試験体の荷重変形関係を示す．横軸は変形（mm），縦軸は荷重（N）を示す．図 6 中の赤色プロットは，本実験で推定された弾性限を示す．また図 8 は引張実験後の試験体の様子を示す．さらに表 2 は引張実験での弾性限の結果を示す．得られた知見を以下に示す．

（1）弾性限荷重は 480N，弾性限変形は 1.000 mm であった．

（2）引張実験中，荷重 940N，変形 12.56 mm程度で試験体の破断が確認された．破断した試験体は対角線状に亀裂が進展していることを確認した．この破壊形態は，試験体に生じた曲げ変形の影響に起因するものだと考えられる．すなわち，曲げ応力の集中により応力分布が不均一となり，対角線方向に沿って亀裂が進展した結果，破断が誘発されたと推測される．

（3）引張実験中，試験体の曲げ変形が確認された．試験体に曲げ変形が加わった要因として，試験体つかみ部における滑りの発生，あるいは低い剛性に起因する影響が考えられる．

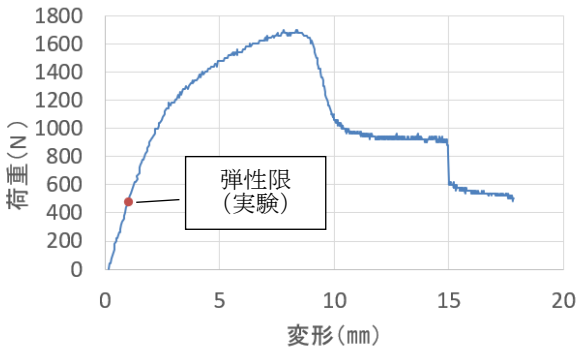


図 7 荷重変形関係

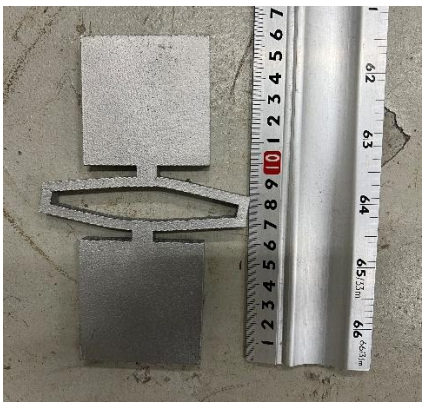


図 8 引張実験後の試験体

表 2 引張実験結果

弾性限荷重(N)	480
弾性限変形(mm)	1.000

6 FEM 解析

6.1 FEM 解析概要

厚さ 10mm の 4 節点要素モデル（平面応力状態を仮定）の大変形弾性板モデルを作成し，1.25mm×1.25mm の正方形を 1 要素として分割した．右向き方向を X 軸，上向き方向を Y 軸，奥行き方向を Z 軸としている．尚，大変形弾性部材を柱梁接合部に組み込むことを想定しているため Y，Z 方向をそれぞれ固定し，X 方向に右向きの荷重 1000N を右端部節点に均等に分散させて加えた．解析および弾性限算定のための素材特性は表 1 を引用している．LISA 解析画面を図 9 に示す．

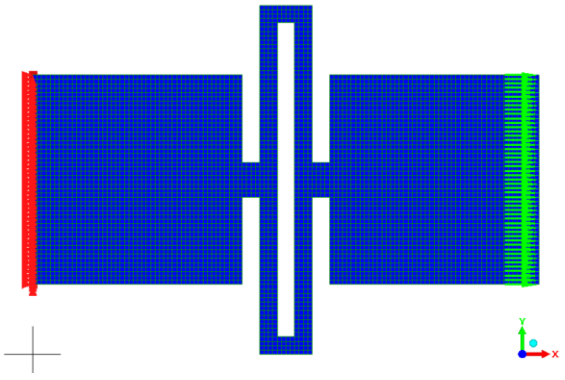


図 9 LISA 解析画面

6.2 FEM 解析結果

図 10，11 は Lisa による FEM 解析結果を示す．尚，画像右方向が X 軸，縦方向が Y 軸，奥行き方向が Z 軸と定義する．そして，荷重 1000N 時の Von Mises 応力及び X 軸方向の変形量の結果から，いずれかの要素が Von Mises 応力の最大値が Mises 降伏条件一杯となる状態を弾性限として，弾性限荷重及び弾性限変形を算出した．表３はその算定結果を示す．解析結果より，弾性限荷重は 749N，弾性限変形は 0.925 ㎜であった．

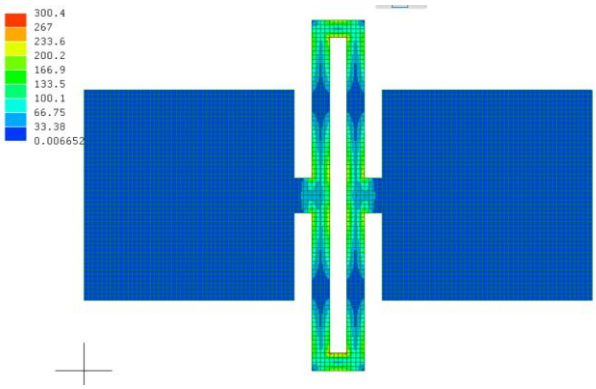


図 10 Lisa 解析結果(Von Mises Stress)

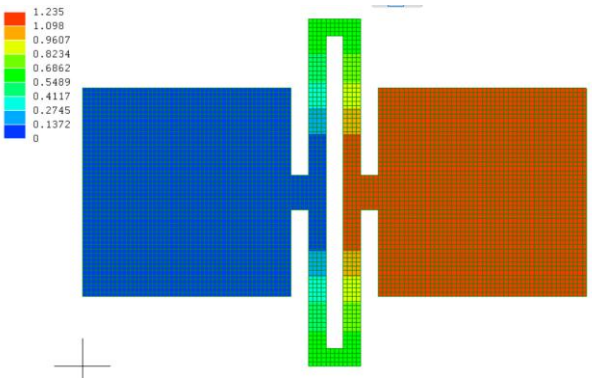


図 11 Lisa8.0 解析結果(Displacement in X)

表 3 LISA による弾性限の算定結果

弾性限荷重(N)	749
弾性限変形(mm)	0.925

7 引張実験結果と FEM 解析結果の比較及び考察

図 12 は引張実験と FEM 解析の弾性限をプロットした荷重変形関係を示す．実験値の弾性限を赤色プロット，解析値の弾性限を緑色プロットで示している．また，表 4 は実験値と解析値の弾性限の比較結果を示す．表 4 より，弾性限荷重の差は-269N，弾性限変形の差は+0.075mm であった．引張試験結果と有限要素解析結果を比較したところ，弾性限における変形挙動には大きな差は認められなかったものの，荷重については引張実験値が解析値より 269N 小さく算出された．この要因として，実験中に確認された試験体の曲げ変形の影響が考えられる．一方．FEM 解析では境界条件が理想化されており，試験体つかみ部の滑りや曲げ，破断の影響を受けないため，材料の特性に基づいた純粋な引張挙動が反映され，その結果として実験値より大きな荷重が算出されたと推察される．

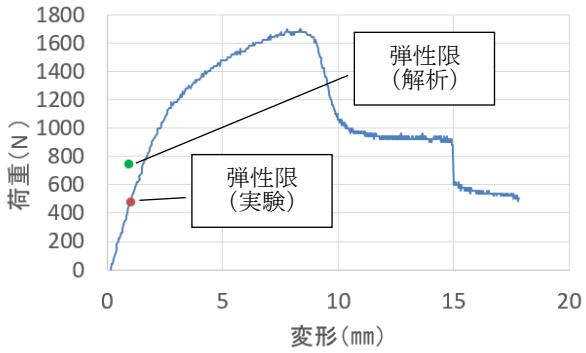


図 12 実験値及び解析値の弾性限を含む荷重変形関係

表 4 実験値と解析値の弾性限の比較

	①実験値	②解析値	差(①-②)
弾性限荷重(N)	480	749	-269
弾性限変形(mm)	1.000	0.925	+0.075

8 加工依存性について

これまで，切断加工により製作した大変形弾性板について引張実験及び FEM 解析による弾性限の推定が行われている．本章では，この知見を基盤として，切断加工による弾性限弾性板（図 1）と金属積層造形による大変形弾性板（図 2）の解析値による弾性限について比較する．ただし，金属積層造形による大変形弾性板は製作上，変形部が切断加工によ

る大変形弾性板の７つの矩形変形部を一つの矩形変形部に変更した．そのため，線形弾性領域を前提に測定された変形量を７倍して比較する．なお，変形部の寸法はどちらも同じである．さらに，切断加工による大変形弾性板の素材はA7075P，金属積層造形による大変形弾性板の素材はAlSi10Mgと素材が異なるが，本章では単純に弾性限について比較することを目的としている．それぞれの素材特性を表５に示す．素材特性はミルシートより引用している．表６に弾性限荷重の比較を示す．また表７に弾性限変形の比較を示す．

表５ 各素材特性

	A7075P（切断加工）	AlSi10Mg（金属積層造形）
単軸降伏応力(MPa)	486	225
ヤング係数(MPa)	70000	70000
ポアソン比	0.34	0.34
破断伸び(%)	15	11
厚さ(mm)	5	10

表６ 加工手法による弾性限荷重(N)の比較

	弾性限荷重(N)
③切断加工	807.6
④金属積層造形	749.0
差（③-④）	+58.6

表７ 加工手法による弾性限変形(mm)の比較

	弾性限変形(mm)
③切断加工	13.820
④金属積層造形（補正後）	6.475
差（③-④）	+7.345

表６より，切断加工材と金属3Dプリンタ材の弾性限荷重を単純に比較したところ，両者の値はほぼ同等であった．ただし，切断加工材の方がわずかに高い弾性限荷重を示した．降伏応力・破断伸びでは切断加工材が圧倒的に有利であるが，弾性限荷重だけを見ると，両者はほぼ同等である．この結果は，切断加工材と金属積層造形材では，単軸降伏応力度が約２倍異なる一方，両者の厚さも5mmと10mmと２倍異なっているため，結果として荷重に差はなかったと考えられる．

一方，表７より切断加工材と金属積層造形材の弾性限変形を単純に比較したところ，切断加工の部材が金属積層造形の部材の約２倍を示した．この差は単軸降伏応力が，切断加工材と金属積層造形材とでは約２倍の差があり，さらにヤング係数は同じであるため，結果として素材の弾性限ひずみも２倍異なったと考えられる．

9 結論

本研究では，アルミニウム合金による金属積層造形を用いた大変形弾性板の引張実験及びFEM解析、そして試験体の加工依存性について考察した．本研究から得られた知見を以下に示す．

(1)引張実験について

・弾性限荷重は480N，弾性限変形は1.000㎜であった．

・引張実験中，荷重940N，変形12.56㎜程度で試験体が破断した．破断した試験体は対角線状に亀裂が進展しており，試験体に生じた曲げ変形の影響に起因するものだと考えられる．

・引張実験中，試験体の曲げ変形が確認された．試験体に曲げ変形が加わった要因として，試験体つかみ部における滑りの発生，あるいは低い剛性に起因する影響が考えられる．

(2)FEM解析について

・弾性限荷重は749N，弾性限変形は0.925㎜であった．

(3)引張実験値とFEM解析値の比較について

・弾性限荷重の差は-269Nと解析値の弾性限荷重が大きく，弾性限変形の差は-0.075mmと実験値の弾性限変形が多少大きい結果であった．弾性限における変形挙動には大きな差は認められなかったものの，荷重については引張実験値が解析値より269N小さく算出された．この要因として，実験中に確認

された試験体の曲げ変形の影響が考えられる．一方，FEM 解析では境界条件が理想化されており，試験体つかみ部の滑りや曲げ，破断の影響を受けないため，材料の特性に基づいた純粋な引張挙動が反映され，その結果として実験値より大きな荷重が算出されたと推察される．

(4)加工依存性について

・切断加工材と金属 3D プリンタ材の弾性限荷重を単純に比較したところ，両者の値はほぼ同等であった．この結果は，切断加工材と金属積層造形材では，単軸降伏応力度が約 2 倍異なる一方，両者の厚さも 5mm と 10mm と 2 倍異なっているため，結果として荷重に差はなかったと考えられる．

・切断加工材と金属 3D プリンタ材の弾性限変形を単純に比較したところ，切断加工の部材が金属積層造形の部材の約 2 倍を示した．この差は単軸降伏応力が，切断加工材と金属積層造形材とでは約 2 倍の差があり，さらにヤング係数は同じであるため，結果として素材の弾性限ひずみも２倍異なったと考えられる．

謝辞：

本研究プロジェクトは，JST による高大連携事業「島根大学グローバルサイエンスキャンパス」の活動の一環として行われました．また，本研究にご協力いただきました島根大学総合理工学部建築デザイン学科影山結様，梶谷奎伍様，廣山幸樹様，玉井佑佳様，NGUYEN TRAN THI HONG NHUNG 様，技術専門職員 坂本和博様に深く感謝申し上げます．

参考文献

1) 京極秀樹：金属積層造形の可能性と技術開発動向，ミニ特集「Additive Manufacturing(付加製造)の医療応用への展開と現状」，57 巻，4 号 p. 140-144，2018

2) 楢原弘之：３次元金属積層造形におけるレーザ焼結プロセスの可視化と高機能金型製造への応用，天田財団助成研究成果報告書，31 巻，2018

3) 西田銀次，中村建人，澤田樹一郎：大変形弾性部材の性能実験及び解析的研究，鋼構造年次論文報告集，第 24 巻，2016.11

Ginji NISHIDA, Kento NAKAMURA, Kiichiro SAWADA: Analytical and Experimental Studies on Large Deformable Elastic Members, Proceeding of Constructional Steel, Vol.24, 2016.11

4) 中村建人，西田銀次，澤田樹一郎：大変形弾性部材を有すると門型鋼構造骨組の地震応答性状，鋼構造年次論文報告集，第 24 巻，2016.11

5) 岸添将至，澤田樹一郎：大変形弾性部材をブレースとして組み込んだ鋼構造骨組の地震応答，鋼構造論文集，第 27 巻，第 105 号，pp. 53-59，2020.

6) Md Harun Ur Rashid, Shingo KOMATSU and Kiichiro SAWADA : PERFORMANCE OF OPTIMIZED LARGE DEFORMABLE ELASTIC PLATES UNDER TENSILE LOAD. Journal of Structural Engineering, Vol.71B, April 2025.

7)澤田樹一郎：大変形弾性板のトポロジー最適化，日本建築学会構造系論文集，第 85 巻，第 771 号，pp. 683-692，2020. 5

8) Sawada, K et.al. : A Study on Multi-Objective Optimization of Large Deformable Elastic Plates. Buildings 2022, 12, 1323.

9) Deb, K.; Pratap, A.; Agarwal, S.; Meyarivan, T.A. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Trans. Evol. Comput. 2002, 6, 182-197.

10) 内田乙葉，廣山幸樹，澤田樹一郎：最適設計された大変形弾性合金板の引張実験，19 回コロキウム構造形態の解析と創生 2024 講演論文

11) 内田乙葉，澤田樹一郎：最適設計された大変形弾性合金板の圧縮実験，18 回コロキウム構造形態の解析と創生 2023 講演論文

12) 発明者：澤田 樹一郎ほか、出願人：国立大学法人鹿児島大学、「耐震性向上用弾性部材、耐震性向上用構造体、及び耐震性向上用弾性部材の製造方法」、特願 2015-218453、特開 2017-089714

建築計画・構造性能を考慮した複合分野の最適化問題
—室配置及びブレース配置を組み合わせた設計の提案—

橋口詩芳 [1)]，横須賀洋平 [2)]
1)鹿児島大学大学院理工学研究科工学専攻建築学プログラム，大学院生，k4210901@kadai.jp
2)鹿児島大学大学院理工学研究科工学専攻建築学プログラム，准教授・博士(情報科学)

1 はじめに

建築設計においては、計画・構造・環境の各分野を統合する設計過程が必要であり、建築設計における最適化問題は、各分野の性能を考慮した複合分野の最適化問題(以下、複合最適化と呼ぶ)に置き換えられる。各分野の制約条件を満足しつつ、目的関数に応じた解を導くことで、あらかじめ設計者の意思を比較的反映した良好解を、選択肢として提示できる。これにより、合理的な設計の提案が期待される。本研究では、オフィスビルを想定した建築計画における室配置最適化問題を対象とし、ブレース部材を加えた平面プランを層として重ね、構造性能を考慮しつつ、単目的最適化問題を解くことを目的とする。室配置問題とは、建物の空間と用途を表す室の関係性から室配置における総移動コストを目的関数とする最適化問題である。この空間及び室の数理モデルは、グラフ理論を採用する。また、立体骨組みの解析モデルに構造解析を実行することで算出する層間変形角、偏心率をブレース配置が影響する構造性能として評価する。最適化手法には遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm：GA)を用いる。本稿では、桁行方向×梁間方向において、4×3のスパン割りとし、8 室の室配置、鋼構造骨組みモデルを対象とした複合最適化の数値結果を示す。

2 グラフ理論

グラフ理論は点と線で接続関係を表す数理モデルである。本稿では図 1 に示すとおり室を点、隣接関係を線で表現する。

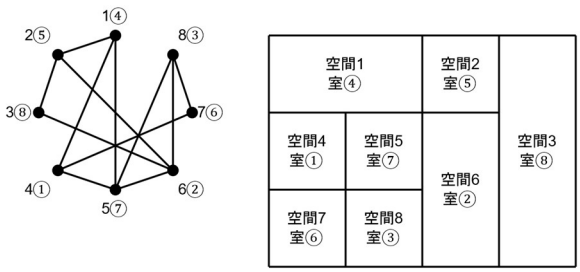


図 1　室, 空間隣接グラフ及び割り当て関係図

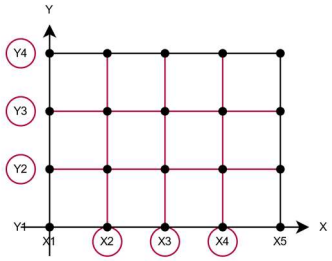


図 2　耐震ブレースを配置する候補位置

3 遺伝的アルゴリズム

GA は最適化手法のうち、発見的手法に分類され、大域的な最適解を探索することができる手法の一つである。解の 1 つ 1 つの個体を遺伝子と呼び、これらの遺伝子に対して選択、交叉、突然変異と呼ばれる GA オペレータを複数世代繰り返す。これにより最適な目的関数値に近い解を探索するアルゴリズムである。

4 空間配置パターンの列挙

X,Y 通りの 1 スパンで囲われた部分を区画と定義する。空間配置パターンは次の条件に従い、列挙する。

1) すべての通り芯において、外形の線を除く、区画の辺上(図 2 の赤線部分)に配置される耐震ブレースの有無でパターンを列挙する。
2) 空間隣接グラフは異なったものとなるが空間番号の並べ方のみが異なる場合は同一配置とみなす。
3) 上下左右の線対称性は同一配置とみなす。
4) 対角線の線対称性は異なる配置とみなすが、他の配置と重複するものは除く。

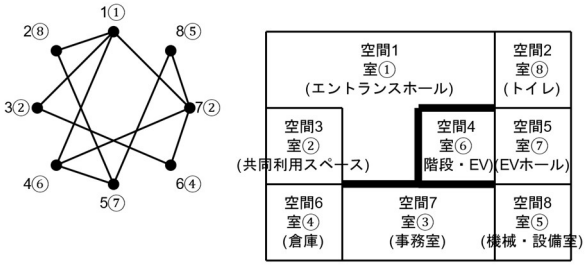


図 3　空間配置の一例

5)　外形は長方形とする。

以上の条件から、4×2 スパンにおいて 8 室の空間を構成する空間配置パターンは 680 種類列挙することができた。図 3 に空間配置パターンの例を示す。

5　ブレース部材を考慮した複合最適化問題の定式化

5.1　複合最適化問題の定式化

複合最適化問題の定式化は次式で与えられる。

$$Find \quad \mathrm{P} \tag{1}$$

$$to\ minimize \quad f(\mathrm{P})=\sum_{\alpha=1}^{5}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{r}C_{ki}(\mathrm{P})D_{mj}(\mathrm{P})x_{ki}x_{mj}x_{ij}x_{km}\right)\right) \tag{2}$$

$$subject\ to \quad x_{ij}=x_{km}\ (i=k, j=m) \tag{3a}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ (j=1,...,p) \tag{3b}$$

$$\sum_{j=1}^{p}x_{ij}=1,\ (i=1,...,n) \tag{3c}$$

$$x_{ij}, x_{km}, x_{mj}, x_{ki} \in \{0,1\} \tag{3d}$$

ここで、P：設計変数ベクトル(通り芯、配置パターン、ブレース配置)、α：任意の階における層番号、i：室番号、j：空間番号、x_{ij}：室 i—空間 j 割り当て関係行列、x_{ki}：室隣接行列、x_{mj}：空間隣接行列、x_{km}：室 k—空間 m 割り当て関係行列、C_{ki}：室移動コスト行列、D_{mj}：空間移動距離行列、n,p,q,r：室数及び空間数、n：空間の接続本数である。式(2)で示すとおり、目的関数値 f(P)はこれらの行列の内積で求められる。なお、1/2,1/n の係数は各々、重複する ij,km の添え字を除外し、接続本数による目的関数の変動を抑制する意味を持つ。図 3 の配置を参照して、それぞれの行列を以下に示す。

1)　室—空間割り当て関係行列(x_{ij},x_{km})

空間に割り当てられた室の番号に対応する行列の要素が 1 となり、他は 0 となる。

ここで、空間に対して室を割り振る際に、より実際の設計過程に近づけるために、共用部やオフィスの貸出部など室の用途をもとにクラスタリングを行う。本研究では、あらかじめ指定したクラスタ数に分類することができる k-means 法を採用している。初めに各データに対してランダムにクラスタを割り当て、各クラスタの中心を計算する。その後、クラスタの中心と各データの距離をもとに、最も近いクラスタに割り振りを更新する。ここでは、データとして各空間の重心の座標を用いる。これらの操作を繰り返すことで空間に対するクラスタリングを行う。これらの空間に対するクラスタをあらかじめ設定した室用途のクラスタに割り当てることで、室—空間割り当て関係を決定する。

$$\left[x_{ij}\right]=\left[x_{km}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{4}$$

2)　室隣接行列、空間隣接行列(x_{ki},x_{mj})

頂点 k と頂点 i が隣接しており、n 個の頂点を持つ室隣接グラフにおいて 2 頂点を結ぶ辺数を s としたとき、n 行 n 列の対称行列となる。すなわち、k 行、i 列の要素は e_{ki}=e_{ik}=s である。これらの定義に基づき、以下のとおり各行列を表現することができる。本稿では s=1 とする。

$$\left[x_{ki}\right]=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\left[x_{mj}\right]=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\end{bmatrix} \tag{6}$$

3)　室移動コスト行列(C_{ki})

隣接する室同士の移動の頻度を任意の数値で設定しており、値が大きいほど移動が頻繁であることを意味する。8 室の 1 階、基準解の例をそれぞれ示す。

1 階

$$\left[C_{ki}\right]=\begin{bmatrix}0&1&0.7&0.5&0.5&0&1&0.7\\1&0&0.5&0.3&0.3&0&0.7&0.5\\0.7&0.5&0&1&0.3&0&0.7&0.5\\0.5&0.3&1&0&0.3&0&0.5&0.3\\0.5&0.3&0.3&0.3&0&0&0.3&0.3\\0&0&0&0&0&0&1&0\\1&0.7&0.7&0.5&0.3&1&0&0.5\\0.7&0.5&0.5&0.3&0.3&0&0.5&0\end{bmatrix} \tag{7a}$$

基準階

$$[C_{ki}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.7 & 0 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 1 & 0.7 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

4) 空間移動距離行列(D_{mj})

各空間において代表となる区画を定め、その代表区画間における最短経路問題(shortest path problem)として定式化する。本研究では、この最短経路問題を解く手法としてダイクストラ法(Dijkstra's algorithm)を用いて経路を決定し、マンハッタン距離を用いて評価する。

・代表区画の決定

各空間において外形の中心から最も遠い区画を代表区画として選定する。ただし、室の用途として EV ホールである空間の場合は外形の中心から最も近い区画を代表区画とする。

・最短経路問題

最短経路問題とは、重み付きグラフの 2 点間の重みが最小となる最適化問題である。重み付きグラフとは、点と線の集合で構成されるグラフのうち、各線に距離や時間の重みが設定されたグラフのことである。ここで、与える重みは室間の移動コストを基準とする。本研究では最短経路問題における代表的なアルゴリズムであるダイクストラ法を用いる。この手法では、グラフの出発点と到着点が与えられたとき、出発点からすべての点に対して最短経路を求めることができる。各点へ至る経路のうち直前の点を記憶することで、到着点から出発点への逆向きの経路を求める。図 3 の配置では通過する移動経路は図 4 のようになる。

・マンハッタン距離

各代表区画の中心点同士のマンハッタン距離を算出

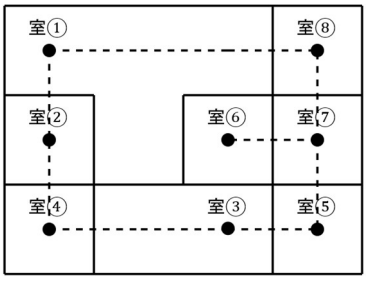


図 4 通過する移動経路

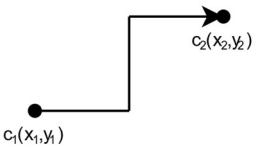


図 5 マンハッタン距離

する。ここで、実際の空間間の移動を考慮し、異なるクラスタ間の移動においては、共用部として EV ホールが配置された空間を経由して移動すると仮定して計算する。出発点、到着点をそれぞれ $c_m(x_m,y_m)$, $c_j(x_j,y_j)$とし、マンハッタン距離は図 5 をもとに次式で求められる。

$$d_{mj}=\left|x_j-x_m\right|+\left|y_j-y_m\right| \quad (8)$$

$$[D_{mj}]=\begin{bmatrix} 0 & 40 & 8 & 40 & 32 & 64 & 48 & 40 \\ 40 & 0 & 48 & 16 & 8 & 40 & 24 & 16 \\ 8 & 48 & 0 & 48 & 40 & 72 & 56 & 48 \\ 40 & 16 & 48 & 0 & 8 & 40 & 24 & 16 \\ 32 & 8 & 40 & 8 & 0 & 24 & 16 & 8 \\ 64 & 40 & 72 & 40 & 24 & 0 & 16 & 40 \\ 48 & 24 & 56 & 24 & 16 & 16 & 0 & 24 \\ 40 & 16 & 48 & 16 & 8 & 40 & 24 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

5.2 ブレース部材の配置

ブレース部材の配置方法を以下に示す。室配置の用途として階段・EV が配置される空間において、EV ホールと接する部分を除く 3 か所に、ブレース部材を必ず配置する。さらに図 6 の赤太線で示すように、最短経路の導出の過程で経路として通らなかった壁の位置を追加配置候補とし、その中からランダムで 1 か所配置する。これを設計変数として加えることで、室間の移動経路と構造性能として評価する偏心率の制約を両立した最適な位置に配置されることが期待される。なお、ブレースは 1 箇所ごとに X 字状に配置する。

5.3 制約条件

本研究では、オフィスビルを想定した設計提案を行うため、式(3a)～式(3d)の室配置最適化問題の制約条件に加えて以下の制約条件を与える。

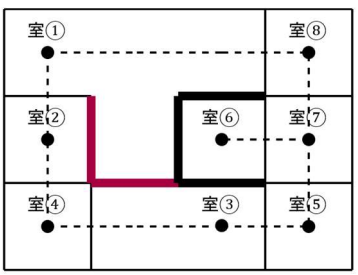


図 6 移動経路によるブレース配置候補

・面積制約

クラスタごとの室の用途に応じて、空間の面積と必要面積の差を制約条件とする。用途及び必要面積は表 1 と図 7 のように設定する。クラスタは色分けして区別して示す。なお、本研究ではビルやマンションなどの延べ床面積に対する賃貸面積の占める割合(レンタブル比)を70%とし、この基準に基づき基準解における必要面積を設定している。この制約条件を式(10)と定義する。

$$subject\ to \qquad -\beta \bar{A}_i < B_{ij} < \beta \bar{A}_i \qquad (10)$$

ここで、$B_{ij} = A_j - \bar{A}_i$：クラスタごとの面積差、A_j：クラスタごとの空間面積、$\bar{A}_i$：クラスタごとの必要面積、β：面積差の増減率である。$\bar{A}_i$は図 7 に示す基準解から算出し、増減率は本研究ではβ=0.2 とする。

・縦動線の考慮

建築計画として 5 階建てのオフィスビルを想定しているため､2 から 5 階の基準階は同一の配置パターンとし、1 階のみ異なる配置パターンとした。ここで、縦動線を考慮するために、室用途を階段・EV とする空間の位置は 1 階と基準階で同一の位置に配置するようにしている。また、室用途を EV ホールとする空間についても、同じクラスタに属するため、空間間の移動を同じ方向になるように 1 階と基準階で同一の位置に配置する。

・構造制約

構造性能の評価指標としてブレース配置の影響を受ける層間変形角、偏心率を用いる。層間変形角は式(11)、偏心率は式(12)に示すように、それぞれ 1/200 以下及び 15/100 以下とする。ここでの i は層を表す。

$$subject\ to \qquad \theta_{i\max} \le \frac{1}{200}, R_e \le \frac{15}{100} \qquad (11,12)$$

6. 解析条件

本稿では表 2 の設計変数、表 3 の構造条件、表 4 の各種諸量、図 8 の解析のフローから解析モデルを作成し、表 5 の GA パラメータを用いて最適化を行う。基準のスパン長さを設定し、通り芯の座標を設計変数として扱い、変化させることでスパン長さを決定する。

表 1　8 室の各室用途と必要面積(㎡)

	1 階	必要面積	基準階	必要面積
①	エントランス ホール	208	執務室 1	208
②	共同利用 スペース	128	会議室 1	64
③	事務室	144	執務室 2	208
④	倉庫	48	会議室 2	64
⑤	機械・ 設備室	64	休憩・ 給湯室	48
⑥	階段・EV	48	階段・EV	48
⑦	EV ホール	80	EV ホール	80
⑧	トイレ	48	トイレ	48
合計面積				768

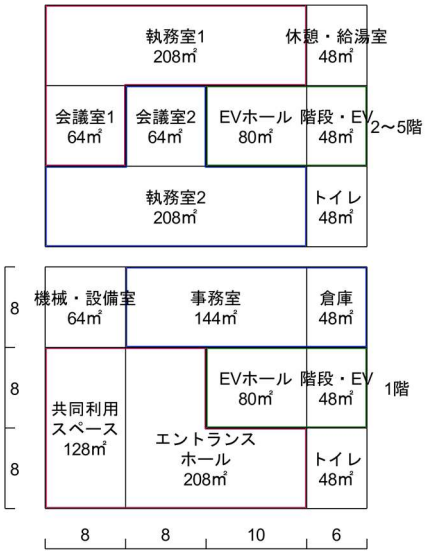


図 7　基準解とする室用途と必要面積

表 2　設計変数(4×3)

	8 室
$P_{X,Y}$：通り芯座標	$P_{X2}, P_{X3}, P_{X4}, P_{Y2}, P_{Y3}$ $(0.0 \leqq P_{X,Y} \leqq 4.0)$
P_s：空間配置	680 種類
P_b：ブレース配置	移動経路による

表 3　構造条件

屋根荷重	$7.1 kN/m^2$
床荷重	$5.4 kN/m^2$
外力方向	X,Y 方向
階高	$3.5m$
層数	5 層

表 4　各種諸量

	寸法(mm)	断面積 (cm^2)	断面二次 モーメント(cm^4)	
柱 角型鋼	400×400 ×22	316.0	$I_Y = I_Z$	
			73000	
梁 H 形鋼	600×300 ×14×23	217.1	I_Y	I_Z
			134000	10600
ブレース H 形鋼	150×150 ×7×10	39.65	I_Y	I_Z
			1620	563

表 5　GA パラメータ

個体数 100	世代数 1000	遺伝子長 16bit	突然変異率 0.2
選択方式 トーナメント 方式	エリート 保存数 5 個体	交叉方式 二点交叉	交叉率 0.6

7. 数値結果と考察

本稿では、複合最適化の数値結果について 3 回試行を行った結果を示す。図 9 に 8 室のブレース配置を考慮した複合最適化における目的関数値の遷移、図 10 に室配置図、曲げモーメント図、評価した構造性能の数値をそれぞれ示す。また、表 6 に初期個体をランダムに 100 個生成した場合の許容解の割合を示している。室配置図には各スパン長さ、空間の用途と面積、色分けしたクラスタを示し、黒太線はブレースが配置される位置を表している。評価した構造性能の数値結果から、最大層間変形角が 1/200 以下、偏心率が 15/100 以下であることが確認され、ブレース配置が影響する構造性能の制約を満足している。

表 6 の許容解の割合から、図 8 の赤枠で示すような本研究における制約条件を満足する許容解は、非常に少ないことが判る。最適化における解析時間短縮につながることから、制約条件の緩和や適当な最適化手法の検討が必要であると考える。

図 9 の目的関数値の遷移から try2, try3 に比べて try1 の目的関数値が大幅に小さくなっていることが判る。これは、移動の際に経由する EV ホールが長手方向である X 軸方向に広く、隣接空間との接続本数が多いことが主な要因として考えられる。この結果から、室配置の移動コストに共用部として設定した EV ホールが移動コスト低減に効果的に機能していると示唆される。

図 10 に示す室配置図から、上下の縦動線と、設定したクラスタごとの必要面積の制約条件を満たしていることが判る。ランダムに配置されるブレースの傾向としては、1 階と基準階で左右の均衡がとれた配置や、建物の中心付近に近い配置が見られ、偏心率による構造制約がブレース配置に影響を及ぼしていることが示唆される。また、周囲にブレースを必ず配置することとした階段・EV の位置についても、建物中央付近に配置される傾向があり、室配置問題にも影響を与える結果が得られた。本稿では面積制約を考慮する際の、面積の増減率を 0.2 として設定している。これによりクラスタごとに必要面積より増加した部分を、共用の廊下として扱うことが可能となっている。

一方で、設定した必要面積や室移動コストなどに基づく目的関数の数値上では良好な解であっても、実際の設計過程においては適さない部分を含む室配置が得られていることが判った。これにより、さらなる制約条件の導入が必要であることが示唆された。しかしながら、本研究の目的である「設計者の意思をある程度反映しつつ、制約条件を満たす良好解の列挙」は達成できたといえる。

8. まとめ

本稿では、ブレース配置を考慮した複合最適化の数値結果を示した。今後の課題としては、室の形状に対するアスペクト比の考慮や、給排水設備の縦動線の考慮、さらには多様な制約条件を想定したうえでの、最適化手法の再検討が挙げられる。また、本稿で用いた建築計画性能を主とした目的関数に加え、構造性能を主とした目的関数の導入を行い、各分野の重み付けの検討を通じて、多目的最適化へ発展させる。

参考文献

1) 寺田秀夫 : 室空間の隣接関係により定義された長方形分割図を求める方法について―室空間の配置計画のための分析と統合の方法に関する研究(その 1)―, 日本建築学会計画系論文報告集, 414 号, pp. 69-80, 1990
2) 三井和男, 大崎純, 大森博司, 田川浩, 本間俊雄 : 発見的最適化手法による構造のフォルムとシステム, 計算工学シリーズ 4, コロナ社, pp. 19-32, 2004
3) 加藤直樹, 大崎純, 谷明勲 : 建築システム論, 造形ライブラリー03, 共立出版株式会社, pp. 66-67, 2002
4) 今村萌絵, 横須賀洋平 : 構造性能を考慮した室配置最適化―4 室のフロアプランによる鋼構造骨組みモデル―, 第 44 回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集, pp. 315-318, 2021 年 12 月, 京都
5) 太田利彦 : 動線計画の数学的解析(第 1 報), 日本建築学会論文報告集, 第 69 号, pp.293-296, 昭和 36 年 10 月
6) 宗本晋作, 加藤直樹, 今村元一 : 直行グラフ描画法を用いた室配置手法―タブー探索法を用いた対話型多目的最適化―, 日本建築学会計画系論文集, 529 号, pp.276-286, 2000
7) 国土交通省国土技術政策総合研究所, 国立研究開発法人建築研究所 : 2015 年版 建築物の構造関係技術基準解説書 2016 年追補収録版, 平成 29 年 10 月

表 6　許容解の割合（100 個体中の割合）

	許容解	非許容解
1 階面積制約	7%	93%
基準階面積制約	2%	98%
層間変形角、偏心率	1%	99%

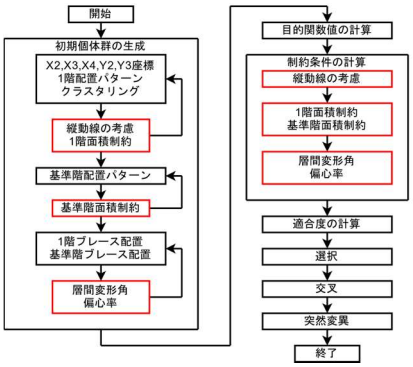


図 8　解析のフロー

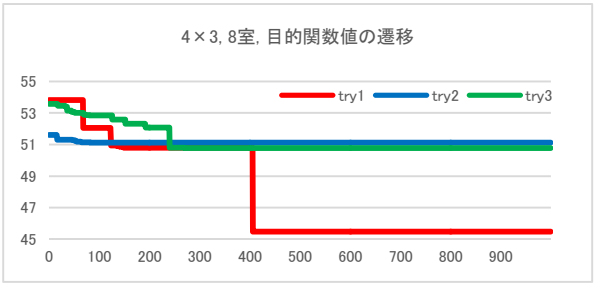
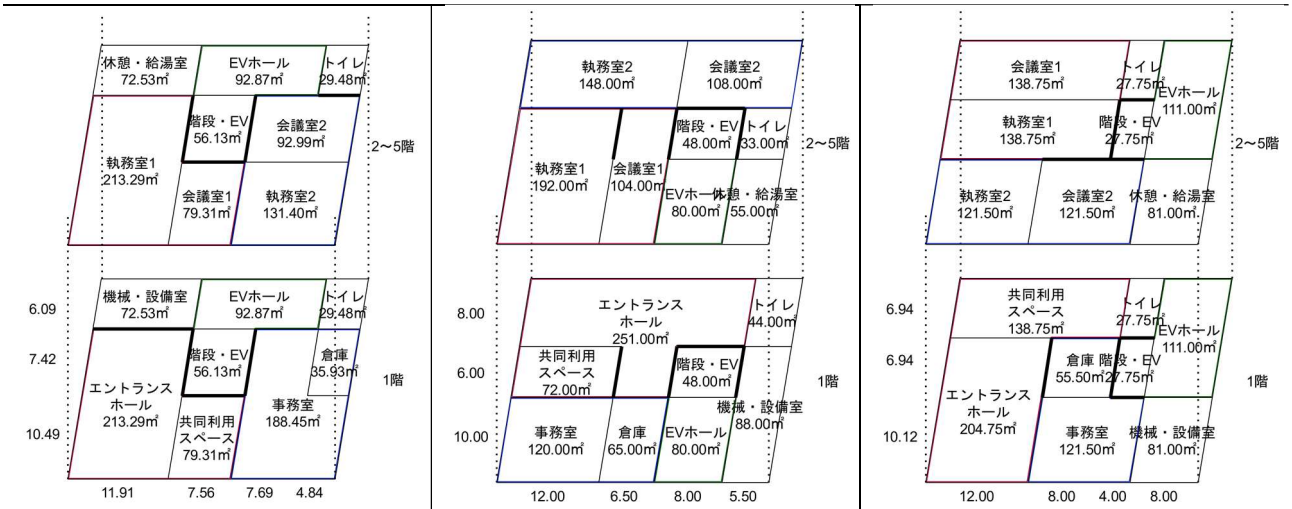


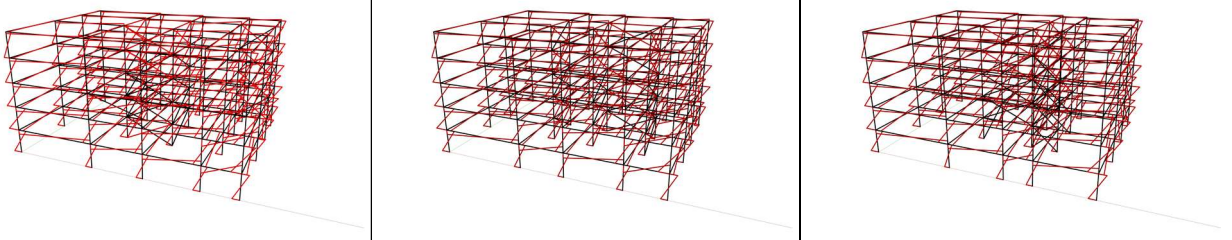
図 9　目的関数値の遷移



室配置図
$f(P)$= 45.4879

室配置図
$f(P)$= 51.1175

室配置図
$f(P)$= 50.7750



M 図(kNm)
最大値：784.4 kNm

最大層間変形角：0.00268 (rad)

各階の偏心率 R_{eX}, R_{eY}
[0.1313, 0.1487, 0.1490, 0.1374, 0.1130]
[0.0619, 0.0663, 0.0402, 0.0192, 0.0041]

M 図(kNm)
最大値：866.8 kNm

最大層間変形角：0.00275 (rad)

各階の偏心率 R_{eX}, R_{eY}
[0.0973, 0.1104, 0.1158, 0.1120, 0.1232]
[0.1461, 0.1360, 0.1003, 0.0669, 0.0271]

M 図(kNm)
最大値：791.0 kNm

最大層間変形角：0.00331 (rad)

各階の偏心率 R_{eX}, R_{eY}
[0.1062, 0.0559, 0.0462, 0.0503, 0.0656]
[0.0770, 0.0948, 0.0785, 0.0673, 0.0542]

try1	try2	try3

図 10　ブレース配置を考慮した複合最適化結果

曲線折りテセレーションの巨視的曲げの解析

河井友宏 1)，舘知宏 2)
1)東京大学工学部建築学科，学部生
2)東京大学総合文化研究科広域科学専攻，教授，工博

1. はじめに

折紙は、その立体構造が持つ剛性から、軽量のコア材料[1]や折板屋根、変形できる機構が展開構造[2]や可動構造[3]などの建築を含む工学応用が探求されてきている。特に、同じパターンを繰り返し配列した「折紙テセレーション」は、それを構成する単位の状態に注目することで全体の曲面としての巨視的な振る舞いを理解することができるという点で設計・制御に優れており、ミウラ折りや吉村パターン、レッシュパターンなど、その変形状態や機械的な特性に関して研究が盛んに行われている[4]。

これまで主に研究されてきたのは、平面パネルとそれらを繋ぐヒンジによって折紙をモデル化する「剛体折紙」によるテセレーションである。剛体折紙の場合、あるパターンを作るためには非常に多くの折り目を必要とし、これが大きな課題である。

そこで本稿で注目したいのは折り線を曲線として、シートの弾性曲げを造形に応用する、「曲線折り紙」によるテセレーションである。曲線折り紙は、剛体折り紙と比べて少ない折り目で複雑な形状を作れること、また曲線が持つ美しさや構造的な合理性などから、これまでドーム型の構造物[5]や橋[6]、エネルギー吸収のためのチューブ[7]やサンドイッチパネルのコア[8]などさまざまな応用の提案がなされている。

これらの応用では、一つの折り線パターンから、単一の形状を作ることを前提とした設計がなされているが、曲線折り紙の大きな特徴として、同一の展開図からさまざまな形状に変形できることも知られている。この現象は、曲面を構成する直線要素「ルーリング」が曲面の曲げ具合によってなめらかに変化できることに由来する（図１）。

このような特徴から、曲線折り紙は必要に応じて形状を変化させて使う適応的な可変構造物としての有用性が期待できるものの、このルーリングの可変性に焦点を当てた構造の探索はまだなされてきていない。そこで本論文では曲線折り紙による折紙テセレーション「曲線折りテセレーション」を取り上げ、ルーリングが変化することで実現される曲げ変形について、その数理を明らかにし、設計・制御の手法を論じる。

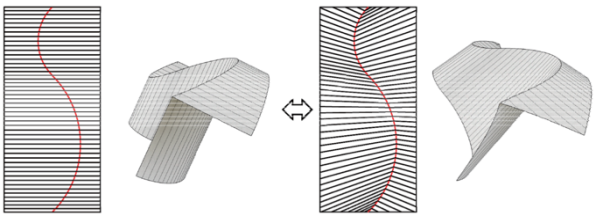


図１　曲げ変形によるルーリングの連続的変化[5]

本論文では、まず第二節でMundilova[9]らによる曲線折り紙のルーリングに着目した解析手法について整理した上で、第三節で実際にその手法を曲線折りテセレーションに適用し、その解として新規の曲面変形の存在を明らかにする。また、第四節では第三節で明らかにした変形状態を計算する方法について取り上げる。

2. 曲線折り紙の基礎理論

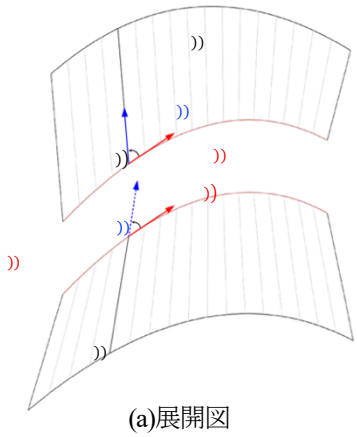
紙のように伸び縮みしない素材を平面から曲げてできる曲面は可展面と呼ばれる。可展面は線織面の一種であり、直線要素「ルーリング」の運動として表現できる。曲線折り紙は、複数の可展面が折り線によって接続され、その接続を保ったまま平面に展開できるものである。

本研究で問題とするのは展開図の情報、具体的には各折り線についてその関数形$y = f_i(x)$が与えられたとき、その曲線上の弧長パラメータsを用いて、適合するルーリング角$\theta_{iR}(s)$、$\theta_{iL}(s)$（曲線の接線と左右のルーリングのなす角度）および、半折り角（折り角の半分）$\varphi(s)$の関数形を得ることである。

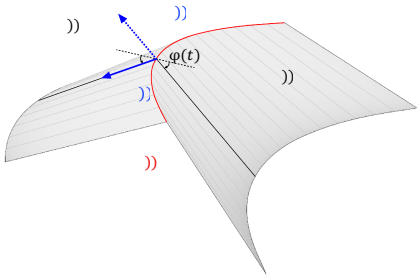
これらの関数が得られれば、折り状態における曲線の曲率と捩率が得られることが知られており、フレネ標構を積分して3D状態の折り線$\boldsymbol{X}(s)$を構築できる。したがって、最終的に折り上がった曲面を線織面として

$$\boldsymbol{S}(s,\varphi) = \boldsymbol{X}(s) + u(s)\boldsymbol{R}(s,\varphi) \qquad (1)$$

の形で表現することが可能である。ここで、$\boldsymbol{R}(s,\varphi)$は3D状態のルーリングベクトル、$u(s)$はルーリングの長さで



(a)展開図



(b)折り状態

あり、展開図とルーリング角と半折り角の情報から構築可能である。

曲線折り紙の特徴である連続的な形状変化はこの二つの量$\theta_{iR}(s)$、$\theta_{iL}(s)$および$\varphi(s)$が曲げ具合に応じて様々な形をとることに対応している。今回折り線が複数存在し、それらの間がルーリングで結ばれることから、$\theta_{iR}(s)$、$\theta_{iL}(s)$を陽に扱う代わりに、複数の折り線を共通のパラメータtを用いて表すことで折り線同士をつなぐルーリングの対応を表現する（図２）。具体的には折り線iの弧長$s_i = s_i(t)$の関数形を変えることでルーリングの入り方を変えることが表現できる。半折り角$\varphi = \varphi(t)$の関数形を変えることは折紙の折れ具合を変えることに対応している。ただし、$s(t)$と$\varphi(t)$は独立ではなく、互いに可展条件

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}s'(t)k(t)(\cot\theta_L(t) + \cot\theta_R(t))\tan\varphi(t) \qquad (2)$$

で紐づけられている。ここで、曲率$k(s)$は展開図における折り線の曲率である。ルーリングの入り方、すなわち弧長$s(t)$の関数形が既知の時には、この微分方程式から$\varphi(t)$がわかり、諸関係式から曲面の式を求めることができる。つまり、曲線折り紙の折り状態を記述する上では$s(t)$と$\varphi(t)$をパラメータtの関数として求めることが本質的に重要である。以降特に注意のない限り、曲率のように弧長の関数として$k_i(s_i(t))$などと表されるものについては、単に$k_i(t)$と表すことにする。

曲線折りテセレーションのように複数折り線がある場合には各折り線周りで可展な面を構成した後、それを貼り合わせるという考え方をするため、(2)に相当する式に加え、貼り合わせる（共有される）面同士でルーリング曲率

$$V(t) = s'(t)k(t)\tan\varphi(t)\frac{1}{\sin\theta(t)} \qquad (3)$$

が等しくなるという条件が二つの折り線の間に挟まれた曲面の数だけ拘束式として生じる。各折り線に関して$s(t)$と$\varphi(t)$を求めるためには(2)に対応する可展条件と(3)に対応する貼り合わせの条件を全ての折り線と曲面に関して集約した連立微分方程式を解くことになる。そのため、複数の折り線を持つ曲線折り紙を解析することは折り線の数が増えていくほど難しくなる。また、ほとんど全ての曲面に関してルーリングの情報が既知でなければ、未知関数の数に対して方程式の数が不足し、系の状態を決定することができない。

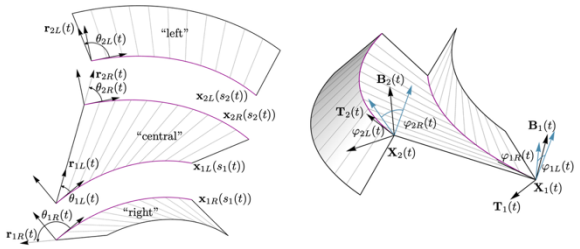


図３　二つの折れ線と三つの曲面を持つ曲線折り[9]

例えば、図３のような二つの折り線を持つ三つの曲面で構成された曲線折り紙では、

$$s_2'(t) = -s_1'(t)\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\frac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)}\frac{\tan\varphi_1(t)}{\tan\varphi_2(t)}$$
$$\varphi_1'(t) = \frac{1}{2}s_1'(t)k_1(t)(\cot\theta_{1L}(t) + \cot\theta_{1R}(t))\tan\varphi_1(t) \qquad (4)$$
$$\varphi_2'(t) = -\frac{1}{2}s_1'(t)k_1(t)\frac{\sin(\theta_{2L}(t) + \theta_{2R}(t))}{\sin\theta_{1L}(t)\sin\theta_{2L}(t)}\tan\varphi_1(t)$$

のように三式を連立して解くことになるが、未知関数は$s_i(t), \varphi_i(t)\ (i = 1,2)$の計四つであるのに対して方程式が三つと一つ不足しているため、一関数を自由に設定できるだけの高い自由度の解がある。次の設計問題では、この自由度を拘束する周期的境界条件を与える。

3.　曲線折りテセレーションの設計

以降は曲線折りテセレーションの一例として、振幅の異なる二種類の正弦曲線を交互に並べてそれ折り線とした展開図を扱う。

この展開図は折り紙テセレーションの一種である。すなわち、図４で示されているモジュールを規則的に並べることで展開全体を再構成することができる。この展開図を一様におる場合について、満たすべき関係式を整理したのち、その折り状態を計算していく。

3.1　パラメータの設計

まず展開図を定義する（図４）。

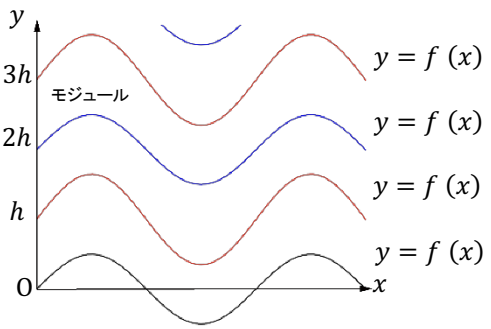


図４　展開図と座標系の設定

図の点Oを原点としてxy平面を考える。下からi番目の曲線（上下端の曲線も含む）を$f_i(x)$として、奇数番目の振幅を1、偶数番目の振幅をa、曲線を並べる間隔をhとして、それぞれ整数mを用いて

$$f_{2m+1}(x) = f(x) + (2m+1)h \tag{8.1}$$

$$f_{2m}(x) = g(x) + 2mh \tag{8.2}$$

と表すことにする。ここで

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = af(x) = a\sin x \tag{9}$$

である。ただしhに対してaを大きく取りすぎると、折り線同士が交差してしまうので、交差しないように

$$h + 1 > a \tag{10}$$

を満たす範囲でaとhを定める。ルーリングは隣り合う曲線上の点を結んでできる直線であるから、状態を定める量としてその点の弧長$s_i(t)$の代わりに、その点のy軸からの距離$d_i(t)$を採用することができる。そこで以降は$d_i(t)$の関数形を考える。

3.2　折り状態の計算

ここでは一様な折りを考え、周期的境界条件として「偶数番目の曲面同士、奇数番目の曲面同士が合同になる」という条件を加える。これは「一つおきに曲面のルーリングの入り方が同じ」という条件と等価である。この十分条件として、y軸からの距離d_iに関して

$$d_i(t) = d_{i+2}(t) \tag{11}$$

を用いると、

$$d_1(t) = d_{2m+1}(t),\ d_2(t) = d_{2m}(t) \tag{12}$$

なる$d_1(t), d_2(t)$の二つの関数のみで全体のルーリングを表せる。また、曲面が合同であることから、その境界にある折り線も合同である。したがって、曲面同士の間の半折り角$\varphi_i(t)$も整数mを用いて

$$\varphi_1(t) = \varphi_{2m+1}(t), \varphi_2(t) = \varphi_{2m}(t), \tag{13}$$

なる$\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$の二種類のみで代表できる。

以上よりこの展開図の折り状態を定める関数は$d_1, d_2, \varphi_1, \varphi_2$の四つであり、それらを拘束する式は整理すると

$$s_2'(t) = -s_1'(t)\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\frac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)}\frac{\tan\varphi_1(t)}{\tan\varphi_2(t)} \tag{14.1}$$

$$\frac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)} = \frac{\sin\theta_{2L}(t)}{\sin\theta_{1R}(t)} \tag{14.2}$$

$$\varphi_1'(t) = \frac{1}{2}s_1'(t)k_1(t)(\cot\theta_{1L}(t) + \cot\theta_{1R}(t))\tan\varphi_1(t) \tag{14.3}$$

$$\varphi_2'(t) = -\frac{1}{2}s_1'(t)k_1(t)\frac{\sin(\theta_{2L}(t) + \theta_{2R}(t))}{\sin\theta_{1L}(t)\sin\theta_{2L}(t)}\tan\varphi_1(t) \tag{14.4}$$

の四つとなる。なお$s_i(d_i(t))$などは単に$s_i(t)$と表記されている。未知関数と方程式の数が釣り合っているので、この系は適切な初期条件のもとで状態を決定することができる。ここで以下の同値変形を行った：

$$\begin{cases} s_2'(t) = -s_1'(t)\dfrac{k_1(t)}{k_2(t)}\dfrac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)}\dfrac{\tan\varphi_1(t)}{\tan\varphi_2(t)} \\ s_2'(t) = -s_1'(t)\dfrac{k_1(t)}{k_2(t)}\dfrac{\sin\theta_{2L}(t)}{\sin\theta_{1R}(t)}\dfrac{\tan\varphi_1(t)}{\tan\varphi_2(t)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_2'(t) = -s_1'(t)\dfrac{k_1(t)}{k_2(t)}\dfrac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)}\dfrac{\tan\varphi_1(t)}{\tan\varphi_2(t)} \\ \dfrac{\sin\theta_{2R}(t)}{\sin\theta_{1L}(t)} = \dfrac{\sin\theta_{2L}(t)}{\sin\theta_{1R}(t)} \end{cases}$$

初期条件として、$d_1(0) = d_2(0), d_1(\pi) = d_2(\pi)$ を用いる。これは符号の異なる折り線どうしは、同じ向きに凸なルーリングで結ばれる必要がある[10]ため、変曲点どうしはルーリングで対応するからである。

四つの拘束式のうち(14.2)はd_1, d_2のみを含む関係式であり、この式を整理すると、

$$(d_1 - d_2)(f'(d_1) - g'(d_2)) = 0 \tag{15}$$

が得られる。第一因数が 0 となる場合と、第二因数が 0 となる場合の二種類のルーリングに対応する解が得られる（図５）。

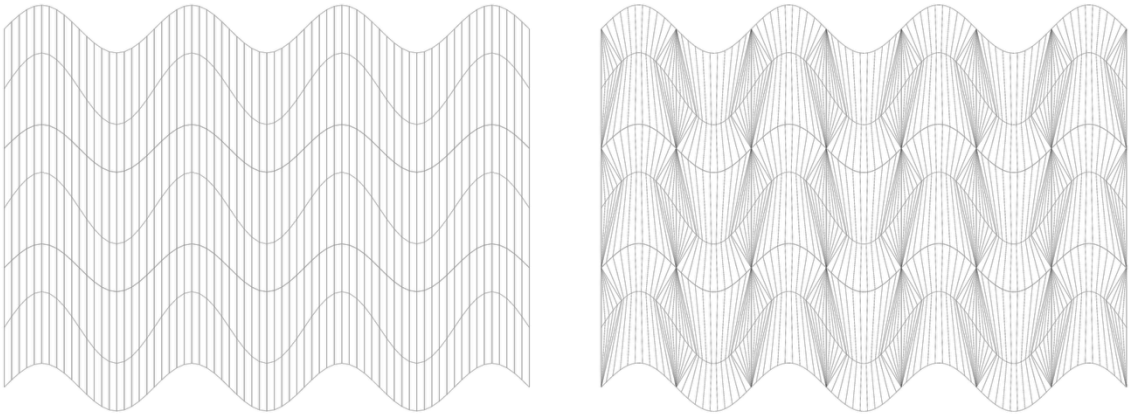


図５　$a = 1.5, h = 2.5$の時のそれぞれの解に対応するルーリング。左 : $d_1 = d_2$、右 : $f'(d_1) = g'(d_2)$

3.2.1　$d_1 = d_2$: ルーリングが平行な解

$d_1 = d_2$に対応するパターンではすべてのルーリングが平行に並び、曲面はy軸方向を軸として曲がる。このパターンは「平行ルーリング」と呼ばれ、この時折り線は平面曲線になる。つまり、柱面をある平面に関して鏡映反転した曲面が現れる。この時、鏡面に全て平行かつ、ルーリングに直交するベクトルが存在する場合は剛ルーリング折り可能（ルーリングを保って剛に変形可能）であることが知られている[11]。今回得られた解はその性質を満たし、剛ルーリング折り可能である。

3.2.2　$f'(d_1) = g'(d_2)$:接線が平行な解

$f'(d_1) = g'(d_2)$に対応するパターンでは、接ベクトルが一致するような折り線上の点を結んだ線がルーリングとなり、この時、曲面はx軸方向を軸として曲がる。このパターンは「接線平行ルーリング」と呼ばれる。ここで注意すべきは、振幅の大きい方の曲線の変曲点まわりで「錐ルーリング」が生じることである。錐ルーリングとは、錐面の頂点が折り線上に位置するルーリングのことである。これが生じるのは、変曲点の周りでは対応する接ベクトルが取れない領域が生じ、またルーリングは交わることが許されないために、ルーリングを作る曲線上の点の一方が変曲点に集中するからである。錐面の頂点では、折り線が空間上で折れ曲がった状態になる[10]。具体的には接線平行ルーリングを取れるのはモジュールで考えると

$$\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{a} & \text{if } a \geq 1 \\ \arccos a & \text{if } a < 1 \end{cases} \qquad (16)$$

の範囲に限られていて、それ以外の範囲は錐ルーリングが現れる。

この条件の下ではφの初期値を自由に与えても矛盾なく全ての変数が定まることから、このパターンも剛ルーリング折り可能であることが確認できる。

4.　コンピュータ上でのビジュアライズ

剛ルーリング折り可能な曲線折りの連続変形はパネルを適切に離散化することで剛体折紙の問題として解くことができる。特に今回の場合、展開図の周期性からその折り状態を計算することは実質的に$2 \times n$の剛体パネルを計算することと等価である。そこで本稿では前節までに求めたルーリングについて、まず、パネルの離散化を行い、次にその離散パネルについて Rhinoceros + grasshopper 上で折り状態を計算して、ビジュアライズする。

4.1　パネルの離散化

対応する離散パネルを考える時には、式(15)の関係を満たすように作る（図６）。つまり、$d_1 = d_2$の場合はそのまま$d_1 = d_2$を満たす点が離散パネルの頂点に、$f'(d_1) = g'(d_2)$の場合は、中央の接線平行ルーリングの部分はその点における接線同士の交点が離散パネルの頂点に、変曲点まわりの錐ルーリングの部分は曲線上の点がそのまま離散パネルの頂点になる。

4.2　曲面全体の構築

次に折り状態の計算を行う。まず展開図を作成する。折り線同士の**振幅比**a、折り線同士の**オフセット距離**h、ユニットのx方向・y方向それぞれの**繰り返し個数**n_x、n_yに加えてどちらの解にするかを選択する。次に、モジュールの折り状態を構成する。考えているモジュールは$2 \times n$であり、四価頂点折紙が連結したものと捉えられる。四価頂点折紙は１自由度なので、一つ目の四価頂点の**初期角との変位**δを決定すると、連鎖的に全体の形状が計算できる(図７)。最後に、折り上がったモジュール

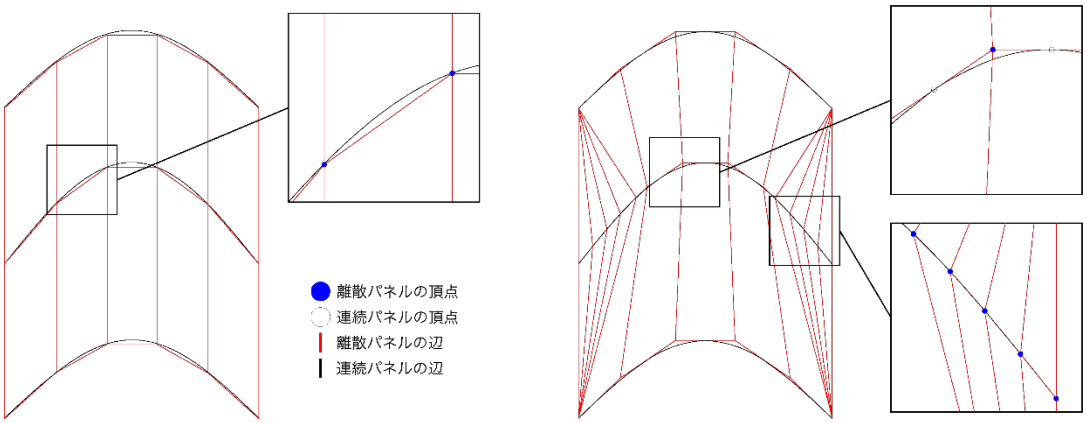
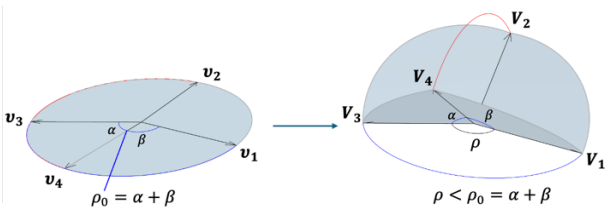


図６　連続パネルに対応する離散パネル。左：$d_1 = d_2$、右：$f'(d_1) = g'(d_2)$



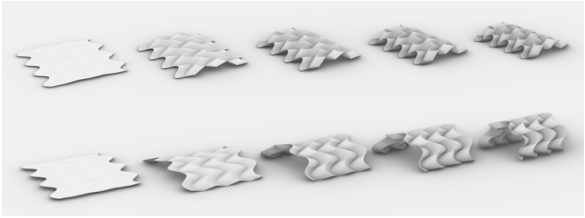


図８　同じ展開図からできる二種類の円筒形状

を適宜配置して貼り合わせていく。

4.3　ビジュアライズ

図１０に同一の展開図からできる曲げ方向の異なる二種類の円筒変形を grasshopper で計算した結果を示す。上が解：$d_1 = d_2$、下が解：$f'(d_1) = g'(d_2)$の変形の様子を表している。ユニットの繰り返し個数n_x、n_yを調整することでそれぞれの解についてライズと平面形状を変えることができる。例えば図８の場合には$(n_x, n_y) = (7,3)$とn_yに対してn_xを多くとっているので、y軸方向を軸に曲がるときにより大きなライズが得られている。

δを固定した時の振幅比a、オフセット距離hに対する曲率変化の挙動を比べると、振幅比aについては、いずれの場合もaが 1 から離れるとより曲率の大きい円筒が得られ、特にx軸方向を軸に曲げる時は$a < 1$の範囲で、y軸方向を軸に曲げる時は$a > 1$の範囲で急激に曲率が変化する（図１１）。オフセット距離hについては、x軸方向を軸に曲げる時はhに比例して曲率半径が大きくなるのに対して、y軸方向を軸に曲げる時はそれよりも急激に曲率半径が大きくなる。

これらのパラメータと巨視的な形状の関係をもとに適切にパラメータ(a, h, n_x, n_y, δ)を選ぶことで、目的の平面形状、ライズ、曲率を持ち、かつ二方向に変形できる円筒状の構造物を設計することができる。

5.　結論

本紙テセレーションと曲線折り紙を組わせた曲線折りテセレーションについて、ルーリングの入り方に注目して解析することでその円筒形状の設計・制御の方法を提案した。一般に複数の折り線を持つと解析が難しくなる曲線折り紙に対して、うまく境界条件を設定することによって、その際一様な折り変形についてそのルーリングのパターンを解析し、また剛体パネルを介することでその折り状態を計算した。本研究で計算した形状は物体の厚みや剛性を無視した、理想的な折紙としてのモデルである。そのため、今後は図１０のように実際に展開構造物として実装するため、適切な厚みや材質の選択に加えて、スムーズに展開して折りたためるようなモデルの検討を行う予定である。

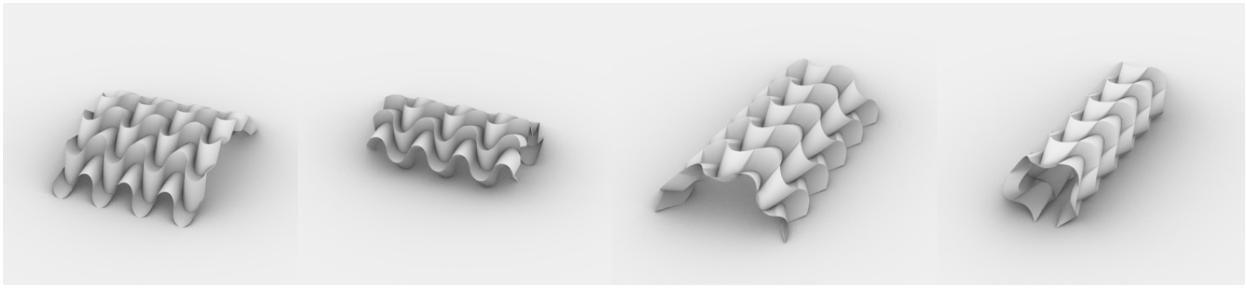
謝辞

本研究は科研費 24H00822 の助成を受けたものです。

参考文献

1) Klett, Y., Drechsler, K., Wang-Iverson, P., Lang, R. J., & Yim, M. (2011). Designing technical tessellations. In *Origami* (Vol. 5, No. ISBN 1568817142, pp. 305-322). CRC Press.

2) Filipov, E. T., Tachi, T., & Paulino, G. H. (2015). Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and



$a = 1.5$/平行ルーリング　　/接線平行ルーリング　　/接線平行ルーリング

図９　パラメータaを変化させた時の形状の違い。そのほかのパラメータh, δ, n_x, n_yは全て共通

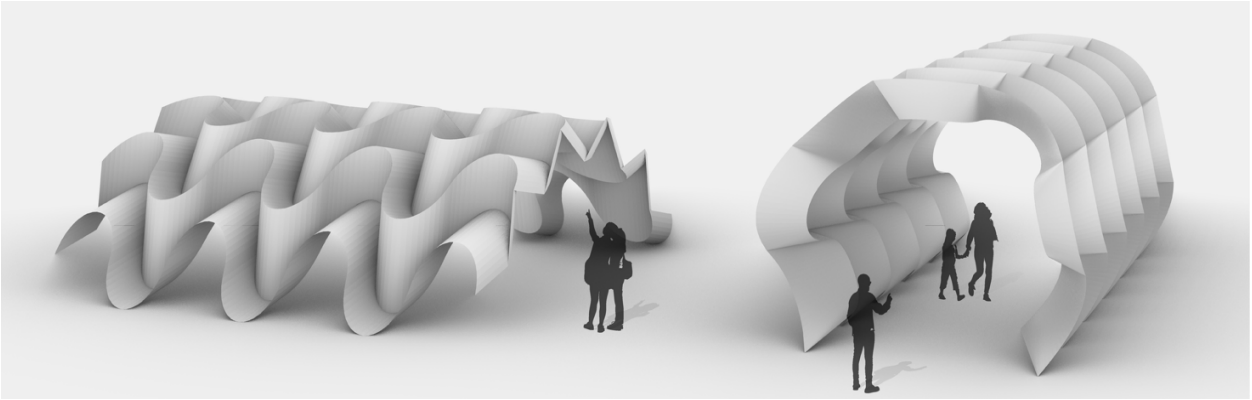


図１０　曲線折りテセレーションを使った可変な円筒構造物のイメージ

metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *112*(40), 12321-12326.

3) Thün, G., Velikov, K., Ripley, C., Sauvé, L., & McGee, W. (2012). Soundspheres: resonant chamber. In *ACM SIGGRAPH 2012 Art Gallery* (pp. 348-357).

4) Tachi, T. (2013, August). Freeform origami tessellations by generalizing Resch's patterns. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Vol. 55942, p. V06BT07A025). American Society of Mechanical Engineers.

5) Tachi, T. (2013). Composite rigid-foldable curved origami structure. *Proceedings of transformables*, 18-20.

6) Maleczek, R., Stern, G., Metzler, A., & Preisinger, C. (2019, August). Large scale curved folding mechanisms. In *Design Modelling Symposium Berlin* (pp. 539-553). Cham: Springer International Publishing.

7) Song, K., Li, H., Li, Y., Ma, J., & Zhou, X. (2024). A review of curved crease origami: design, analysis, and applications. *Frontiers in Physics*, *12*, 1393435.

8) Du, Y., Song, C., Xiong, J., & Wu, L. (2019). Fabrication and mechanical behaviors of carbon fiber reinforced composite foldcore based on curved-crease origami. *Composites Science and Technology*, *174*, 94-105.

9) Mundilova, K. (2024). *Gluing and creasing paper along curves: computational methods for analysis and design* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

10) Demaine, Erik D., et al. "Designing curved-crease tessellations of lenses: qualitative properties of rulings." *6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education (OSME 2014), Tokyo, Aug*. 2014.

11) K. Mundilova and G. Nawratil. "Rigid-Ruling Folding Compatibility of Planar Creases," 8OSME, 2024.

風車状の頂点を持つ剛体折紙の挙動解析とその組み合わせによる機構設計

南宏樹 [1)]，舘知宏 [2)]
1) 東京大学工学系研究科建築学専攻,修士課程,hiroki-minami@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
2 東京大学総合文化研究科広域科学専攻，教授，博士（工学）, tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

折紙構造は、シート状の材料に折線を施すことで、高い機能性と可変性を実現する技術として注目されている。軽量且つ折りたたみ可能である等の利点から保管性や運搬性に優れ､多岐に渡る分野への応用が期待されている。

特に、折紙をヒンジによって接続された剛体パネルの運動として捉える剛体折紙構造は、パネル剛性を考慮する必要性が無く挙動を厳密に計算することができるモデルとして、展開・可変構造への設計に有用である。

剛体折紙を用いた展開構造への設計において、下田ら[1]は厚みのある部材を用いた剛体折紙による展開構造の設計手法を提案した。また実用化事例として、Al Bahr Towers の可変ファサードによる環境制御が挙げられる[2]。このように建築分野における実例も見られる一方、従来の剛体折紙構造は既知の折線パターンに依存しており、設計可能な動きの範囲には限界がある。

本研究では、新たな剛体折紙を生むため、従来扱われていなかった風車状の折線パターンを導入する。これにより、折り状態の巡回という従来には見られない挙動を示す剛体折紙が得られた。この折線パターンを持つ剛体折紙を「風車型頂点折紙」と呼び、運動学的な特徴をリンク機構との関連性から明らかにし、従来の剛体折り紙との違いを示す。また、複数の風車型頂点をモジュール化し組み合わせることにより、新たな動的性質を備えた機構を提案する。

第 2 節では、風車型頂点折紙の構成手法を述べ、従来の剛体折紙との違いをリンク機構や自由度、挙動の観点から説明する。第 3 節では、折角の計算により風車型頂点折紙の挙動を解析し、パネル形状や組み合わせ方により、 1 自由度機構、微小変形機構、剛体構造の 3 種類のモードが得られることを示す。第 4 節では風車型頂点折紙のテセレーション条件について、第 5 節ではテセレーションによる設計の例として、機構の対称性に基づきモジュールを組み合わせることで全体が円筒状を保ちながら変形する 1 自由度機構を紹介し、モジュールと挙動や形状との関係性について述べる。

2 風車型頂点折紙

2.1 風車型頂点の構成

風車型頂点は、少なくとも 6 枚の剛体パネルから構成される。まず、6 本の折線からなる負曲率の頂点を考える。この頂点から、各パネルを折り線に沿ってずらすことで、折線が渦巻き状に伸びた穴が形成される。この時、穴を構成する 6 個のセクター角が 2 回対称性を持つ場合、6 枚のパネルは 1 自由度の剛体折紙機構となる(図 1)。この機構が、本研究で提案する風車型頂点折紙である。

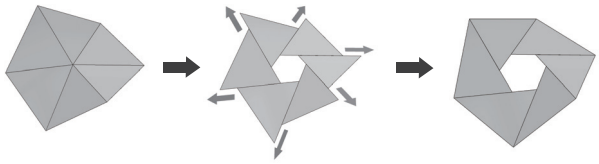


図 1 風車型頂点折紙の構成

2.2 機構的性質

剛体折紙の挙動を運動学的な観点から捉える場合、一般的には折線を回転ジョイントに置き換えた球面リンク機構として表現される。これに対し、風車型頂点折紙は折線の回転軸が 1 点に交わらない。そのため、球面状を動く機構とみなすことはできず、各ジョイントが立体的な配置を取る空間リンク機構として考える。特に、6 個の回転ジョイントと 6 本のリンクから構成される「line-symmetric 6R Bricard linkage」(図 2)と等価な運動学的性質を持つ機構とみなされる[3,4]。

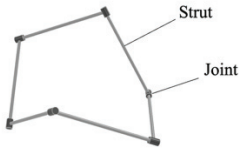


図 2 line-symmetric 6R Bricard linkage

2.3 自由度

通常の 6 価頂点折紙は 3 自由度であることが知られている。一方、風車型頂点折紙は頂点のずれにより拘束が増加し、過拘束な 1 自由度機構となる(図 3)。過拘束とは、計算上の自由度が 0 であるのに対し、機構の対称性

等により実際には動くことが可能な状態を指す。空間リンク機構の自由度はChebychev-Grübler-Kutzbach criterionから求められるが、実際に風車頂点折紙の自由度を計算すると0となることがわかる。

$$m = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i = 6(6 - 6 - 1) + (6 \times 1) = 0 \quad (1)$$

m：自由度，n：部材数，j：ジョイント数，f_i：各ジョイントの自由度$(i = 1, 2, \cdots, j)$



3DOF　　overconstrained 1DOF

図3 折線のずれに伴う拘束の増加

2.4　挙動

一般的な折紙は、平坦状態から折線が山谷いずれかの方向に折れることで、平坦状態と展開状態を行き来する動きを見せる。一方、風車型頂点折紙は非可展な折紙であるために平坦・展開という2種類の状態間を行き来せず、ある折り状態を循環するように変形する(図4)。折線は山折と谷折を繰り返しながら折れ曲がり、各折線の位相がずれていることによって全体が波打つような挙動となる。

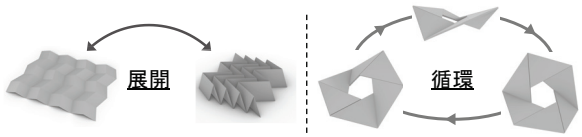


図4 可展な折紙との挙動の違い

3 挙動解析

3.1　挙動

6R Bricard linkage の運動学は既存研究[3,4]によって明らかにされている。本節では、これらの研究に基づく風車型頂点折紙の運動学を記載する。

多関節リンクの運動解析に用いられる Denavit-Hartenberg パラメータをもとに、表1・図5のように設計パラメータを定義する。これらのパラメータを用いて、各ジョイントに対する同次変換行列(Homogeneous transformation matrix)**T** を組み立てる。同次変換行列とは、多関節機構の姿勢や変位の制御・解析を座標変換行列の計算によって行う手法である。

$$\mathbf{T}_{i(i+1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_{i(i+1)}\sin\theta_i & \sin\alpha_{i(i+1)}\sin\theta_i & a_{i(i+1)}\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_{i(i+1)}\cos\theta_i & -\sin\alpha_{i(i+1)}\cos\theta_i & a_{i(i+1)}\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_{i(i+1)} & \cos\alpha_{i(i+1)} & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

表1 設計パラメータ

表記	Denavit-Hartenberg parameters	風車型頂点折紙
$a_{i(i+1)}$	リンクの垂線距離	-
$\alpha_{i(i+1)}$	隣接する回転軸間の角度	パネルセクター角
R_i	ジョイント間距離	内側の頂点間距離
θ_i	ジョイントの回転角	パネル回転角
L_i	-	三角形の短辺の辺長

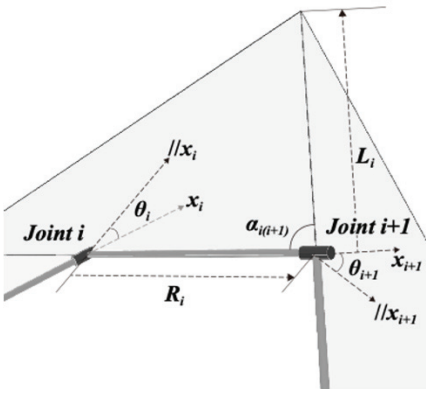


図5 設計パラメータ（リンク機構を重ねて表示）

剛体パネルを扱う場合、リンクの垂線距離は全て 0、また回転対称性を保つことから以下の条件を追加する。

$$a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_{45} = a_{56} = a_{61} = 0 \quad (3)$$

$$\alpha_{i(i+1)} = \alpha_{(i+3)(i+4)},\ R_i = R_{(i+3)}\ (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

リンクが環状に閉じる条件を式(5)に示す。

$$\mathbf{T}_{n1}\cdots\ \mathbf{T}_{34}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{12} = \mathbf{I} \quad (5)$$

以上から、回転角 θ に関して風車型頂点折紙に対応する以下の条件が導かれる。

$$\theta_1 = \theta_4,\ \theta_2 = \theta_5,\ \theta_3 = \theta_6 \quad (6)$$

$$\theta_1 = -\theta_4,\ \theta_2 = -\theta_5,\ \theta_3 = -\theta_6 \quad (7)$$

ここでは(6)をケース1、(7)をケース2とし、挙動に関する性質を考察する。

3.2　ケース1

ケース1の場合、式(5)から導かれる以下のセクター角の関係式を用いる。

$$\theta_2 = 2\tan^{-1}\left(\frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2 \cdot C_2}}{2A_2}\right) \quad (8)$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left(\frac{-B_3 \mp \sqrt{B_3^2 - 4A_3 \cdot C_3}}{2A_3}\right) \quad (9)$$

$$\theta_4 = \theta_1,\ \theta_5 = \theta_2,\ \theta_6 = \theta_3 \quad (10)$$

$(A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$の値を付録に記載する)

三角形パネルが全て合同な場合、つまりパネルセクター角と内側の頂点間距離が全て等しい場合について、折角の軌跡を求めた結果を図6に示す。グラフから折り状態

が存在するのは$\alpha \geq 60°$の時であり、異なるαに関して以下の幾何的性質の違いが示される。

(i) $\alpha = 60°$の時

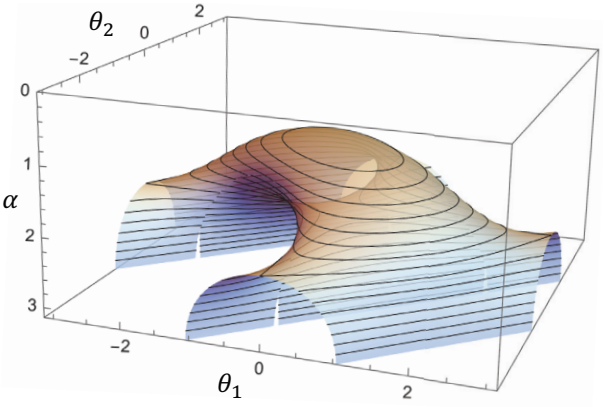
風車型頂点は可展となり、微小変形範囲で動く。

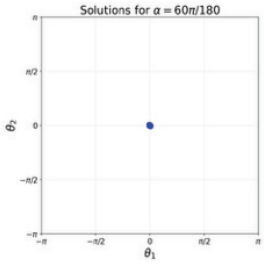
(ii) $60° < \alpha \leq 120°$の時

風車型頂点は非可展となり、回転角の軌跡は閉じた曲線を描く。軌跡が閉じている点から、パネルが山谷を介してある折り状態を循環することが示される。

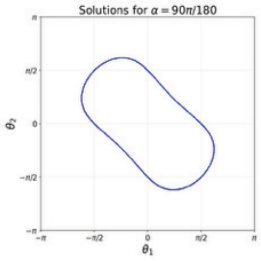
(iii) $120° < \alpha \leq 180°$の時

運動中にパネルの自己交差が発生し、物理的に折角の往復運動は起こらない。

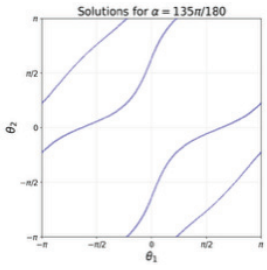




(a) $\alpha = 60°$



(b) $60° < \alpha \leq 120°$

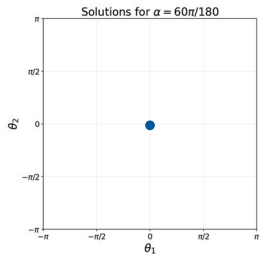


(c) $120° < \alpha \leq 180°$

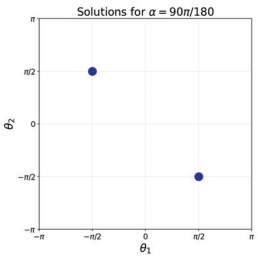
図 6 ケース 1 の場合の折角の軌跡

3.3 ケース 2

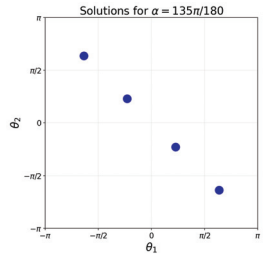
この場合も$\alpha \geq 60°$のとき解をもち、その解は有限個の点となる。したがって、機構は変形しない剛な構造体となる。ケース 1 に対して 3 回対称性の形状を取り、折角はケース 1 の軌跡の一部となる(図 7)。



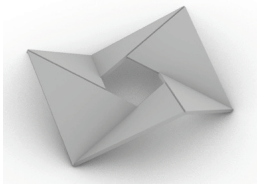
(a) $\alpha = 60°$



(b) $60° < \alpha \leq 120°$



(c) $120° < \alpha < 180°$



$\alpha = 70°$

図 7 ケース 2 の解と機構の構成例

4 風車型頂点折紙のテセレーション

4.1 折角の適合性

風車型頂点折紙を連結させることで、新たな性質を備えた機構を考える。動きの連続性や 1 自由度性を保ちながら風車型頂点を組み合わせることを目的とし、以下の 2 点を組み合わせの条件とする。

(i)隣り合う風車型頂点の折角が合致している。

(ii)隣り合う風車型頂点を同じ部材を共有させて構成可能である。

条件(i)について、1 自由度機構を組み合わせると通常は過拘束となるが、風車型頂点折紙は対称性を利用することにより機構としての性質を保ちながら組み合わせることが可能である。組み合わせを考えるにあたり、風車型頂点に対応する空間リンク機構を、各辺に対応する折角θ_iを記載した正六角形で表現する(図 8)。

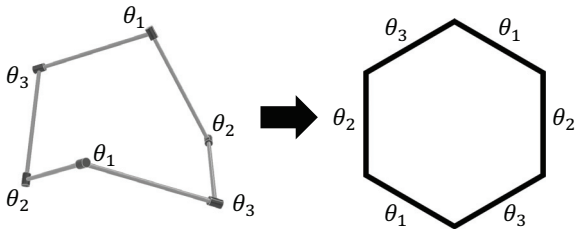


図 8 機構のモデル化

風車型頂点を 2 個繋げた場合、折角の組み合わせパターンは 2 種類存在する。この 2 種類の組み合わせパターンのいずれかを用いて、直列に風車頂点を連結させることが可能である(図 9)。

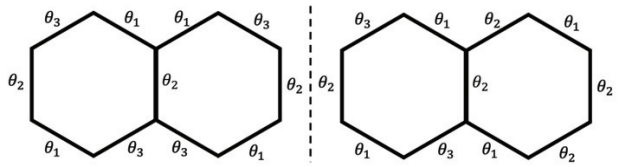


図 9 風車型頂点の組み合わせパターン

一方、3 個目の機構を下に接続する際は、回転角の対称性を考慮する必要がある。この場合、折角の組み合わせパターンは 1 種類に定まる(図 10)。

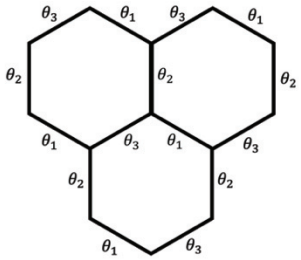


図 10 3 個の風車型頂点の組み合わせ

4.2 モジュールによる風車型頂点の接続

組み合わさった六角形の各頂点は非可展であるため、単一の面材を用いて組み合わせることはできない。そこで、合同な鈍角三角形 3 枚を巴状に組み合わせた剛なモジュールを用いる(図 11)。設計変数を、モジュールの頂点Aをなす中心角ϕ、辺ACの長さL、そして三角形に接していない短辺BCの長さlとする。

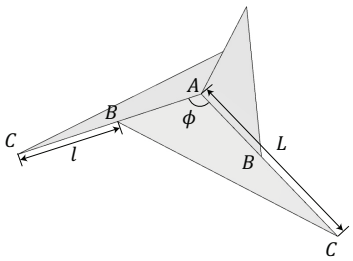


図 11 3 価頂点モジュール

短辺BC同士を接続することで、6 個のモジュールを環状に繋ぎ合わせる。この時、接続部分を回転ジョイントとして捉えることで、風車型頂点折紙と同じ過拘束 1 自由度の機構が構成される(図 12)。この時、中心角ϕの補角が風車型頂点のセクター角αに対応する。

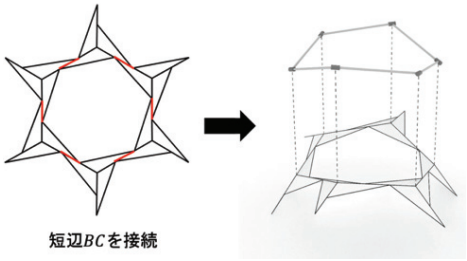


図 12 モジュールの接続による機構の構成

従って、接続に用いられていない短辺を同様に接続することにより、機構的な性質を保ったテセレーションを行うことができる。

5 テセレーションによる機構設計

5.1 円筒形 1 自由度機構の設計

第 4 章に述べた方法でモジュールを接続し風車型頂点をテセレーションすると、全体が円筒形の形状を持つ機構が構成される(図 13)。風車型頂点を構成する全ての折角が隣り合う風車型頂点同士で共有されているため、全体も過拘束な 1 自由度機構となる。

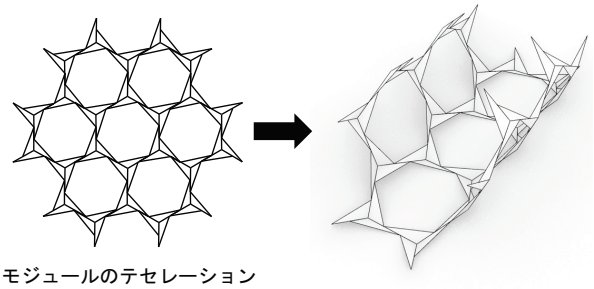


図 13 円筒形 1 自由度機構

5.2 挙動の特徴

機構の折角の変化に伴い、機構全体が同一の半径の円筒形を保ちながら、内接する円筒に沿うように回転する(図 14)。



図 14 回転運動のイメージ

この挙動は、中立安定な円筒形シェルが内接する円筒をコイル状に巻き取るように変形する際の挙動と同様である[5](図 15)。実際にモジュールの自己交差を許容したモデルをシミュレーションすることで、これと同様の動きを確認することができた。



図 15 円筒シェルの巻き取り[5]

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$を入れ替えると、全体の軸を 120° 回転した状態が表現される。120° 回転する間に、対称性を持つ特徴的な状態として、風車型頂点が(i)ずれながら組み合わさる場合、 (ii)並行に組み合わさる場合の 2 状態を取

る(図 16)。

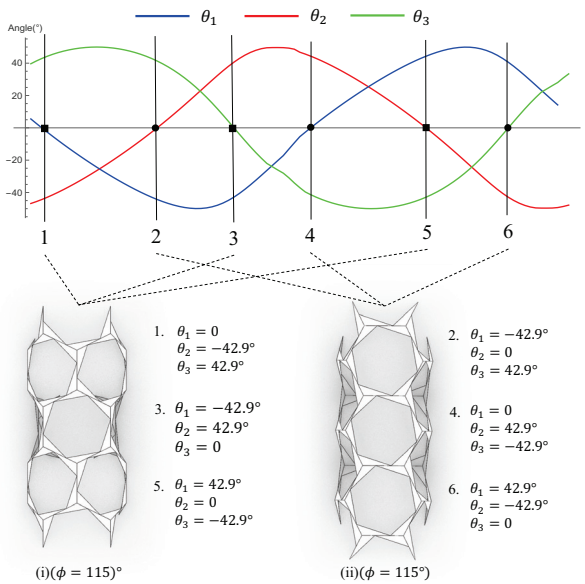


図 16 折角の位相と対称性を持つ状態の関連性

また、モジュールの構成単位である三角形形状を変えることで円筒の曲率が増加する。ϕが 120°に近づくにつれて円筒の曲率が低下していく。具体的に、(i)となる場合の曲率半径R_1と、(ii)となる場合の曲率半径R_2は、L, l, ϕを用いて下記のように表現される。また、頂点間の距離$(2L-l)$を 1 とした時のグラフを図 17 に示す。

$$R_1 = (2L-l)\frac{(\sin\phi)^2}{\sqrt{2(1-\cos\phi-2(\cos\phi)^2)}} \tag{11}$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2L-l)\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2+4\cos\phi}} \tag{12}$$

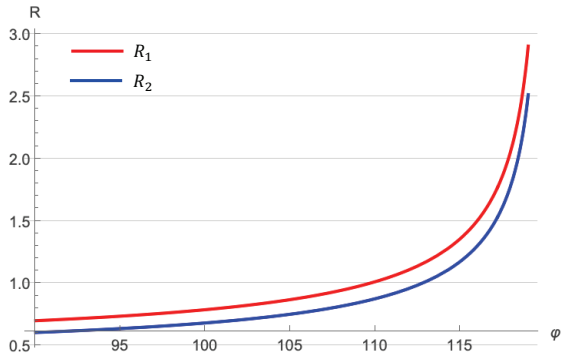


図 17 ϕとRの関係

5.3 円筒が閉じる条件

ここで、機構の形状パラメータによって、端部のモジュールの短辺が繋がり閉じた構造体となる際の条件を考える。この構造は、カーボンナノチューブの構造[7]に類似しており、この分野の用語を借りて分類を行うことができる。以下の手順で条件を与える。

まず第 4 章で用いた、風車型頂点を表現する際の六角形を敷き詰めたグリッドを考える(図 18)。ある六角形の頂点から、隣り合わない 3 つの頂点のうち最も近い 2 つの方向に基本格子ベクトル$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$をとる。これらを整数倍したベクトル和$\boldsymbol{C}$(カイラルベクトル)を計算し、その絶対値を円筒の周長とする。$\boldsymbol{C}$方向に六角形を巻くことで、円筒が形成されると考える。

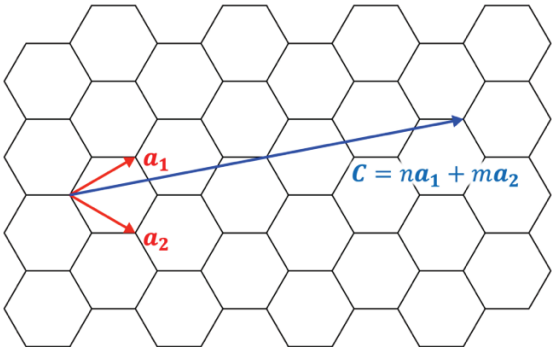


図 18 六角形グリッドと基本格子ベクトル

この時、$\boldsymbol{C}$の方向が円筒の巻き方向に対応することから、整数n, mの取り方により、風車型頂点の配置に以下の 3 種類のパターンが現れる(図 19)。

(I)ジグザグ型$(m = 0)$：風車型頂点がジグザグ状に組み合わさる。

$$\boldsymbol{C} = n\boldsymbol{a_1} \tag{13}$$

(II)アームチェア型$(n = m)$：風車型頂点が円筒の軸方向に沿い整列する。

$$\boldsymbol{C} = n(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) \tag{14}$$

(III)カイラル型$(n \neq m(n > 0, m > 0))$：風車型頂点が螺旋状に組み合わさる。

$$\boldsymbol{C} = n\boldsymbol{a_1} + m\boldsymbol{a_2} \tag{15}$$

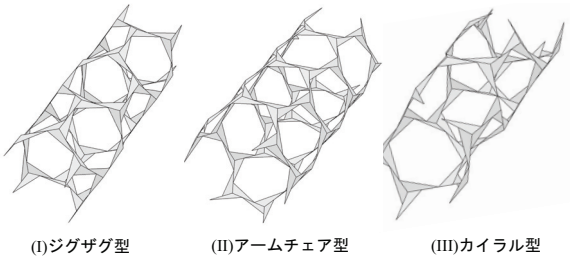


図 19 閉じた円筒になる場合のパターン例

ここで、ジグザグ型、アームチェア型はそれぞれ 5.2 節における(i), (ii)と同一の配置を取るパターンとなっている。

(I), (II)の場合について、円筒が閉じる場合の中心角ϕについて考察する。nとϕの関係は以下の式で表される。

(I)の場合

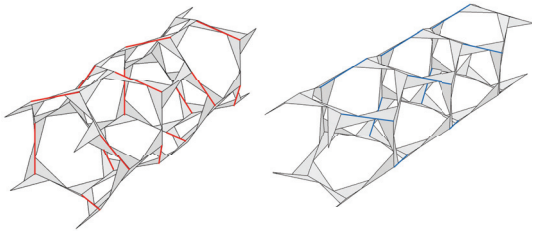
$$\phi = 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2\cos(\pi/2)}\right) \tag{16}$$

(II)の場合

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - \sqrt{8 + (\cos\frac{\pi}{2n})^2}\right)\right) \quad (17)$$

7 個の風車型頂点で機構が構成される場合、ϕが約 113°の時に端部のモジュールが閉じ、この角度を超えるとモジュールに自己交差が発生する。

また、折角が 0 となる辺は、(I)の場合、螺旋状の配置を取るのに対し、(II)の場合は円筒の軸方向に並列して並ぶことを確認した(図 20)。

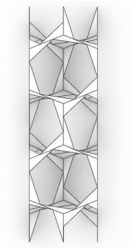
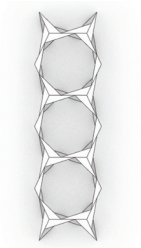
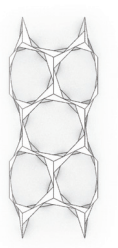
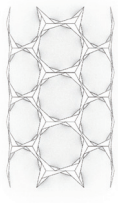


(I)ジグザグ型　　(II)アームチェア型

図 20 (I), (II)における折角 0 の辺

さらに、$n = 5$までの場合におけるϕを計算し、その増加に伴いパターン(I)、(II)がほぼ交互に現れることを確認した(表 2)。(I)と(II)において全てのϕが異なる数値を取ることから、同一のϕを持つモジュールから複数の配置パターンを得ることはできないことが予想される。

表 2 nに対応するϕとパターン

Pattern	 Zigzag	 Armchair	 Zigzag
n	3	2	4
ϕ	109.47°	112.97°	114.46°
Pattern	 Armchair	 Zigzag	 Armchair
n	3	5	4
ϕ	115.55°	116.56°	116.93°

6 まとめ

本研究では、「風車型頂点折紙」として剛体折紙に新しい折線パターンを導入し、従来の剛体折紙との運動学的な性質の違いを明らかにした。また、風車型頂点をモジュールのテセレーションにより組み合わせることで新たな機構を設計し、全体の形状とモジュール形状や折角との関係性を明らかにした。

謝辞 本研究は JST ASPIRE JPMJAP2401 および JST 創発 JPMJFR232T の支援を受けた。

付録 式(8),(9)における$A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$の式を以下に示す。($S$：sin, C：cos)

$$\begin{aligned}
A_2 &= -C\theta_1\{R_2S\alpha_{12}S\alpha_{34} + R_3S\alpha_{34}(S\alpha_{12}C\alpha_{23} - C\alpha_{12}S\alpha_{23})\} \\
&\quad + R_1(C\alpha_{12}C\alpha_{23} + C\alpha_{34} + S\alpha_{12}S\alpha_{23}) + R_2(C\alpha_{23} + C\alpha_{12}C\alpha_{34}) \\
&\quad + R_3(1 + C\alpha_{12}C\alpha_{23}C\alpha_{34} + S\alpha_{12}S\alpha_{23}C\alpha_{34}) \\
B_2 &= 2R_3S\alpha_{23}S\alpha_{34}S\theta_1 \\
C_2 &= -C\theta_1\{R_2S\alpha_{12}S\alpha_{34} - R_3S\alpha_{34}(S\alpha_{12}C\alpha_{23} - C\alpha_{12}S\alpha_{23})\} \\
&\quad + R_1(C\alpha_{12}C\alpha_{23} + C\alpha_{34} - S\alpha_{12}S\alpha_{23}) + R_2(C\alpha_{23} + C\alpha_{12}C\alpha_{34}) \\
&\quad + R_3(1 + C\alpha_{12}C\alpha_{23}C\alpha_{34} - S\alpha_{12}S\alpha_{23}C\alpha_{34}) \\
A_3 &= -C\theta_1\{R_2S\alpha_{12}(S\alpha_{23}C\alpha_{34} - C\alpha_{23}S\alpha_{34}) + R_3S\alpha_{12}S\alpha_{34}\} \\
&\quad + R_1(C\alpha_{12}C\alpha_{23} + C\alpha_{34} + S\alpha_{12}C\alpha_{34}) \\
&\quad + R_2(1 + C\alpha_{12}C\alpha_{23}C\alpha_{34} + C\alpha_{12}S\alpha_{23}S\alpha_{34}) + R_3(C\alpha_{23} + C\alpha_{12}C\alpha_{34}) \\
B_3 &= 2R_2S\alpha_{12}S\alpha_{23}S\theta_1 \\
C_3 &= -C\theta_1\{R_2S\alpha_{12}(C\alpha_{23}S\alpha_{34} + S\alpha_{23}C\alpha_{34}) - R_3S\alpha_{12}S\alpha_{34}\} \\
&\quad + R_1(C\alpha_{12}C\alpha_{23} + C\alpha_{34} - S\alpha_{23}C\alpha_{34}) \\
&\quad + R_2(1 + C\alpha_{12}C\alpha_{23}C\alpha_{34} - C\alpha_{12}S\alpha_{23}S\alpha_{34}) + R_3(C\alpha_{23} + C\alpha_{12}C\alpha_{34})
\end{aligned}$$

参考文献

1) Yuta Shimoda, Tomohiro Tachi, Jun Sato : Flat-Foldable Rigid Origami with Uniform Thickness Panels Advances in Architectural Geometry 2020, pp. 154–173, 2020
2) Shady Attia, Evaluation of adaptive facades : The case study of Al Bahr Towersin the UAE, Proceedings of Qatar Green Building Conference 2016, pp. 115–123, 2016
3) W.H. Chai, Y. Chen, The line-symmetric octahedral Bricard linkage and its structural closure : Mechanism and Machine Theory 45, pp. 772-779, 2010
4) Yan Chen, Chao-Yang Song, I-Ming Chen, Kinematic Study of the Original and Revised General Line-Symmetric Bricard 6R Linkages : Journal of Mechanisms and Robotics Vol 6, pp. 031002-1-031002-10, 2014
5) Mark Schenk, Simon D Guest, On Zero Stiffness : Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, pp. 1701–1714, 2014
6) Zhong You, Yan Chen : Motion suructures, pp. 4-33, 2011
7) S. Reich, C. Thomsen, J. Maultzsch : Carbon Nanotubes Basic Concepts and Physical Properties, pp. 4-6, 2004

プリズマトイドテセレーションに基づく可変構造の自由度解析

大嶋 千智[1)]，今田 凜輝[2)]，舘 知宏[3)]
1) 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻，修士課程，学士 (工学)，oshima-chisato@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
2) 東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻，博士課程，修士 (学術)，r-imada@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
3) 東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻，教授，博士 (工学)，tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

1　はじめに

近年、構造の機能を幾何的にプログラムするプラットフォームとして、単純な形の繰り返しによるテセレーション構造が注目されている。テセレーション構造の性質は、繰り返し単位 — ユニットセル — の形状や並べ方により制御できる。建築学を含む工学分野では、平面状態から曲面形状へ変形する折紙構造やコンパクトに折り畳み可能な展開構造等の可変構造の他、異方的な剛性や負のポアソン比といった特異な物性を備えた機械的メタマテリアルへの応用研究が盛んである。

可変構造や機械的メタマテリアルの挙動の理解・設計では、基となるテセレーション構造の運動学が重要となる。ここでは、テセレーション構造特有の問題として「ユニットセルの繰り返し数と変形自由度の関係」に注目する（図 1)。多くのテセレーション構造では、自由度はセル数に比例して増減する。一方、なまこ折り等の三角形分割された折紙テセレーションのように、境界セルの数に比例して自由度が増加する構造—マクスウェル格子—も知られている [1, 2]。さらに、ミウラ折りのように、対称性からセル数に依らず自由度が常に一定となる過拘束機構も存在する。このように、テセレーション構造は設計に応じて多様な自由度とセル数の関係が可能であり、その解明は応用を考える上でも重要な問題である。

本研究では、ハニカム構造を拡張したプリズマトイドテセレーションに注目する。プリズマトイドテセレーションやその関連構造の例として、早川らによる 1 自由度機構 [3] やヨシムラパターン [4]、横須賀による可変構造 [5] などがある。特に横須賀の構造は、形態解析によってユニットセルの幾何形状に応じて、多様な曲面が生まれることが示されている。一方で、セル数と自由度の関係をはじめとする変形挙動の運動学的解析はなされておらず、未探索の設計空間も広く残されている。

本研究では、先行研究で扱われなかった設計を含むプリズマトイドテセレーションを対象とし、自由度とセル数の関係やその設計依存性を明らかにする。第 2 節では、プリズマトイドテセレーションを定義したのち、本研究で扱う四つの設計を述べる。第 3 節では、自由度解析の方針を提示した後、二種類のモデルを含む解析手法について述べる。第 4 節では、解析結果を示し、特に微小範囲で多自由度の過拘束機構となる設計を発見したことを述べる。第 5 節では、設計の一般化によって、微小範囲で過拘束機構となるための条件について考察する。

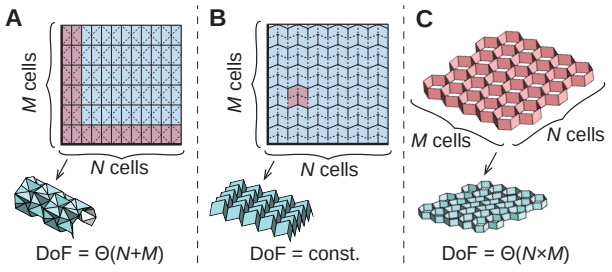


図 1　セルの繰り返し数 (N, M) と自由度（DoF）の関係例 (Θ はランダウのオーダー記号。)。(A) なまこ折り。(B) ミウラ折り。(C) ハニカム構造。

2　研究対象 — プリズマトイドテセレーション —

プリズマトイドとは、全ての頂点が二つの平行な平面上に存在する柱状の多面体である（図 2)。本研究では、プリズマトイドから上下面を取り除いた筒状多面体をセルとし、これを二方向に周期的に並べた構造を、プリズマトイドテセレーションと呼ぶ。プリズマトイドテセレーションは、上下面が平行移動の関係にある正六角柱ベースのハニカム構造を、上下面が “ねじれた” 位置関係であったり非合同であること等を許して一般化したものと解釈できる。例えば横須賀による構造 [5] は、上下

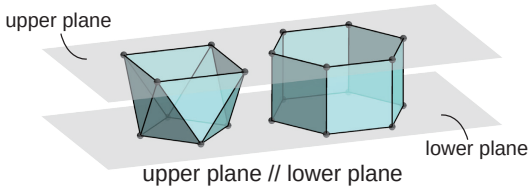


図 2　プリズマトイドの例。

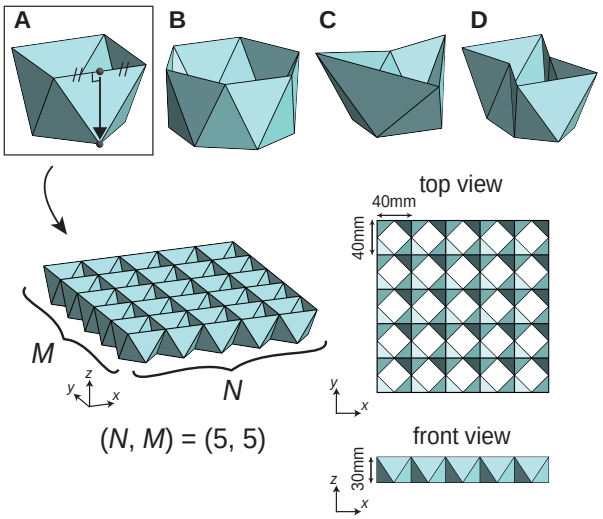


図 3　研究対象とパラメータ。(A)–(D) **上面が正方形、正六角形、凹四角形、凹六角形の筒状プリズマトイド。**

面が “ねじれた” 位置関係にある反四角柱ベースのプリズマトイドテセレーションである。

本研究では、セルの上下面が “ねじれて” いたり非合同な場合に焦点を当てる。具体的には、セルの上面は①正方形、②正六角形、③凹四角形、④凹六角形の四パターンとし、下面は上面の辺の中点を上面の法線方向に移動させた頂点を用いて作成する（図 3）。また、二方向のセルの繰り返し数をそれぞれ N と M とし、セル数を $(N, M) = (5, 5)$ などと表す。

3　解析手法

3.1　自由度解析の方針

本研究では、Truss model と Bar-and-Hinge model の二種類のモデル（図 4）を用い、まず微小変形を扱った後、有限変形を扱う。微小変形の解析では、まず Truss model の下で、①マクスウェル・カウンティングによる自由度の推定（3.2 項）、②適合行列を用いた微小変形自由度の計算（3.3 項）を行う。また、Bar-and-Hinge model を用いてモデルに物理的な意味を持たせること

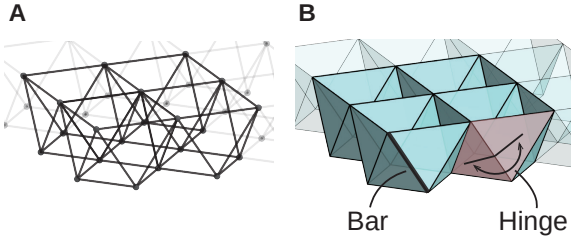


図 4　二種類のモデル化。(A) Truss model。(B) Bar-and-Hinge model。

で、微小変形モードを可視化する（3.4 項）。その後、有限変形について、①最適化計算による有限変形自由度の推定、②対称性を仮定した 2 自由度の有限変形のパラメタライズと解空間の可視化を行う。

3.2　マクスウェル・カウンティングによる自由度の推定

マクスウェル・カウンティングとは、三次元空間における頂点の座標を “変数”、頂点を繋ぐ辺を “拘束” と解釈することで、トラス構造の変形自由度を以下の式で推定する手法である [6]：

$$(\text{“推定” 変形自由度}) = 3 \times \#(\text{頂点}) - \#(\text{辺}) - 6. \quad (1)$$

上式では、三次元空間における並進・回転変換に対応する自明な 6 自由度分を差し引いている。式 (1) は多くの場合で “真の” 自由度と一致するが、辺の長さや、具体的に各辺がどの頂点を結んでいるか、といった情報は考慮しないため、真の自由度とは異なる可能性があることに注意する。例えば、ミウラ折りは式 (1) が負となるにも関わらず自由度を持つ過拘束機構となっている。

3.3　Truss model を用いた微小変形自由度の計算

Truss model は、棒材（以下、辺と呼ぶ）とピン接合（以下、頂点と呼ぶ）のみで構成されるモデルである。本研究で対象とするプリズマトイドテセレーションは、全ての面材が三角形で構成されており、面外方向の剛性は考慮する必要がない。そのため、辺の伸び縮みのみ表現する Truss model で運動学的性質を評価できる。

Truss model における適合行列の作成方法を示す。以下、モデルの頂点の数を V、辺の数を E、初期配置における i 番目の頂点座標を $\mathbf{v}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ とする。この時、i 番目の頂点が変位 $\mathbf{d}_i = [d_{i,x}, d_{i,y}, d_{i,z}]^T$ を受けた時の k 番目の辺の伸びを e_k とすると、適合行列は、辺の伸び $\mathbf{e} = [\ldots, e_k, \ldots]^T \in \mathbb{R}^E$ の頂点変位 $\mathbf{d} = [\ldots, d_{i,x}, d_{i,y}, d_{i,z}, \ldots]^T \in \mathbb{R}^{3V}$ に関するヤコビ行列 $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{E \times 3V}$ で定義される。k 番目の辺が結ぶ頂点の添字を i, j とすると、e_k は以下のように書ける：

$$e_k = \|(\mathbf{v}_i + \mathbf{d}_i) - (\mathbf{v}_j + \mathbf{d}_j)\| - \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|. \quad (2)$$

ここで、上式を頂点変位で偏微分したものが適合行列の要素となる。

微小変形自由度は、全ての辺における式 (2) が線形範囲で 0 となる解空間の次元である。すなわち、適合行列

$\mathbf{J}$ のカーネルの次元 $\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{J})$ を用いて、以下のように定義される：

$$(\text{微小変形自由度}) := \dim(\mathrm{Ker}\mathbf{J}) - 6. \tag{3}$$

ここで、$\mathrm{Ker}\mathbf{J}$ に属する各ベクトルは微小変形を表すが、Truss model のみでは物理的に意味のある基底（モード）を取ることが困難である。したがって、次項で折りに剛性を付与した Bar-and-Hinge model を導入し、固有値解析によって微小変形モードを可視化する。

3.4 Bar-and-Hinge model を用いた固有モードの計算

Bar-and-Hinge model とは折紙のバネモデルであり、面材の面内剛性を表す長さバネ（Bar）、折線の曲げ剛性を表す角度バネ（Hinge）、セル同士を繋ぎ合わせる自然長 0 の長さバネの計三種類のバネで構成される [7, 8]（図 5）。なお、通常の Bar-and-Hinge model は上の三種類のバネに加えて面の曲げ剛性を表すバネを含むが、本研究の対象は三角形のみで構成されるため、この種のバネは使用しないことに注意する。本研究では、Truss model と対応づけるため、バネの剛性係数比を (Bar : Hinge : 自然長 0 のバネ) $\approx (10 : 1 : 11)$ と設定する。これにより、Bar-and-Hinge model において固有値が相対的に小さく “ほぼ 0” と言える固有モードは、微小変形モードに対応すると解釈できる。

固有モードは、Bar-and-Hinge model における剛性行列 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3V\times 3V}$ の固有値問題を解くことで可視化できる。なお、ここで $\mathbf{K}$ は、三種類のバネに対応する (1) 面内剛性剛列 $\mathbf{K}_{\mathrm{stretch}}$、(2) 折角の剛性行列 $\mathbf{K}_{\mathrm{fold}}$、(3) セルを繋ぎ合わせる剛性行列 $\mathbf{K}_{\mathrm{stitch}}$ を用いて、以下で与えられる（詳細は先行研究 [7, 8]）を参照）：

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathrm{stretch}} + \mathbf{K}_{\mathrm{fold}} + \mathbf{K}_{\mathrm{stitch}}. \tag{4}$$

以下では、剛性行列 $\mathbf{K}$ の固有値を昇順に $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ とし、対応する変形モードを mode 1, mode 2, ... とする。このとき、mode 1 から mode 6 は固有値 0 を持つ剛体運動モードとなり、mode 7 以降、式 (3) から得られる微小変形自由度の数だけのモードが、微小変形モードに対応することが期待される。

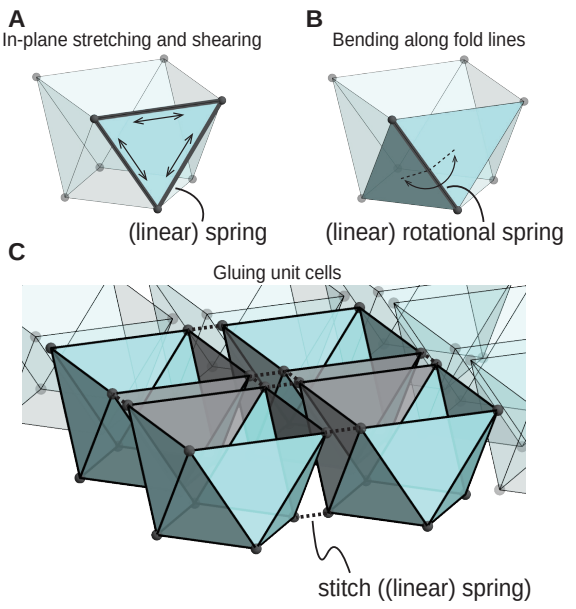


図 5　三種類のバネ。(A) 各辺の長さバネ。(B) 各折線の角度バネ。(C) 各隣接セル間の自然長 0 の長さバネ。

4 解析結果

4.1 微小変形

4.1.1 “推定” 変形自由度

四つの設計においてマクスウェル・カウンティングから得られる (N, M) と “推定” 変形自由度の関係を示す：

$$\begin{aligned} &\text{①正方形} && -N\times M + 3N + 3M - 3, \\ &\text{②正六角形} && 6(N+M) - 6, \\ &\text{③凹四角形} && -N\times M + 3N + 6M - 6, \\ &\text{④凹六角形} && 6(N+M) - 6. \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) より、上面が②正六角形または④凹六角形の場合の自由度は $\Theta(N+M)$ であり、上面が①正方形または④凹四角形の場合は $\Theta(N\times M)$ である。すなわち、カウンティングに従えば、②正六角形と④凹六角形の場合は、自由度が境界セル数に比例して増加するマクスウェル格子であり、①正方形と③凹四角形は、セル数に比例して自由度が減少することが期待される。

4.1.2 微小変形自由度

適合行列を用いて微小変形自由度を計算した結果を図 6 に示す。②正六角形と④凹六角形の場合、式 (5) から期待されるように、微小変形自由度は境界セル数に比例することが観察された（図 6 (B)、(D)）。一方、①正方形と③凹四角形の場合は期待と異なる挙動を示し、特にグラフの水色で示された領域では、セル数が増加しても微小変形自由度が減少せず 6 又は 12 で一定の過拘束機構となることが観察された（図 6 (A)、(C)）。ただし、ここでの解析は微小範囲であるため、有限範囲で機構と

なることは保証しないことに注意する。以下では、非自明な挙動を示す設計、特に上面が①正方形の場合を扱う。

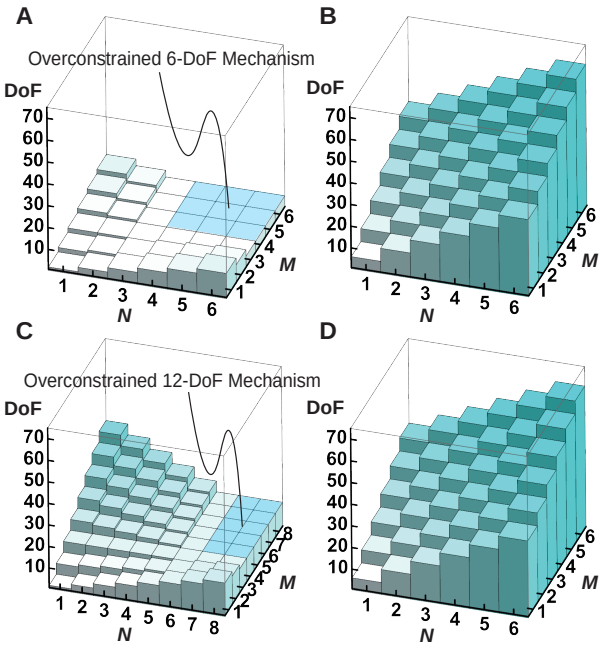


図 6　(A)–(D) 上面が正方形、正六角形、凹四角形、凹六角形の各設計における、セル数 (N, M) に対する微小変形自由度（DoF）の関係。

4.1.3　微小変形モード

Bar-and-Hinge model における剛性行列を用いて、過拘束機構の微小変形モードを可視化する。例として、$(N, M) = (5, 5)$ における六つの微小変形モードを示す（図 7）。特徴として、既知の過拘束機構であるミウラ折りと同様に、いずれのモードも構造の一部ではなく全体が大域的に変形すること（バルク・モード [1, 2]）が見てとれた。一方で、ミウラ折りとは異なり各セルの折りが非一様であり、主に平面内の変形ではなく曲面形状への変形を示すことが観察された。なお、他のセル数においても、定性的には同様の微小変形モードが得られた。

4.2　有限変形

4.2.1　最適化計算による有限変形自由度の推定

ここでは、微小範囲で過拘束機構となる設計について、最適化計算によって有限変形自由度を推定する。具体的には、「基準状態を固有ベクトルに沿って変位したものを初期値とし、真の辺長との差を要素とするベクトルのノルムを最小化する最適化問題」を解いた時、元の（自明な）基準状態に収束するか、非自明な状態に収束するかに注目する。基準状態に収束する場合、対応する微小

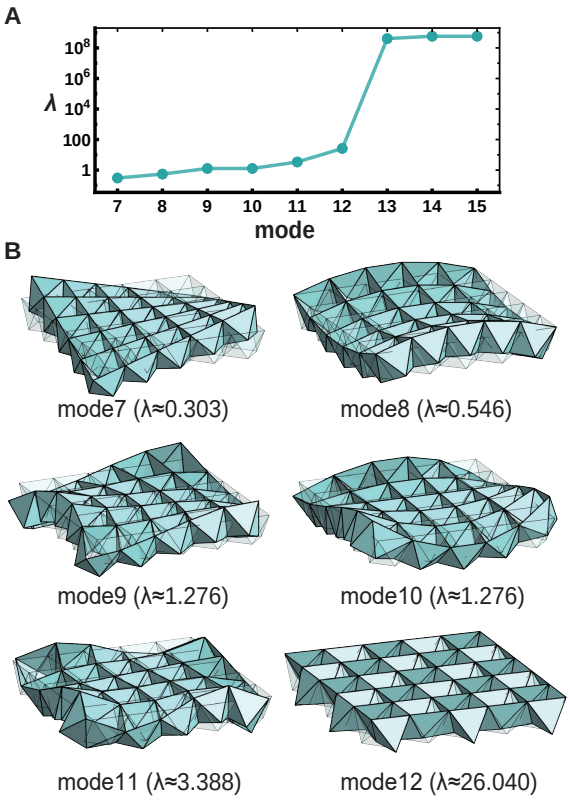


図 7　セル数 $(N, M) = (5, 5)$ における固有値解析の結果。(A) 固有値。(B) 固有モード（微小変形モード）。

変形モードは有限範囲では成立しない可能性がある。一方、非自明な状態に収束しても有限変形モードの存在は保証されないことに注意する。

セル数が $(N, M) = (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の場合の最適化計算の結果を示す（図 8）。図より、$(N, M) = (4, 4)$ では、全ての微小変形モードに対して非自明な状態に収束したため、有限変形自由度も 6 である可能性がある。一方、$(N, M) = (5, 5)$ では、mode9–mode11 は基準状態に収束したため、有限変形自由度は 6 より小さいと予想される。さらに、$(N, M) = (6, 6)$ では、mode7–mode11 が基準状態に収束し、mode12 でのみ円柱状の状態を示した。$(N, M) = (6, 6)$ 以降のセル数でも解析を行ったが、同様に円柱状の変形状態のみ現れた。以上から、セル数を増やすと有限範囲では多くの微小変形自由度が消失するが、依然として円柱に沿う有限変形自由度を持つ過拘束機構となっていると予想した。

4.2.2　円柱に沿う有限変形のパラメタライズと可視化

前項で存在を予想した円柱に沿う有限変形は、折紙テセレーションでは全セルの折状態が同一の “一様な折り” において実現され、2 自由度であることが知られている [9]。ここでは、同様の 2 自由度変形がプリズマト

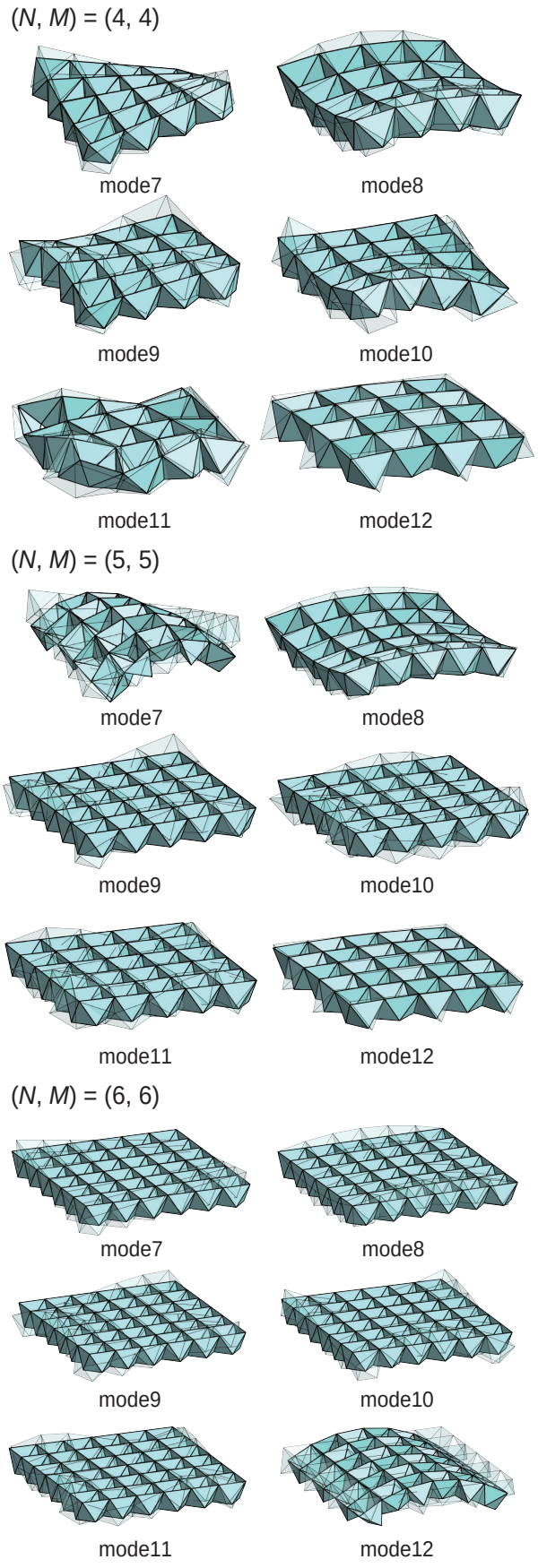


図 8　最適化結果。最適化前の状態（初期値）を半透明で示している。

イドテセレーションにおいても存在することを、円柱状態が持つ対称性を予想し、変形をパラメタライズ・可視化することで示す。まず、最適化計算の結果から、円柱状態は三つの対称性 — (1) 各セルは 2 回回転対称、(2) 各 2×2 ブロックも 2 回回転対称、(3) セルの状態は二通りで市松状配置 — を持つと予想した（図 9）。

対称性 (1) と (2) を仮定すると、各 2×2 のブロックは 3 自由度となり、三つの折角 ρ_1, ρ_2, ρ_3 でパラメタライズできる（図 10 (A)）。ここで、各隣接ブロックの境界には適合条件が課されるが、対称性 (3) を課すと、周期性から適合条件は単一の式で表せる。よって、対称性 (1)–(3) を満たす状態の 2 パラメータ族が存在すると分かる。

上の対称性を持つ 2 自由度変形の配置空間と変形モードを可視化した結果を示す（図 10）。図より、有限変形は円柱を近似しており、それぞれの自由度は①円柱の半径の変化、② “巻き付き方” の変化に対応することが観察された。したがって、有限範囲でも円柱に沿う 2 自由度変形が残る過拘束機構であることが示せた。

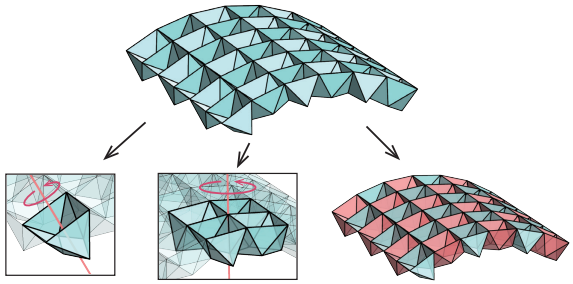


図 9　円柱状態の三つの対称性。

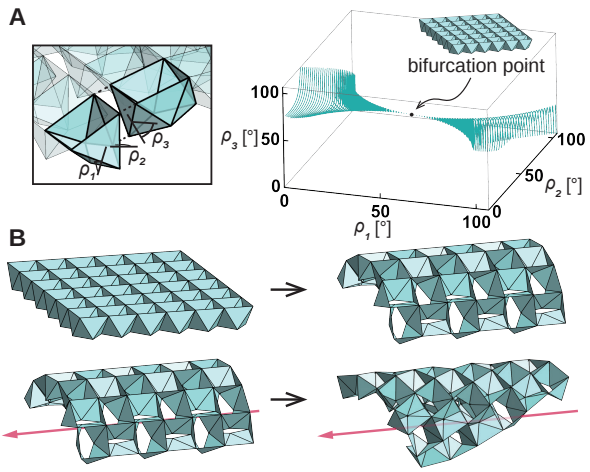


図 10　円柱を近似する 2 自由度の有限変形。(A) パラメタライズに用いる三つの折角と配置空間。(B) 自由度の解釈。

5　考察 — 微小範囲で過拘束機構となる条件 —

ここでは、微小範囲で過拘束機構となる条件を、$(N, M) = (6, 6)$ の①正方形モデルを基準設計として一般化することで考察する。具体的には、頂点にある条件を満たすランダムな摂動を加え、トポロジーは保ちつつメトリックを変化させることを考える。設計を一般化したモデルの例と、その微小変形自由度を示す（図 11）。

ここで、図の結果を含む検証結果を踏まえ、「向かい合う側面が平行で、かつ高さが等しいこと」が微小範囲で過拘束機構となるための条件の一つと予想した。この条件を満たすような一般化設計をパラメタライズし、ランダムなパラメータ値で微小変形自由度の解析を行うと、いずれの試行でも微小変形自由度が 1 残ることが観察された（図 12）。したがって、上の条件は微小範囲での過拘束機構となる十分条件と考えられる。

6　まとめ

本研究では、テセレーション構造におけるセル数と自由度の関係に注目し、プリズマトイドテセレーションを対象に解析を行なった。主結果として、微小変形自由度がセル数に依存しない多自由度の過拘束機構を発見し、その微小変形モードの可視化、有限範囲での挙動探求に加え、微小範囲で過拘束機構となる条件の考察を行なった。今後の課題・展望として、過拘束機構が生じる条件や類似構造 [3, 4] との関係の解明、微小範囲での多自由度性を利用した可変構造や機械的メタマテリアルへの応用の探求が期待される。

■謝辞：　本研究は、JSPS 科研費 JP24H00822 の助成を受けたものです。

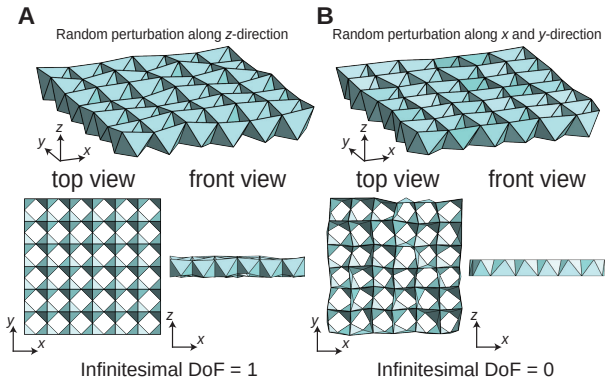


図 11　設計の一般化例。(A) 各頂点を z 方向に摂動した場合。(B) 各頂点を x, y 方向に摂動した場合。

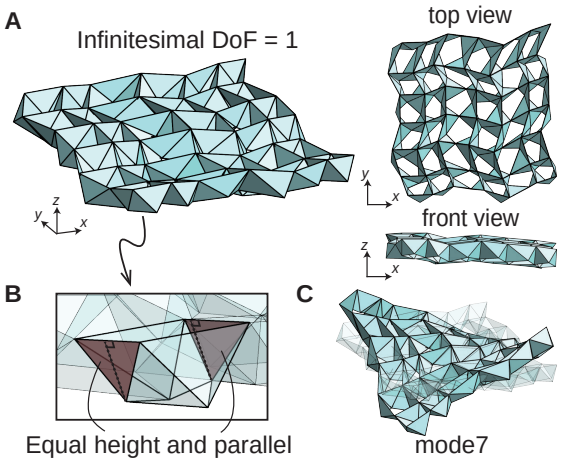


図 12　条件を満たす一般化設計の試行例。(A) 設計例。(B) 過拘束機構となる条件。(C) 微小変形モード。

参考文献

1) Mao, X. and Lubensky, T.C.: Maxwell lattices and topological mechanics, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, **9**, pp.413–433, 2018.
2) Imada, R. and Tachi, T.: Maxwell origami tube, *Phys. Rev. Res.*, **7**, 013032, 2025.
3) Hayakawa, K. and Ohsaki, M.: Rigid- and flat-foldable grid origami structure exhibiting bifurcation of mechanism in non-flat state, *Int. J. Solids Struct.*, **321**, 113520, 2025.
4) Tarnai, T.: Simultaneous static and kinematic indeterminacy of space trusses with cyclic symmetry, *Int. J. Solids Struct.*, **16**, pp.347–359, 1980.
5) 横須賀洋平: 多軸自在継手を用いた可変構造の形態解析および一般逆行列に基づく流体解析, 北陸先端科学技術大学院大学 2013 年度博士論文, 2013.
6) Maxwell, J.C.: L. on the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, **27**, pp.294–299, 1864.
7) Schenk, M. and Guest, S.D.: Origami folding: A structural engineering approach, In *Origami*[5], pp.291–304, AK Peters, 2011.
8) Ishizawa, Y. and Tachi, T.: Structural Characteristics of curved surface composed of tubular origami, In *Proc. of the IASS Annu. Symp. 2020/21*, pp.1–11, 2021.
9) Tachi, T.: Rigid folding of periodic origami tessellations, In *Origami*[6], pp.97–108, American Mathematical Society, 2015.

3D プリント樹脂と竹の 1 面せん断抵抗による丸竹接合部の性質およびトラス構造物への適用性

原田陽 [1)]，永井拓生 [2)]，木村俊明 [3)]
1) 滋賀県立大学大 学院環境科学研究科，to13yharada@ec.usp.ac.jp
2) 滋賀県立大学 環境科学研究院，講師，博士（環境科学）
3) 名古屋市立大学 芸術工学研究科，准教授，博士（工学）

1 序論

近年，建築関連産業が脱炭素実現を目標にかかげるなか，竹の建築材料としての利用に対する国際的な関心が高まっている。竹は優れた力学的特性に加え，短期的な再生力と高い二酸化炭素吸収能力を有しており，持続可能な建築材料として，その潜在力への期待は大きい。しかし，丸竹を構造材として利用するには，いまだ多くの課題があり，主要な課題の一つとして，接合部の開発があげられる。接合部には高い力学的特性を要するだけでなく，竹の不規則な断面形状に追従し，施工が容易であるという要件を満たす必要がある。丸竹構造の接合部の設計はこれまでに多くの提案がされてきた。例えば，著者らのグループは過去にロープを用いた簡易的な接合部の提案 [1)]などを行ってきたが，恒久的な建築物に使用するには性能や信頼性の面で難がある。また，竹自体に比べ強度，剛性が大幅に低下する場合や，力学的特性は優れているものの施工が複雑な場合も多く [2)]，国際的にも，いまだ標準的と呼べる接合法が存在するとは言い難い。

以上を背景とし，本研究では 3D プリントした炭素繊維補強樹脂を用いた接合法を提案する。3D プリントによって竹の不規則な断面形状に柔軟に適応させることができることに加え，高い力学的特性が期待できる。

本研究では，丸竹を軸力が支配的な構造形式（トラス，アーチ構造等）に用いることを想定し，丸竹同士の間で引張･圧縮軸力を伝達可能な接合部の開発を目的とする。まず接合部のビスに関係するパラメータと接合部性能との関係を実験と数値解析により検証する。次いで，実大規模のトラス構造の設計例題に本接合部を適用し，実用可能性を検証する。

2 3D プリント樹脂接合部の概要

2.1 接合部形状

図 1 に本研究で想定する接合部のイメージ図を示す。丸竹端部の内稈に 3D プリントにより成形出力した樹脂製の詰め物を挿入する。この際，竹の稈断面は真円ではなく形状のばらつきも大きく，樹脂製詰め物を竹の内稈の全周にわたり合わせることは難しいため，ここでは断面形状を十字型とし，4 点で竹の内稈に接する形状とする。樹脂詰め物と竹稈壁の接辺上で稈壁の外からビスを打ち込み，稈壁と樹脂詰め物の間の 1 面せん断抵抗により竹稈と接合部との間の軸力を伝達する方式である。

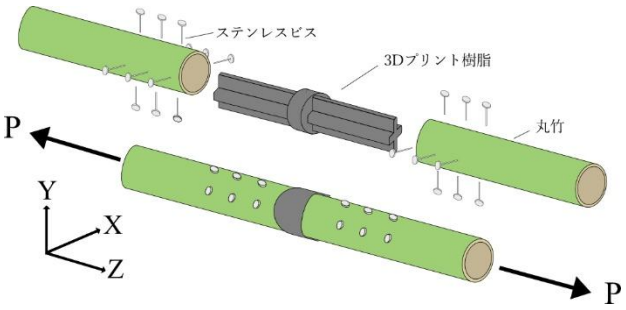


図 1　3D プリント樹脂を用いた丸竹同士の軸力伝達接合部のイメージ

2.2 3D プリントの方法および材料

3D プリントにはさまざまな種類の充填方式があるが，印刷物に機械的性能と耐久性が求められる場合，FDM 方式が一般的に用いられる。この方式では，出力ノズルに機械的に樹脂フィラメントを送り込み，熱で溶解した樹脂を押し出し積層させて造形物をプリントする方法である。したがって，造形物にはビルドプレートの面と平行に一定間隔で積層面が生じることとなり，これにより出力された樹脂の力学的特性に強い異方性が与えられる。図 2 に FDM 方式で印刷した接合部用樹脂と積層方向との関係を示す。図中，「積層面外方向 : OLD」は 3D プリントにおいて積層が進む方向＝ビルドプレート面に直交する方向を表し，「積層面内方向 : ILD」は積層方向に直交する方向＝ビルドプレートに平行な方向を表す。

本研究の樹脂接合部を印刷する際の積層方向は図 1 の３方向があり得るが，Z 方向は積層面外方向と軸力の方向が一致するため，特に引張強度に乏しく，望ましくない。そこで，X・Y 方向のうち印刷時の安定性がよいほ

うを選択することとなる。この場合，ビスが樹脂に打ち込まれる面は積層面内・面外方向の２通りの可能性があり，接合部性能への影響を確認する必要がある。

本研究で 3D プリントに用いる材料は，炭素繊維が樹脂に混ぜ込まれた炭素繊維補強フィラメントである PAHT CF15（BAFS 製）[3]である。また，3D プリント樹脂の出力条件は，過去の実験 [4]により良好な性能が確認された充填率 60%，充填形状三角形を採用した。その他の設定はメーカー推奨のものとした。

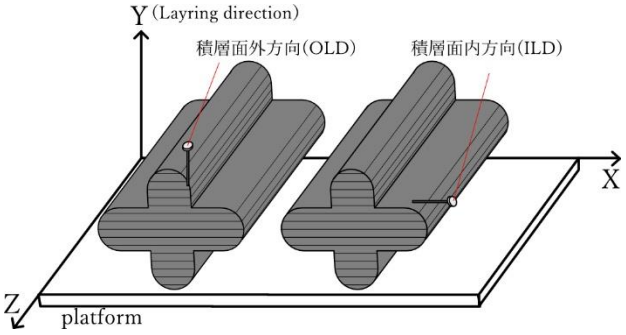


図２　接合部用樹脂の積層方向とビス打ち込み方向の関係

3　接合部の載荷試験

3.1　試験方法

図 3 に接合部を模した試験体の載荷試験方法を示す。図 1 の接合部に引張軸力が作用し，ビスに竹稈の木口側に向かうせん断力が作用する状況を再現している。

表 1 に試験体の諸元を示す。竹はすべて 2024 年に近江八幡市で伐採したモウソウチクであり，伐採後，6 か月以上の自然乾燥期間を設けている。本実験ではビスを打ち込む方向（積層面内方向：ILD, 積層面外方向：OLD）とビス直径（4 mm, 6 mm）による違いを比較する。このため，竹の材質の違いが接合部の性能の差を除くため，竹は同一節間内から隣接して切り出した試験体を用いる。ビスはステンレス製の皿タッピングビスを使用し，ビス長さは 35 mm である。ビスを打ち込む際には，ビス直径と同径の先孔を設ける。

また，本接合部の破壊モードはビスと竹のビス孔が接触する箇所に生じる支圧もしくはその付近に生じる竹稈周方向（断面外周の接線方向）のひずみによる破壊が考えられるので，同図に示すように，ビス孔と竹稈木口の間で一定間隔の位置で周方向のひずみの変化を計測する。

試験は各条件の組み合わせに対し 3 体実施した。載荷速度は 2 mm/min とし，荷重が最大値の 6 割まで低下するか，変位が 25 mm となった時点で試験を終了した。

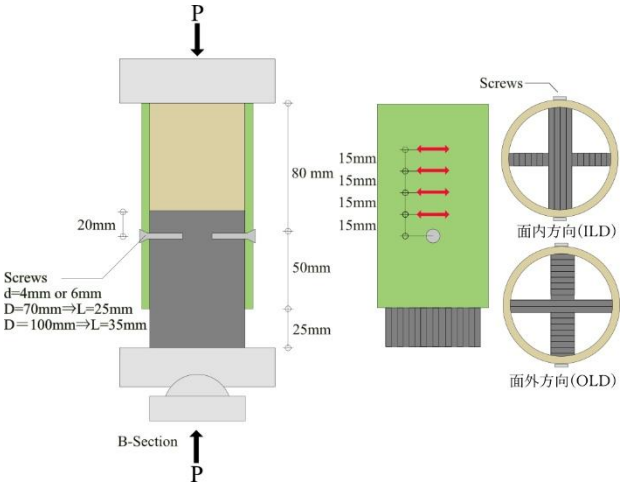


図３　ビス１面せん断試験の方法

表１　ビス１面せん断試験の試験体諸元

	積層方向	ビス直径[mm]	直径[mm]	稈厚[mm]
ILD_d4_1	面内方向	4	88.4	8.05
ILD_d4_2			87.1	7.76
ILD_d4_3			83.7	7.65
OLD_d4_1	面外方向		89.6	8.47
OLD_d4_2			87.1	7.95
OLD_d4_3			85.0	7.62
ILD_d4_4	面内方向	4	73.4	6.50
ILD_d4_5			70.1	6.78
ILD_d4_6			66.9	6.40
ILD_d6_4		6	73.5	6.65
ILD_d6_5			70.6	6.48
ILD_d6_6			67.0	6.02

3.2　試験結果

図 4, 5 に試験結果を示す。図の縦軸は荷重をビスの本数 2 で除した値，横軸は変位（試験機ストローク）である。また，表 2 に各試験結果より求めた特性値を示す。表中の「接合部耐力」はビスの強度と文献 [5]の p.86 を基に求めた理論値であり，面圧強度については圧縮強度を用いて評価した。樹脂の値は 20 N/mm² [4] とし，竹については回帰直線から得られた関数式 [6]に基づいて算出した。初期剛性は原点と最大荷重の 20%の荷重時の座標，割線剛性は最大荷重の 20%と 60%の座標を結ぶ直線の勾配として算出した。

図 4 はビス打ち込み方向の比較である。試験体 2（図 4 中）では，最大荷重に達する前に OLD は若干剛性が低下しているが，それ以外は最大荷重，剛性とも大きな差は見られない。ただし，降伏後，OLD の試験体は変位 20 mm 程度で荷重が急激に低下する特徴がある。

図 5 はビス直径の比較である。両者の原点付近における初期剛性にはほとんど差がない。最大荷重はいずれの

試験体においてもビス直径 6 mm のほうが大きく，最大荷重に達した後，変位 10～20 mm に達した点で耐力が急激に低下する。一方，ビス直径 4mm の試験体は，最大荷重に達した後も荷重が大きく低下することなく変位が増大し，ビス直径 6 mm に比べ大きな粘りを発揮している。

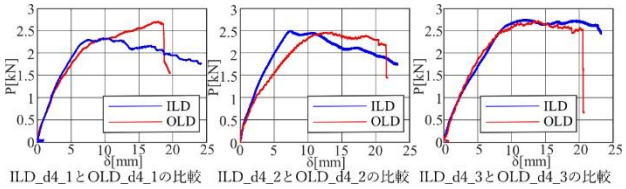


図 4 ビス打ち込み面の比較試験結果

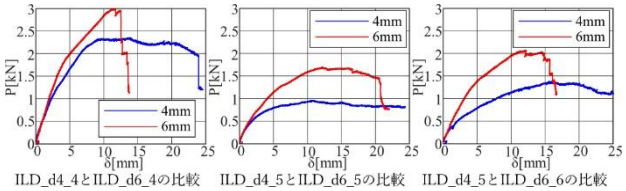


図 5 ビス直径の比較結果

表 2 ビス 1 面せん断試験の特性値のまとめ

		初期剛性 [kN/mm]	割線剛性 [kN/mm]	最大荷重 [kN]	降伏荷重 [kN]	接合部耐力* [kN]
積層面比較	ILD_d4_1	0.585	0.415	2.364	2.180	1.967
	ILD_d4_2	0.714	0.382	2.498	2.228	1.976
	ILD_d4_3	0.538	0.289	2.77	2.571	1.979
	OLD_d4_1	0.563	0.316	2.714	2.504	1.955
	OLD_d4_2	0.559	0.262	2.46	2.235	1.970
	OLD_d4_3	0.491	0.362	2.742	2.491	1.980
ビス比較	ILD_d4_4	0.432	0.312	2.366	2.163	2.013
	ILD_d4_5	0.335	0.165	1.15	0.768	0.738
	ILD_d4_6	0.333	0.121	1.386	1.221	0.738
	ILD_d6_4	0.484	0.415	3.006	2.622	2.954
	ILD_d6_5	0.363	0.201	1.69	1.532	2.930
	ILD_d6_6	0.347	0.268	2.088	1.857	2.949

* 木質構造接合部設計マニュアル（日本建築学会，2016）p.86 より算定。

3.3 周方向ひずみの比較

図 6 にビス直径 4 mm・6 mm の試験体の荷重－変位および周方向ひずみ－変位関係を示す。図中の青線は荷重－変位，赤・緑線は周方向ひずみを表している。また，緑線はビスの位置から 60 mm 離れた点の周方向ひずみである。ビス直径 4 mm・6 mm いずれの試験体においても，ビスからの距離が近いほど周方向ひずみの値が大きい。ビス直径 4 mm の試験では，最大荷重に達したあたりからひずみの勾配が徐々に大きくなるが，ひび割れが生じ（図 7 左），ひずみが急激に増大してもなお荷重はあまり低下しない。一方，ビス直径 6 mm の試験体では，最大荷重に達する前に周方向ひずみの勾配が大きくなりはじめ，最大荷重に達するとほぼ同時にひずみもピークに達している。その後，ひび割れが木口に向かって進展し，荷重が急速に低下する（図 7 右）。

図 8 は試験後の試験体を縦方向に割った断面の写真である。ビス直径 4 mm の試験体では明らかにビスに曲げ変形が生じており，一方，ビス直径 6 mm の試験体ではビスはほぼ直線的な形状を保っている。前述の図 6 にはビスの降伏曲げが先行するモードに対応する荷重を桃点線で示している。ビス直径 4 mm（l/d＝8.75）の試験体では荷重がビスの降伏耐力を上回っており，竹稈よりもビスが先に降伏する破壊モードである。また，ビス直径 6 mm（l/d＝5.83）ではビス耐力よりも荷重が小さく，竹稈壁に先に破壊を生じるモードであると考えられる。

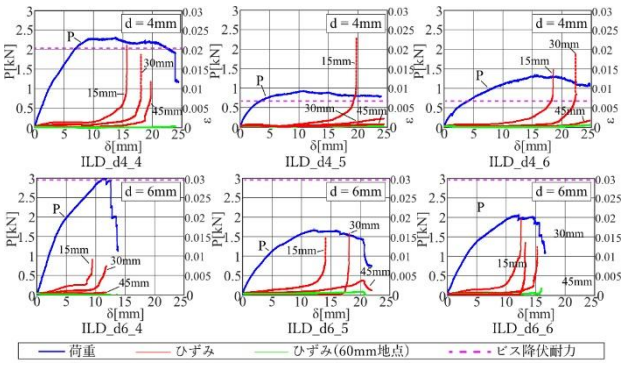


図 6 荷重・周方向ひずみ－変位関係

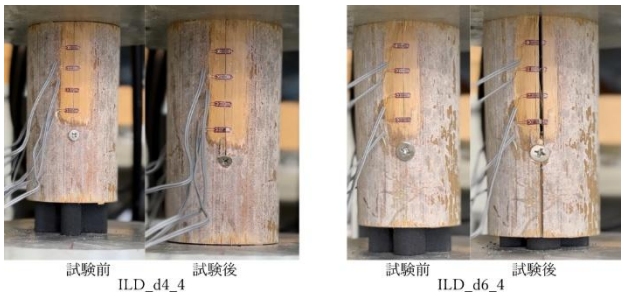


図 7 最大荷重時と試験後の試験体写真

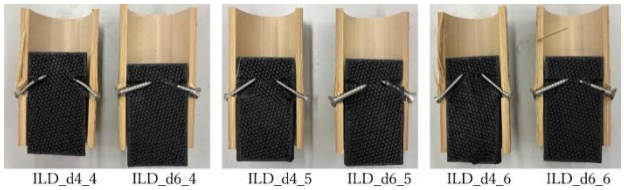


図 8 ビス 1 面せん断試験体の載荷試験後の縦方向断面

4 接合部の有限要素解析

4.1 実験モデルの解析

本接合部において竹稈に生じる周方向ひずみの分布を有限要素解析により確認し，実験結果と比較する。

図 9 に解析モデルを示す。竹稈の断面は正円の円筒形とし，稈壁は板要素（4 節点離散 Kirchhoff 要素）でモデル化する。各板要素の辺長は，周方向は周長の 80 等分，

稈軸方向は板要素形状がほぼ正方形となる長さとした。稈壁厚は板要素の板厚で再現している。円筒の直径，稈壁厚は，表 3 に各モデルの計測寸法と同様とした。材料定数の設定にあたっては竹稈壁の直交異方性を考慮する。直交異方性の弾性定数は 9 個であるが，このうち面内のヤング係数，ポアソン比については著者ら[6,7]，それ以外については Akinbade[8]の調査結果をもとに算出した。

円筒の下端から 50 mm の位置の節点をビスの芯位置とし，その節点の周囲 4 要素を削除し，ビス穴を再現した。荷重は，ビス位置から上端向きに節点荷重として入力し，その大きさは表 2 に示す各試験体の降伏荷重の値とした。また，実際の試験体の竹稈上部の木口面は載荷板に接触するため（図 3），水平方向の移動が摩擦により拘束される可能性があるが，実構造の接合部（図 1）における竹稈木口は何の拘束されておらず，実験と状況が異なる。そこで，数値解析においては，竹稈上部の木口部の境界条件として，全周に亘り節点の水平移動を拘束した拘束ありモデル(a)，および拘束なしモデル(b)，の 2 種類を検討する。ただし，(b)については解析上特異となることを防ぐため，モデルの対称性により変位を生じない箇所・方向のみ拘束を設けている。

なお，本稿ではビスと竹稈壁の接触部付近の局所的な応力の乱れやビスと竹稈壁との接触やめり込みが進展することによる非線形性は無視し，線形弾性解析を行う。有限要素解析には Midas iGen（Ver. 955 R1x）を用いる。

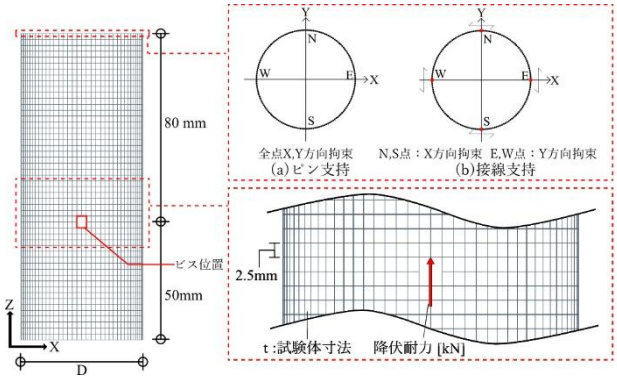


図 9　ビス 1 面せん断試験の有限要素解析モデル

表 3　竹稈壁の各材料定数

	繊維方向ヤング係数 [N/mm²]	周方向ヤング係数 [N/mm²]	ポアソン比	繊維方向せん断弾性係数 [N/mm²]	周方向せん断弾性係数 [N/mm²]
ILD_d4_4	10397	2350	0.25	4159	940
ILD_d4_5	10920	2350	0.25	4368	940
ILD_d4_6	11426	2350	0.25	4570	940
ILD_d6_4	10375	2350	0.25	4150	940
ILD_d6_5	10836	2350	0.25	4334	940
ILD_d6_6	11418	2350	0.25	4567	940

4.2　実験モデルの解析結果

図 10 は竹稈の外表面の周方向ひずみについて，実験値と FEM 解析結果を比較したものである。縦軸はビス芯位置からの距離，横軸はひずみである。実験値は計測位置におけるひずみの値を，解析値は各要素の節点におけるひずみ（平均値）を結んだ折れ線である。ここで，ひずみは周方向直応力度を表 3 の繊維直交方向ヤング係数で除して簡易的に求めた。また，応力が乱れる荷重入力節点の付近は省略し，ビス孔芯から 15 mm 離れた箇所から木口までのひずみ分布を示している。

実験値，解析値のいずれもビスの付近ではひずみは正の値で，距離が遠くなるにつれひずみの値が減少し，縁端部では負の値となっている。また，実験値のひずみ分布は(a)拘束ありの解析値と比較的よく整合しており，特にひずみの符号が反転する箇所をよく捉えている。

また，(b)拘束なしモデルの解析値はひずみの値が他と比べ全体的に負側に偏っている。したがって，竹稈木口に拘束がない場合は周方向の引張ひずみがより小さくなるため，本実験は周方向の引張ひずみの評価法としては安全側の評価になると考えられる。

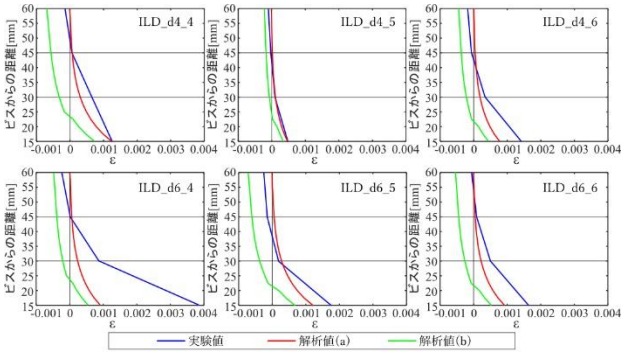


図 10　実験値と FEM 解析による周方向ひずみの比較

5　ビス複数列配置モデルの解析結果

前節にて，有限要素解析により接合部実験によって生じる周方向ひずみの分布を一定の正確性をもって予測しうることが確認できた。そこで，ビスを繊維方向に複数列配置した場合の周方向ひずみの分布を FEM 解析により検証する。

図 11 にビスを複数本配置した接合部のイメージを示す。竹稈の直径は 100 mm，稈壁厚は 10 mm とし，モデル作成の方法は基本的に前節と同様である。また，竹稈木口の境界条件は拘束なしとする。竹稈接合部の耐力・剛性の向上を目的に，N・S・E・W の 4 列にビスを各 4 本，計 16 本を配置する。実際の接合部では，NS 方向と EW 方向は樹脂詰め物の積層面外方向・面内方向に対応

するが，前節に示したように，樹脂詰め物の積層方向によるビス接合部の耐力・剛性に顕著な違いは見られなかったため，ここでは各ビスが接合部の軸力を均等に負担するものとし，1 本あたりの荷重は 2.04 kN（ビス直径 4 mm の実験値の平均値）とする。また，ビスの長さによっては，N 列と E 列のように直交するビス同士が干渉するため，直交するビスの位置を千鳥配置としたモデルについても検討を行う。

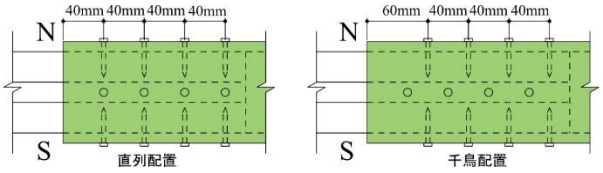


図 11　ビス多段配置の接合部のイメージ

図 12 に解析結果を示す。縦軸は竹稈状の位置，横軸は周方向ひずみである。ビスの配置位置が等しい N 断面上のひずみ分布は，直列・千鳥配置のいずれのモデルでもほぼ同様であるが，千鳥配置では N 断面の木口近くのひずみが若干大きくなっている。一方，千鳥配置の W 断面では木口近くのひずみが小さくなっている。いずれにおいても，ビス同士の間隔のおおよそ中央でひずみの正負が反転しており，ビス同士に 40 mm 程度の間隔を設けておけば，隣接するビスの荷重負担による周方向の引張ひずみは生じないことが分かる。

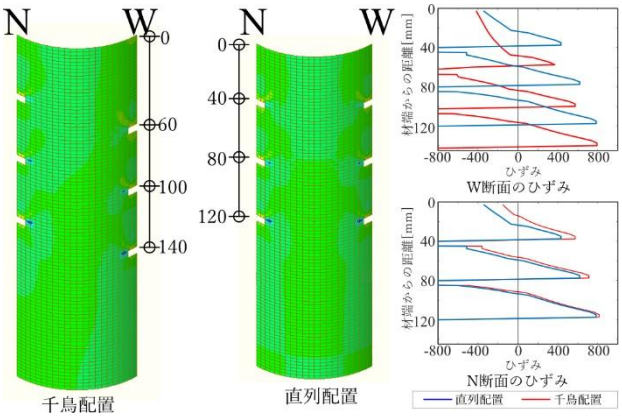


図 12　各モデルの周方向ひずみ分布

6　丸竹トラス構造の試設計と解析

6.1　検証モデルの概要

本稿で提案する接合部の実用性を検証するため，本接合部を使用した実建築規模のトラス構造の試設計および解析を行う。

図 13 に丸竹トラス構造のイメージを示す。トラスの形状やスパン，アスペクト比は稲山 [9]の山形トラスの設計例題を参考にした。接合部は，ビス配置を 4 列×4 本の計 16 本とし，前節の解析結果をもとに端あき距離とビス間隔を 40 mm とした。トラス両端の支持方法は，何らかの下部構造にアンカーボルトで固定されることを想定し，節点の 3D プリント樹脂を介してベースプレートに接合する形式とした。

図 14 にトラスの解析モデルを示す。屋根荷重は 700 N/m^2 とし，トラスは 910 mm 間隔で配置されるものとして各節点に荷重を入力する。トラス部材はモウソウチクの丸竹とし，Nagai [6]の実験結果をもとにヤング係数（繊維平行方向）を 6,151 N/mm^2 とした。また，接合部の剛性はトラスの材端ばねとしてモデル化し，その値は表 2 のビス直径 4 mm の割線剛性にビスの本数を乗じた値とする。

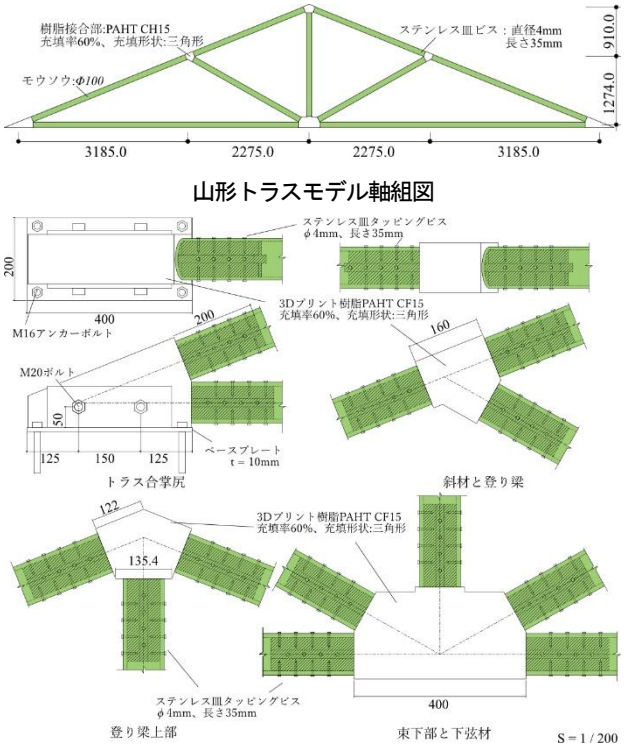


図 13　丸竹トラス構造の軸組みと各部詳細のイメージ

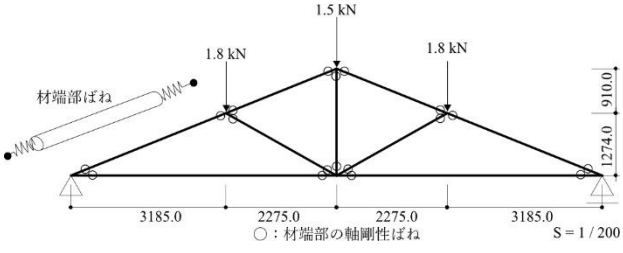


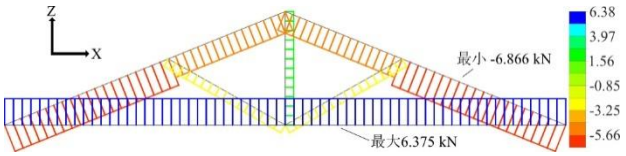
図 14　トラスの解析モデル

6.2　トラス構造の解析結果

図 15 に変形図を示す。スパン中央部の最大変位は 32.33 mm（δ/L=1/338）であり，弾性変形は一般的な使用上の規定（たわみスパン比 1/300 以下）を満足できている。また，最大軸力は登り梁位置で 6.87 kN で，接合部耐力 (2.04×16＝32.54 kN) はこれを十分に上回っており，実用的な耐荷重性能を有していると言える。



変形図



軸力図

図 15　山形トラス構造モデルの解析結果

7　結論

3D プリントした炭素繊維樹脂と竹稈壁をステンレスビスの 1 面せん断抵抗で接合する方法を提案し，実験および数値解析により耐力・剛性の評価を行った。また，同接合部を実建築規模のトラス構造に適用した設計例，解析結果を示し，本接合方法の有効性の検証を行った。

接合部の載荷試験では，樹脂の積層方向とビスの打ち込み方向の違いは，耐力・剛性ともに顕著な差は生じなかった。また，ビス直径 4 mm（l/d＝8.75）と 6 mm（l/d＝5.83）の比較では，4 mm では竹や樹脂よりもビスが先に降伏する破壊モード，6 mm では竹稈壁に先にひび割れを生じる破壊モードとなった。前者は靭性に優れ，後者は前者よりも耐力・初期剛性が大きい。

また，ビスと竹稈壁の接触により生じる竹稈の周方向のひずみ分布について，実験と有限要素解析により調査した結果，ビス同士のおおよそ中間の位置でひずみがほぼゼロとなり，繊維方向に沿って複数のビスを配置できる可能性が確認できた。

本接合部を適用した丸竹構造の山形トラスの試設計を示し，一般的な屋根荷重に対する解析を行った。提案した接合方法は，10 m 程度のスパンの屋根架構に十分に適用できる可能性を示した。

今後の課題として，ビスを複数配置した場合の実験による検証，竹の強度と接合部の破壊モードの関係の確認，樹脂接合部のクリープ特性の評価等について研究を進める予定である。

謝辞　本研究の一部は，前田記念工学振興財団の研究助成（2024）および科研費（21K14292）を受け実施した。

参考文献

1) 永井拓生，堀江健太，後藤優治：ロープ接合法を用いた竹トラス構造の実大試験と数値解析ー竹を構造材料として用いた仮設建築物の設計に関する研究ー，日本建築学会技術報告集, vol. 23, no. 53, pp. 99-102, 2017. 2.
2) A. Widyowijatnoko and K. A. Harries: 20 – Joints in bamboo construction, *Nonconventional and Vernacular Construction Materials, Characterization, Properties and Applications*, Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pp. 561-596, 2020.
3) https://www.raise3d.jp/tds_ultrafuse_paht_cf15.pdf
4) Y. Harada, T. Nagai and T. Kimura: Preliminary study on the application of 3D-printed resin for joints in round bamboo structures, *Proceedings of the 14th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures (APCS 2025)*, C000064, 2025. 6.
5) 日本建築学会：木質構造接合部設計マニュアル, 2016.
6) T. Nagai: Structural morphology of bamboo focusing on relationship between culm geometries and mechanical characteristics, *Proceedings of IABSE Symposium 2025*, pp. 2403-2410, 2025. 5.
7) T. Nagai: Formulation of elastic stress in the fiber transverse direction of full-culm bamboo subjected to bending, *Proceedings of the IASS 2024 Symposium Redefining the Art of Structural Design*, 2024. 8.
8) A. Y. Akinbade: Mechanical and Morphological Characterization of Full-Culm Bamboo, Doctoral thesis, Swanson school of engineering, University of Pittsburgh, 2020. 3.
9) 稲山正弘：中大規模木造建築物の構造設計の手引き，彰国社, 2017. 2.

複素フーリエ係数と最小二乗法によるエレメントフリー解析

佐藤敬太 1)，澤田樹一郎 2)
1)島根大学総合理工学部建築デザイン学科，大学院生
2)島根大学総合理工学部建築デザイン学科，教授，博士(工学)

1. 序

近年、有限要素法において不可欠だった領域要素分解、すなわちメッシュ生成を必要としていない数値解析法に関する研究[例えば1)-4)]が行われている。それらの解析方法はエレメントフリー法、又はメッシュレス法などと呼ばれている。

ここでは、著者らが独自に開発した複素フーリエ係数と最小二乗法によるエレメントフリー法を用いた片持ち引張棒問題と平面応力板問題についての解析結果を報告する。

2. 片持ち引張棒問題

片持ち引張棒における x 軸上の変位を次式のようにフーリエ級数で仮定する。

$$u(x)=\frac{1}{n_{fx}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}Z_I\cdot e^{z_0\cdot 2\pi jI\frac{x}{l_x}} \tag{1}$$

ここで、
j：虚数単位
π：円周率
e：自然対数
u(x)：片持ち梁における x 方向変位
n_{fx}：x 方向フーリエ次数
Z_I：複素フーリエ係数
z_0：変位分布の極端な凹凸をある程度平坦化するための係数

(1)式を x で微分すると次式のようにひずみ ε (x)を表せる。

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{n_{fx}}(Z_0\cdot 2\pi j\cdot\frac{1}{l_x})\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}I\cdot Z_I\cdot e^{z_0\cdot 2\pi jI\frac{x}{l_x}} \tag{2}$$

また、ひずみ応力関係式を用いると、次式のように応力度 σ (x)を定式化できる。

$$\sigma(x)=E\varepsilon(x)=E\cdot\frac{1}{n_{fx}}(Z_0\cdot 2\pi j\cdot\frac{1}{l_x})\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}I\cdot Z_I\cdot e^{z_0\cdot 2\pi jI\frac{x}{l_x}} \tag{3}$$

(1)式、(2)式、(3)式は、いずれも複素フーリエの線形和となっている。さらに、x 軸方向の応力のつり合い条件式も導出でき、複素フーリエ係数の線形和として定式化できる。これらの前述した条件式を連立させると、Z_I を未知数とした連立方程式が得られる。その方程式 k から最小二乗法により複素フーリエ係数の値を計算し、得られた係数値を再び(1)式や(2)式に代入すれば、変位等の値を得ることができる。

3. 平面応力板問題

平面応力板における xy 平面上の変位を次式のように、フーリエ級数で仮定する。

$$u_x(x,y)=\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zx_{I,J}\cdot e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)} \tag{4}$$

$$u_y(x,y)=\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zy_{I,J}\cdot e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)} \tag{5}$$

ここで、
j：虚数単位
π：円周率
e：自然対数
$u_x(x,y)$：x y 平面座標点における x 方向変位
$u_y(x,y)$：x y 平面座標点における y 方向変位
n_{fx}：x 方向フーリエ次数
n_{fy}：y 方向フーリエ次数
$Zx_{I,J}$ ，$Zy_{I,J}$：複素フーリエ係数
l_x：x 方向の矩形長さ
l_y：y 方向の矩形長さ
z_0：変位分布の極端な凹凸をある程度平坦化するための係数

(4)式の両辺を x で偏微分すると、次式が得られる。

$$\varepsilon_x(x,y)=\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zx_{I,J}\cdot\frac{z_0\cdot 2\pi jI}{L_x}e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)} \tag{6}$$

同様に、(5)式の両辺を y で偏微分すると、次式が得られる。

$$\varepsilon_y(x,y)=\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zy_{I,J}\cdot\frac{z_0\cdot 2\pi jJ}{L_y}e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)} \quad (7)$$

ここで、

$\varepsilon_x(x,y)$：x y 平面座標点における x 方向ひずみ

$\varepsilon_y(x,y)$：x y 平面座標点における y 方向ひずみ

また、(3)式の両辺を y で偏微分、(4)式の両辺を x で偏微分し、この 2 式を加えると、次式が得られる。

$$\gamma(x,y)=\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zx_{I,J}\cdot\frac{z_0\cdot 2\pi jJ}{L_y}e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)}$$

$$+\frac{1}{n_{fx}\cdot n_{fy}}\sum_{I=0}^{n_{fx}-1}\sum_{J=0}^{n_{fy}-1}Zy_{I,J}\cdot\frac{z_0\cdot 2\pi jI}{L_x}e^{z_0\cdot 2\pi j\left(I\cdot\frac{x}{L_x}+J\cdot\frac{y}{L_y}\right)} \quad (8)$$

ここで、

$\gamma(x,y)$：x y 平面座標点における xy 方向せん断ひずみ

(4)から(8)式は、いずれも複素フーリエ係数の線形和となっている。ヤング係数、ポアソン比、ラメ定数等によるひずみ応力関係式を用いると、x 方向応力度 σ_x、y 方向応力度 σ_y、せん断応力度 τ_{xy} も複素フーリエ係数の線形和として定式化できる。さらに、x 方向、y 方向の応力のつり合い条件も偏微分により導出でき、複素フーリエ係数の線形和として定式化できる。

また、境界条件として、変位拘束点、荷重点に関するものだけでなく、拘束点、荷重点以外の物体境界面上の応力法線成分も 0 とする必要がある。しかし、いずれも複素フーリエ係数の線形和として定式化できる。したがって、平面応力板の xy 平面上に、虚数、実数係数それぞれの複素フーリエ係数の総数以上の評価点を設けて、各評価点について前述の条件式を並べていき、それらを連立させると、複素フーリエ係数を未知数とする連立方程式が得られる。最小二乗法により複素フーリエ係数の値を計算し、得られた係数値を再び、(1)式や(2)式等に代入すれば、変位等を得ることができる。

4. 数値解析例(片持ち引張棒問題)

図 1 片持ち引張問題について、表 1 の条件下での数値計算例を示す。

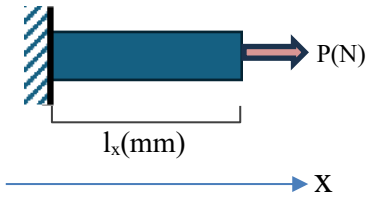


図 1　片持ち引張棒モデル

表 1　解析モデル概要

荷重：P=1000N(③は N/mm²)
部材長さ：lx=400mm
断面積：A=100mm²
ヤング係数：E=200000N/mm²
ポアソン比：μ =0.3

本提案手法で与えたフーリエ次数 n_{fx} は 3 である。また、z_0 は、0.05 としている。したがって、今回の引っ張り棒問題では、複素フーリエ係数 Z_{xI} の実数係数の未知数は 3、虚数係数の未知数も 3、よって解かれるべき連立方程式の未知数は、6 となる。一方、応力の釣合条件式の数は 5、x 方向の境界条件数は 1、荷重店における応力度に関する条件数 1 で、条件式数の合計は 7 となる。

なお、この問題で作成した python による計算プログラムを付録 1 に掲載しておく。プログラム上では、変位、ひずみ、応力、各種条件式の計算を関数としてあらかじめ定義しておき、各種条件式の値を計算することで、解かれるべき方程式の係数行列を作成している。なお、境界条件式のうち、評価点が変位拘束点及び荷重点となる場合には、係数行列を 0 とするか、代わりに変位境界条件に相当する係数行列を与える処理を行っている。連立方程式は、python の Scipy ライブラリの最小二乗法 lstsq を用いて、解かれている。

図 2 は、本提案手法により得られた変位、応力のグラフを示している。

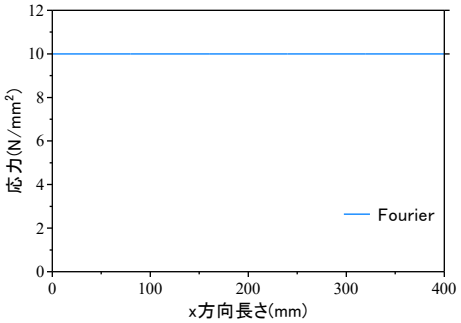


図 2(a)　変位グラフ(Fourier)

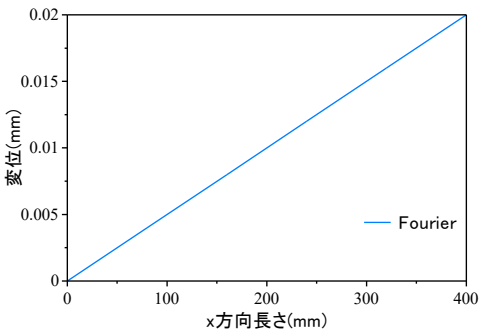


図 2(b)　応力グラフ(Fourier)

また、有限要素解析ソフトウェア Lisa8.0 による解析結果との比較を以下に示す。

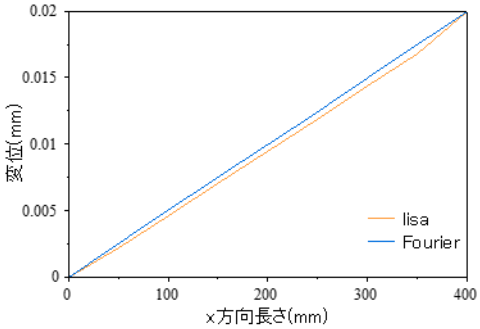


図 3(a)　変位比較グラフ

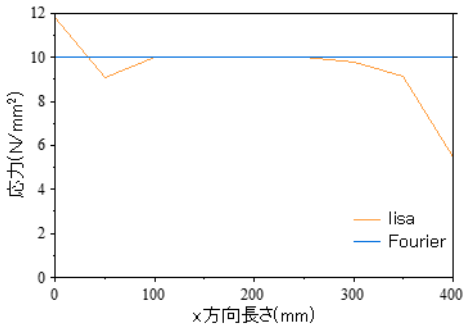


図 3(b)　応力比較グラフ

図 3 の(b)では Lisa の解析グラフに多少の凹凸があるが、これは解析する際の要素分解が不足していたのではないかと考えられる。比較グラフを見ると、モデル①は多少の誤差があるが、Lisa と解析結果がほとんど一致していることがわかる。

5. 数値計算例(平面応力板問題)

図 6 に示す平面応力板の数値計算例を示す。ここで、板厚は、32(㎜)、ヤング係数 E は、200(GPa)、ポアソン比νは、0.3 としている。図中の赤点は、評価点の位置で、x 方向 6 点、y 方向 3 点の計 18 点である。

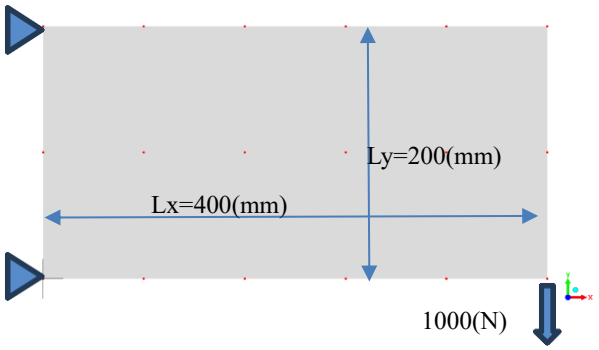


図 4　平面応力板

本提案手法で与えたフーリエ次数 n_{fx}, n_{fy} は、それぞれ、6, 3 である。また、z_0 は、005 としている。したがって、今回の平面応力板問題では、複素フーリエ係数 $Zx_{I,J}$ の実数係数の未知数は 18、虚数係数の未知数も 18、$Zy_{I,J}$ のケースも合わせると、解かれるべき連立方程式の未知数は、72 となる。一方、応力の釣合条件式の数は、評価点数 18 の 2 倍で 36、ひずみの適合条件式の数は、18、x 方向垂直応力度の物体境界上の境界条件数は、6、y 方向垂直応力度の物体境界上の境界条件数は、12、せん断応力度の物体境界上の境界条件数は、18 で、条件式数の合計は、90 となる。

なお、この問題で作成した python による計算プログラムを付録 2 に掲載しておく。プログラム上では、変位、ひずみ、応力、各種条件式の計算を関数としてあらかじめ定義しておき、該当の複素フーリエ係数のみを順番に 1 とし、その他を 0 とする列ベクトルを与えて、各種条件式の値を計算することで、解かれるべき方程式の係数行列（90×72）を作成している。なお、境界条件式のうち、評価点が変位拘束点及び荷重点となる場合には、係数行列を 0 とするか、代わりに変位境界条件に相当する係数行列を与える処理を行っている。連立方程式（今回の例では、90 元 72 変数）は、python の Scipy ライブラリの最小二乗法 lstsq を用いて、解かれている。図 2 は、本提案手法により得られた u_x, u_y, σ_x の分布図を示している。

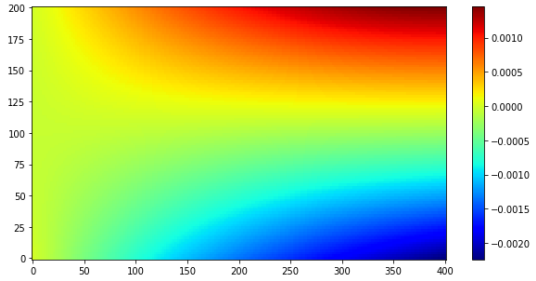


図 5(A)　u_x 分布図(提案手法)　　単位(mm)

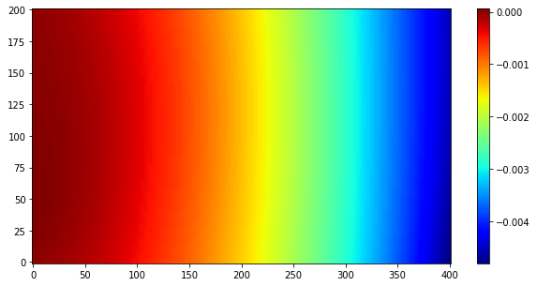


図 5(B)　σ_x 分布図(提案手法)　　単位(MPa)

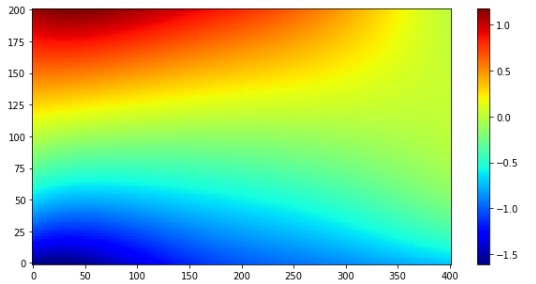


図 5(C)　σ_x 分布図(提案手法)　　単位(MPa)

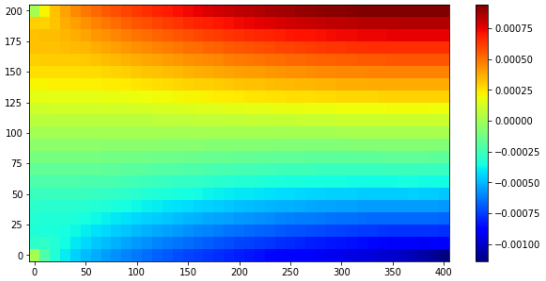


図 6(A)　u_x 分布図(有限要素解析)　　単位(mm)

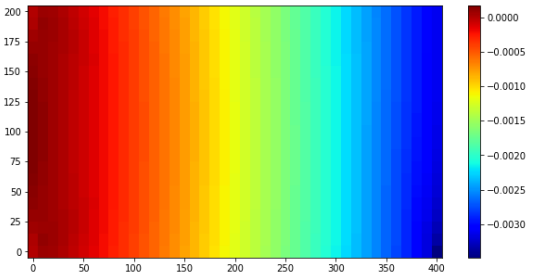


図 6(B)　u_y 分布図(有限要素解析)　　単位(MPa)

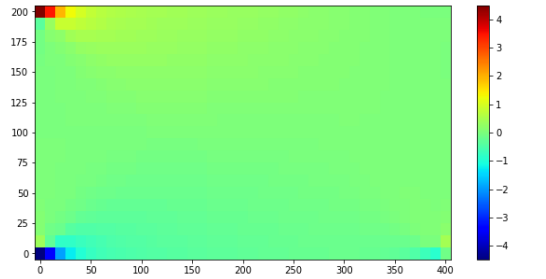


図 6(C)　σ_x 分布図(有限要素解析)　　単位(MPa)

図 5 は、比較として、有限要素解析フリーソフト LISA8.0（40×20 要素）による u_x, u_y, σ_x の分布図を示している。

本提案手法と有限要素解析は、分布傾向は、対応していることが確認されるが、数値的には、多少の差異が確認される。特に、応力度 σ_x 分布は、有限要素解析が、変位拘束点付近の著しい応力集中が確認されるのに対して、本提案手法では、応力集中傾向は緩やかである。この理由は、本提案手法では、y 軸上の評価点 y=100.0 の点のみで $\sigma_x=0$ の条件が与えられているためと考えられる。

表 1 は、前述の解析例から、z_0 の値のみを変更した場合に、本提案手法により得られた y 方向荷重点変位を示している。表 2 は、要素分割数を変更した場合に、有限要素解析（LISA8.0）により得られた y 方向荷重点変位と左端を固定端としたはり理論解を示している。本提案手法では、z_0 の設定値に極めて敏感に反応し、限られた設定値のみで有効と考えられる。

表 2　y 方向荷重点変位（本提案手法）

z_0	y 方向荷重点変位(mm)
0.05	-0.00480763
0.10	-0.00294913
0.20	-0.00031492
1.0	-2.36711e-09

表3　y方向荷重点変位（有限要素解析と梁理論解）

要素分割数	y 方向荷重点変位(mm)
40×20	-0.003484996
80×40	-0.004001107
160×80	-0.004517100
はり理論解(左端固定)	-0.005000000

6. まとめ

本報告では、著者らが独自に開発した複素フーリエ係数と最小二乗法によるエレメントフリー法を用いた片持ち引張棒問題と平面応力板問題についての解析結果を示し、その有効性について報告した。

付録１(python code)

```
"""

Element free Fourier method 1
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
lx = 400.0 ; E = 200000.0
nx = 6 ; nfx = 3 ; P = 1000.0 ; apaij = 2.0j*np.pi ;A=100.0
z0 = 0.05
def ux(x,zfx,z0): #deffinition of a displacement function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for i in range(nfx):
        izfs = izfs + zfx[i]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx))
    izfs = izfs/nfx
    return izfs
def epsx(x,zfx,z0): # deffinition of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for i in range(nfx):
        izfs = izfs + z0*apaij*i/lx*zfx[i]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx))
    izfs = izfs/nfx
    return izfs
def sx(x,zfx,z0):
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for i in range(nfx):
        izfs = E*epsx(x,zfx,z0)
    return izfs
def dsxdx(x,zfx,z0):
    izfs=complex(0.0,0.0)
    for i in range(nfx):
        izfs=izfs + E*(z0*apaij*i/lx)**2*zfx[i]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx))
    izfs = izfs/nfx
    return izfs
nc=1
a=np.zeros([nx+nc,nfx*2],dtype='float64')
b=np.zeros([nx+nc],dtype='float64')
for i in range(nx+nc):
    for j in range(nfx*2):
        x=lx*i/(nx)
        z=np.zeros([nfx*2],dtype='float64')
        z[j]=1.0
        zfx=z[0:nfx]+1.0j*z[nfx:2*nfx]
        if i==0:
            a[i,j]=ux(x,zfx,z0).real
            b[i]=0.0
        else:
            if i <nx:
                a[i,j]=dsxdx(x,zfx,z0).real
                b[i]=0.0
            else:
                a[i,j]=sx(x,zfx,z0).real
                b[i]=P/A
s=scipy.optimize.lsq_linear(a,b)
z=s.x[:]
zfx=z[0:nfx]+1.0j*z[nfx:2*nfx]
xx = np.linspace(0.0,lx,nx)
s1 = np.array([sx(x,zfx,z0).real for x in xx])
u1 = np.array([ux(x,zfx,z0).real for x in xx])
ds1 = np.array([dsxdx(x,zfx,z0).real for x in xx])
fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.plot(xx,u1)
plt.xlabel("")
plt.ylabel("")
fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.plot(xx,s1)
plt.ylim(0, 12)
plt.rcParams["font.size"] =1
```

付録 2(python code)

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sun Dec 10 14:57:19 2023
@author: kiichiro sawada
Element free Fourier method for plate analysis
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy

lx = 400.0 ; ly = 200.0 ; E = 200000.0 ; nyu = 0.3 ; ramda = E*nyu/(1+nyu)/(1-2*nyu)
myu = E/(2*(1+nyu)) ; ramda2 = 2*ramda*myu/(ramda + 2*myu)
t = 32.0 ; nx = 6 ; ny = 3 ; nfx = 6 ; nfy = 3 ; P = -1000.0 ; apaij = 2.0j*np.pi
z0 = 0.05

def ux(x,y,zfx,z0):  #deffinition of a displacement function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def uy(x,y,zfy,z0):  #deffinition of a displacement function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def epsx(x,y,zfx,z0):   # deffinition of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + z0*apaij*i/lx*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def epsy(x,y,zfy,z0):   # deffinition of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + z0*apaij*j/ly*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def gnma(x,y,zfx,zfy,z0):   # deffinition of a shear strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + z0*apaij*j/ly*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
            izfs = izfs + z0*apaij*i/lx*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs

def depsxdx(x,y,zfx,z0):   # deffinition of differential of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):
            izfs = izfs + (z0*apaij*i/lx)**2*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def depsxdy(x,y,zfx,z0):   # deffinition of differential of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):

izl=(z0*apaij*j/ly)*(z0*apaij*i/lx)*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
            izfs = izfs + izl
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def depsxdydy(x,y,zfx,z0):   # deffinition of differential of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):

izl=(z0*apaij*j/ly)**2*(z0*apaij*i/lx)*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
            izfs = izfs + izl
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def depsydx(x,y,zfy,z0):   # deffinition of differential of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):

izl=(z0*apaij*i/lx)*(z0*apaij*j/ly)*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
            izfs = izfs + izl
    izfs = izfs/nfx/nfy
    return izfs
def depsydxdx(x,y,zfy,z0):   # deffinition of differential of a strain function
    izfs = complex(0.0,0.0)
    for j in range(nfy):
        for i in range(nfx):

izl=(z0*apaij*i/lx)**2*(z0*apaij*j/ly)*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
            izfs = izfs + izl
```

```
        izfs = izfs/nfx/nfy
        return izfs
    def depsydy(x,y,zfy,z0):   # deffinition of differential of a strain function
        izfs = complex(0.0,0.0)
        for j in range(nfy):
            for i in range(nfx):
                izfs = izfs + (z0*apaij*j/ly)**2*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
        izfs = izfs/nfx/nfy
        return izfs
    def dgnmadx(x,y,zfx,zfy,z0):   # deffinition of differential of a shear strain function
        izfs = complex(0.0,0.0)
        for j in range(nfy):
            for i in range(nfx):

iz1=(z0*apaij*j/ly)*(z0*apaij*i/lx)*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
                iz2=(z0*apaij*i/lx)**2*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
                izfs = izfs + iz1 +iz2
        izfs = izfs/nfx/nfy
        return izfs
    def dgnmady(x,y,zfx,zfy,z0):   # deffinition of differential of a shear strain function
        izfs = complex(0.0,0.0)
        for j in range(nfy):
            for i in range(nfx):
                iz1=(z0*apaij*j/ly)**2*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))

iz2=(z0*apaij*i/lx)*(z0*apaij*j/ly)*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
                izfs = izfs + iz1 + iz2
        izfs = izfs/nfx/nfy
        return izfs
    def dgnmadxdy(x,y,zfx,zfy,z0):   # deffinition of differential of a shear strain function
        izfs = complex(0.0,0.0)
        for j in range(nfy):
            for i in range(nfx):

iz1=(z0*apaij*j/ly)**2*(z0*apaij*i/lx)*zfx[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))

iz2=(z0*apaij*j/ly)*(z0*apaij*i/lx)**2*zfy[i+j*nfx]*np.exp(z0*apaij*(i*x/lx+j*y/ly))
                izfs = izfs + iz1 + iz2
        izfs = izfs/nfx/nfy
        return izfs

    def sx(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of a stress function
        izfs = 2*myu*epsx(x,y,zfx,z0)+ramda2*(epsx(x,y,zfx,z0)+epsy(x,y,zfy,z0))
        return izfs
    def sy(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of a stress function
        izfs = 2*myu*epsy(x,y,zfy,z0)+ramda2*(epsx(x,y,zfx,z0)+epsy(x,y,zfy,z0))
        return izfs
    def txy(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of a stress function
        izfs = gnma(x,y,zfx,zfy,z0)*2*myu
        return izfs
    def dsxdx(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of differential of a stress function
        izfs = 2*myu*depsxdx(x,y,zfx,z0)+ramda2*(depsxdx(x,y,zfx,z0)+depsydx(x,y,zfy,z0))
        return izfs
    def dsydy(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of differential of a stress function
        izfs = 2*myu*depsydy(x,y,zfy,z0)+ramda2*(depsxdy(x,y,zfx,z0)+depsydy(x,y,zfy,z0))
        return izfs
    def dtxydx(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of differential of a stress function
        izfs = dgnmadx(x,y,zfx,zfy,z0)*2*myu
        return izfs
    def dtxydy(x,y,zfx,zfy,z0):     # deffinition of differential of a stress function
        izfs = dgnmady(x,y,zfx,zfy,z0)*2*myu
        return izfs

    # setup of the coefficient matrix aki and vector bk
    aki = np.zeros([3*nx*ny+4*nx+4*ny,nfx*nfy*4],dtype="float64")
    bk = np.zeros([3*nx*ny+4*nx+4*ny],dtype="float64")
    dx = 1/(nx-1)*lx
    dy = 1/(ny-1)*ly

    for i in range(nfx*nfy*4):
        z = np.full([nfx*nfy*4],0.0)
        z[i] = 1.0
        zfx = np.array(list(z[0:nfx*nfy])) + 1j*np.array(list(z[nfx*nfy:2*nfx*nfy]))
        zfy = np.array(list(z[2*nfx*nfy:3*nfx*nfy])) +
1j*np.array(list(z[3*nfx*nfy:4*nfx*nfy]))
        for k in range(2*nx*ny):
            ixy = k//2
            ix = ixy//ny ; iy = ixy%ny
            xk = float(ix/(nx-1))*lx ; yk = float(iy/(ny-1))*ly
            if k%2==0:
                aki[k,i] = dsxdx(xk,yk,zfx,zfy,z0).real+dtxydy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real
                bk[k] = 0.0
            elif k%2==1:
                aki[k,i] = dsydy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real+dtxydx(xk,yk,zfx,zfy,z0).real
                bk[k] = 0.0
                if xk==lx and yk==0.0:
                    bk[k] = -P/(dx*dy*t)
        for k0 in range(nx*ny):
            k = 2*nx*ny+k0
            ix = k0//ny ; iy = k0%ny
            xk = float(ix/(nx-1))*lx ; yk = float(iy/(ny-1))*ly
            a1 = depsxdydy(xk,yk,zfx,z0).real+depsydxdx(xk,yk,zfy,z0).real
            a2 = -2*dgnmadxdy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real
            aki[k,i] = a1+a2
            bk[k] = 0.0
        for k0 in range(2*nx):
            k = 3*nx*ny+k0
            ix = k0%nx
            iy = (k0//nx)*(ny-1)
            xk = float(ix/(nx-1))*lx
            yk = float(iy/(ny-1))*ly
            if xk == lx and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk==0.0 and yk==0.0:
                aki[k,i] = uy(0.0,0.0,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0
            elif xk==0.0 and yk==ly:
                aki[k,i] = uy(0.0,ly,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0
            else:
                aki[k,i] = sy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0
        for k0 in range(2*ny):
            k = 3*nx*ny+2*nx+k0
            ix = (k0//ny)*(nx-1) ; iy = k0%ny
            xk = float(ix/(nx-1))*lx ; yk = float(iy/(ny-1))*ly
            if xk == lx and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk==0.0 and yk==0.0:
```

```
                aki[k,i] = ux(0.0,0.0,zfx,z0).real ; bk[k] = 0.0
            elif xk==0.0 and yk==ly:
                aki[k,i] = ux(0.0,ly,zfx,z0).real ; bk[k] = 0.0
            else:
                aki[k,i] = sx(xk,yk,zfx,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0
        for k0 in range(2*nx):
            k = 3*nx*ny+2*nx+2*ny+k0
            ix = k0%nx ; iy = (k0//nx)*(ny-1)
            xk = float(ix/(nx-1))*lx ; yk = float(iy/(ny-1))*ly
            if xk == lx and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk == 0.0 and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk == 0.0 and yk == ly:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            else:
                aki[k,i] = txy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0

        for k0 in range(2*ny):
            k = 3*nx*ny+2*nx+2*ny+2*nx+k0
            ix = (k0//ny)*(nx-1) ; iy = k0%ny
            xk = float(ix/(nx-1))*lx ; yk = float(iy/(ny-1))*ly
            if xk == lx and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk == 0.0 and yk == 0.0:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            elif xk == 0.0 and yk == ly:
                aki[k,i] = 0.0 ; bk[k] = 0.0
            else:
                aki[k,i] = txy(xk,yk,zfx,zfy,z0).real ; bk[k] = 0.0

    z,dammy1,dammy2,dammy3 = scipy.linalg.lstsq(aki,bk)
    zfx = np.array(list(z[0:nfx*nfy])) + 1j*np.array(list(z[nfx*nfy:2*nfx*nfy]))
    zfy = np.array(list(z[2*nfx*nfy:3*nfx*nfy])) + 1j*np.array(list(z[3*nfx*nfy:4*nfx*nfy]))

    xx = np.linspace(0.0,lx,200) ; yy = np.linspace(0.0,ly,100)
    u1 = np.array([[ux(x,y,zfx,z0).real for x in xx] for y in yy])
    u2 = np.array([[uy(x,y,zfy,z0).real for x in xx] for y in yy])
    s1 = np.array([[sx(x,y,zfx,zfy,z0).real for x in xx] for y in yy])
    s2 = np.array([[sy(x,y,zfx,zfy,z0).real for x in xx] for y in yy])
    t1 = np.array([[txy(x,y,zfx,zfy,z0).real for x in xx] for y in yy])

    mxx,myy=np.meshgrid(xx,yy)
    fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.pcolormesh(mxx,myy,u1,cmap='jet')
    fig.colorbar(g)
    fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.pcolormesh(mxx,myy,u2,cmap='jet')
    fig.colorbar(g)
    fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.pcolormesh(mxx,myy,s1,cmap='jet')
    fig.colorbar(g)
    fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.pcolormesh(mxx,myy,s2,cmap='jet')
    fig.colorbar(g)
    fig = plt.figure(figsize = (10,5)) ; g = plt.pcolormesh(mxx,myy,t1,cmap='jet')
    fig.colorbar(g)
```

参考文献

1) 宮村倫司、野口裕久　横堀一雄：幾何学的非線形エレメントフリーガラーキン法の定式化と膜構造の解析への応用、日本機械学会論文集(A編)、64巻623号、pp1753~1760、1998年7月
2) 酒井譲　山下彰彦：SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討、日本機械学会論文集(A編)、67巻659号、pp1093~1102、2001年7月
3) 奥田洋司、長崎利夫、矢川元基：エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討(第1報、上微分方程式への適応)、日本機械学会論文集(A編)、61巻590号、pp2302~2308、1995年10月
4) 奥田洋司、長崎利夫、矢川元基：エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討(第2報、二次元ポテンシャル問題への適応)、日本機械学会論文集(A 編)、62 巻 599 号、pp1746~1753、1996年7月
5) 澤田樹一郎：複素フーリエ係数と最小二乗法による平面応力板のエレメントフリー解析、日本建築学会中国史部研究報告、2024.3

■一般講演　－技術報告－

昭和初期に建設された洋風木造庁舎の劇場への改修における構造計画

永井拓生 [1)]

1) 滋賀県立大学環境科学研究院，講師，博士（環境科学），nagai.t@ses.usp.ac.jp

1 序論

兵庫県豊岡市に位置する旧日高町役場庁舎 [1-4]は 1935 年頃に竣工したとされる洋風木造庁舎である。1・2 階とも梁間方向 11 m のスパンを一杯に使った 1 室の大空間となっており，2 階床を構成する梁せい 400 mm 以上の松の大梁，小屋組みを構成するキングポストトラス等が構造上の見どころである。本建築物は，1980 年代前半の役場機能の移転に伴い，増築を含む 1 回目の大規模改修が行われ，1982 年に「日高町商工会館」として転用されることになった。この際に内部の間取りが大きく変更され現役で使われ続けたためか，同建築物の文化的・学術的価値についてはほとんど検証されてこなかった。また，2005 年の市町村合併に伴い，同年以降は「豊岡市商工会館」として使用されてきた。また，2019 年の商工会館の移転に伴い民間に譲渡され，2019～2020 年に劇場への用



図 1　江原河畔劇場の外観・劇場内観・スタジオ内観

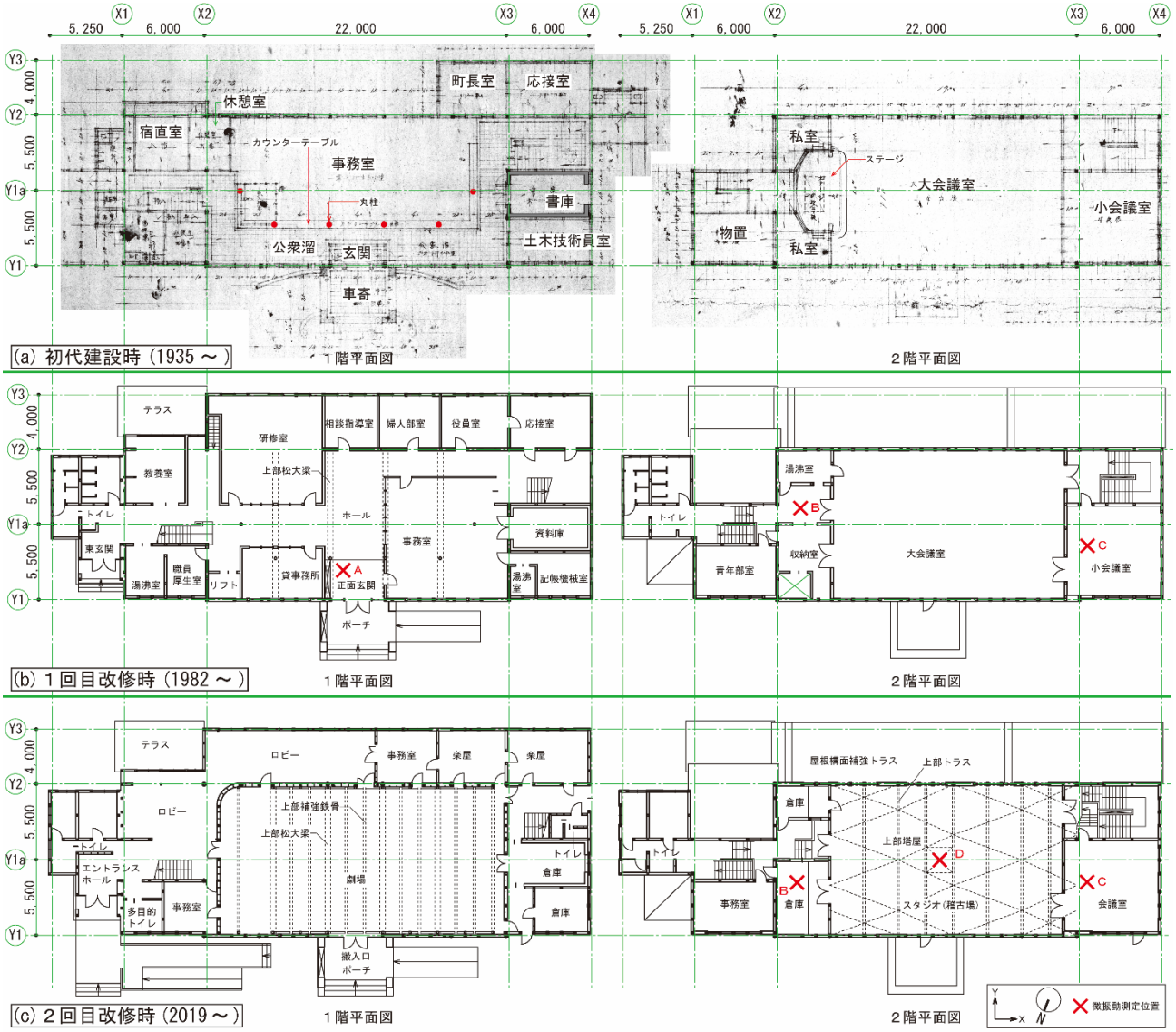


図 2　旧日高町役場庁舎の初代（上）・1 回目改修時（中）・2 回目改修時（下）の略平面図　S:1/500

途変更と大規模の模様替えを含む2回目の改修が行われ，現在は「江原河畔劇場」（図 1）として使用されている。

本稿では，同建築物の構造上の特徴の概要，および 2 回目改修における建築・構造計画の概要，ならびに改修工事の前後に実施した微振動測定の結果を示す。なお，本稿は既報[1,2]をもとに再構成したものである。

2 建築物の概要と変遷

2.1 計画・意匠上の特徴

図 2（前頁）は本建築物の初代建設時から現在までに行われた2回の改修時の略平面図である。初代建設時の図面[4]は，画像編集ソフトにより元図の明暗・色調等を補正し見やすくし，必要に応じ加筆を行っている。

本建築物の平面計画は東西を長辺とする長方形であり，南側の円山川を背にし，北側に市街地に面したファサードと正面玄関を持つ配置となっている。1・2 階ともに平面の中央に短辺方向 11 m のスパンを一杯に使った 1 室の大空間，それを挟む東西両側にその他の諸室や階段，水回り等が配置されており，これは初代から現在まで共通する基本的構成となっている。

初代の平面構成は単純明快であり，1 階は，北側立面の中央に車寄せと正面玄関，平面の中央部は東西に長いカウンターテーブルを持つ1室空間の事務室である。また，東西にはそれぞれ階段，その他の諸室や水回りが設けられている。南側の諸室は平屋の下屋となっている。2 階は中央に東西方向を長辺とする大会議室があり，東側にプロセニアム形式のステージが設けられている。また，東西に小会議室や物置等の諸室がある。

1 回目の改修では南側に平屋の下屋が増築されたことと東側の 1・2 階にトイレが増築されたことを除き，構造上の大規模な改変は行われていない。計画上の大きな変更としては，1 室空間であった 1 階の中央事務室が小規模な事務室や廊下等に分割されたことがあげられる。

2.2 構造上の特徴

本建築物の構造上の見どころは，1・2 階ともに中央部に配置される南北方向スパン 11 m の無柱空間である。

2階床 ― 南北方向に松の大梁 600×400 を 4 m 間隔（部分的に 340×200 を 2.5 m 間隔）で架け，それらの間に小梁（松 240×150）を 1.5～1.6 m 間隔で配置し，その上に根太＋板張りとした構成である。大梁の端部は二重胴差の間に梁端部を挟む形となっている（図 3）。

小屋組・屋根 ― 屋根の小屋組み（図 4）はキングポストトラスで，真束（松 150×100）の頂部に合掌梁（松 250×150）が取りつき，圧縮軸力を負担するトラス（方杖松 150×100），引張軸力を負担するボルト（φ18），および陸梁（松 250×150）によって構成される。真束の頂部は台形状にテーパーを設け合掌梁との接合性を高めており，その上から厚み鋼板（厚み 6 mm）で繋いでいる。

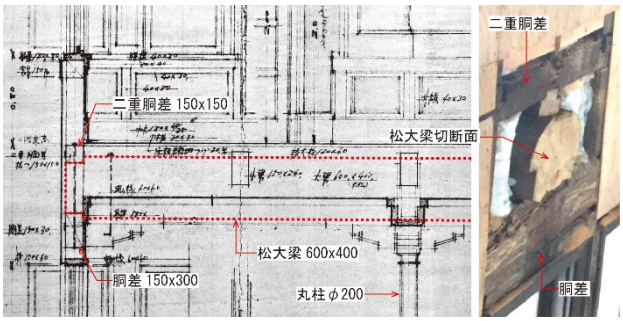


図 3　松大梁の端部詳細図（初代設計図に加筆し作成），2 回目改修時に大梁端部を切断した状況

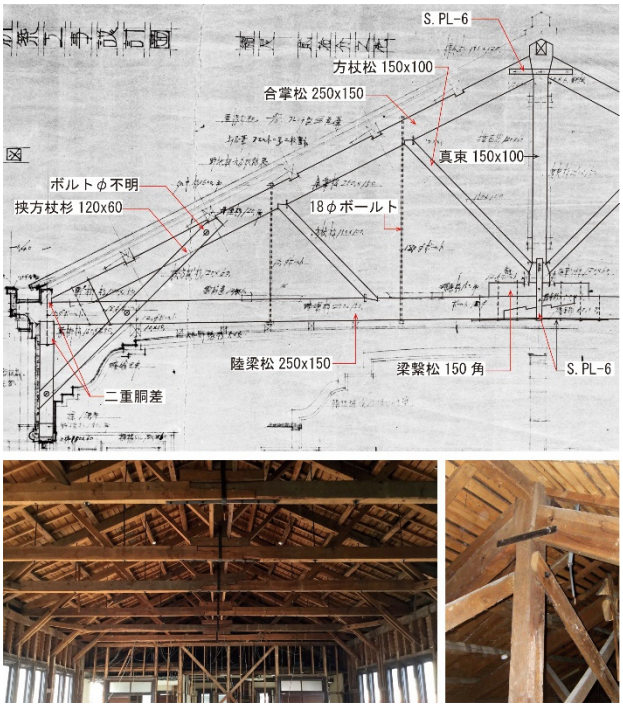


図 4　小屋組み詳細図（上，初代設計図に加筆し作成）と既存の小屋組（下）

陸梁の継手はスパン中央部，真束の直下である。キングポストトラスの陸梁に生じる引張軸力は中央部が最も小さいため，中央部に継手を設けることは力学的に合理的だと言える。陸梁の継手は底面側の鋼板と上面側の枕材（梁繋松 150 角）で挟み，ボルトで接合した上にコの字型の鋼板で抱き込み，真束と接合されている。

陸梁の両端には胴差との間に燧梁（火打ち）が 1 スパ

ン置きに設けられており，ボルトで接合されている。また，トラスの両端には挟み方杖が設けられており，柱，陸梁，合掌梁の 3 か所でボルト（径不明）により固定されている。挟み方式の方杖は，震災予防調査会の報告[5,6]や耐震建築問答[7]等を通じ推奨されていたことが知られている。現代的に言えば，柱と小屋組みを半剛接ラーメンとして一体化する方法であり，比較的壁の少ない建築物においては，数少ない水平耐力要素の 1 つであった。

2.3　初代建設の同時代における傾向との比較

源[6]は，明治 20 年以降に建設された洋風木造に見られる特徴として，①RC 布基礎，②筋違，③二重胴差，および④壁面の細かい区画にも徹底的に筋違を設ける「箱のような構造」の 4 つがあると述べており，本建築物の構造はこれらの特徴によく該当する構造である。また，本建築物では，同著書の中で当時参照されたとされる外国の技術書の影響も確認できる。例えば，本建築物の筋交いは片筋交い，K 字筋交い，X 字筋交いの 3 種類の方法があるが，それらの向きは立面の中央を境に完全に対称に配置されている（図 5）。また，小屋トラスの挟み方式の方杖は，力学的にはあまり効果的ではないが，フランスの技術書に同様の架構が紹介されている。以上のように，本建築物の構造は，全般にわたり当時の最新の傾向と類似した特徴を持つものであると考えられる。

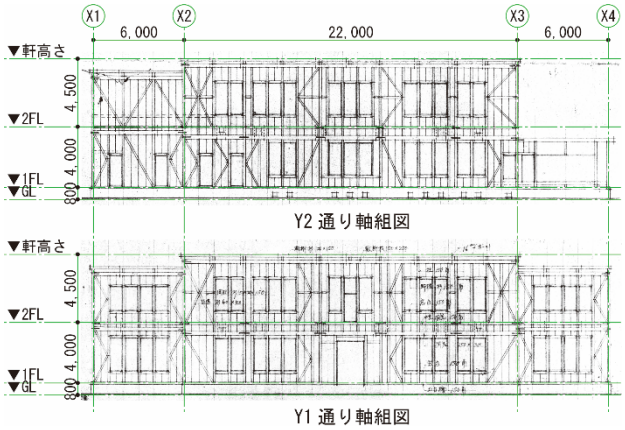


図 5　南北軸組図 S:1/500（初代設計図に加筆し作成）

3　劇場への改修における構造計画

3.1　改修計画の概要

図 2(c)に本建築物の 2 回目改修後の略平面図，図 6 に改修前後の短辺軸組図・長辺断面図を示す。本改修における最も重要かつ大掛かりな変更は，1 階ホールを劇場（図 1 中）に用途変更したことである。この理由は，階高の高い 2 階を劇場にする場合は耐火構造とする与件が生じるが，計画上の事情により，これを避ける必要があったためである。そこで，劇場用途となる範囲の 2 階床を既存のレベルに対し約 1.2 m ほど持ち上げ，1 階の階高を確保した。一方，2 階のスタジオ（旧大会議室）は天井高が低くなるため，既存の格子天井を撤去し，木造トラスを現しにした開放的な意匠としている（図 1 右）。

耐火構造物の必要を回避した理由の 1 つは，既存の外観意匠をできる限り保存するためである（図 1 左）。外壁は開口部建具等の最小限の更新のみとし，初代設計図に描かれている物見塔を復元している。また，北側の旧正面玄関は主に劇団員が使用する搬入口となり，改修後は東側玄関がメインエントランスに変更された。

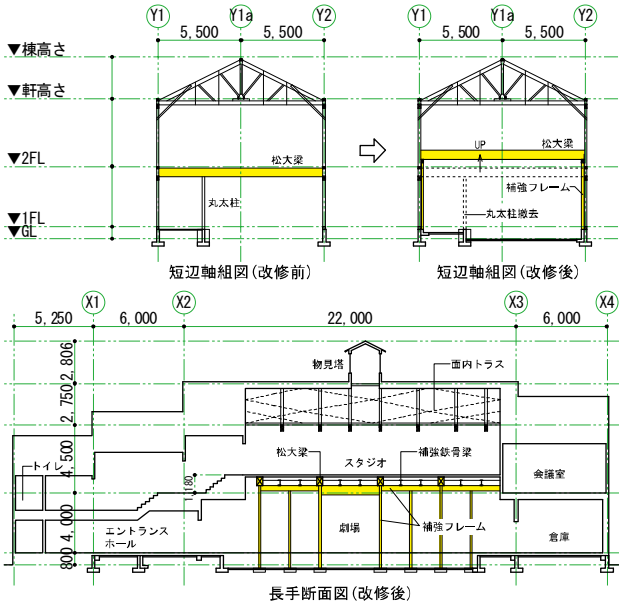


図 6　改修前後の略断面図 S:1/500

3.2　耐震補強

本建築物は既存不適格建築物であるが，過半を超える模様替えと用途変更を行うため，構造上の安全性について遡及義務が生じる。そこで，地震力に対する安全性の検証を耐震診断により行うこととし，上部構造評点（Is 値）を 0.7 以上とすることを目標とした。

表 1 に改修前後の耐震診断（精密診断法 2：保有水平耐力）の結果を示す。改修前は水平耐力要素が著しく不足していることに加え，特に 2 階の短辺方向（Y 方向）の壁量に偏りが大きい。そこで，改修後は平面の全体にわたりバランスよく耐力壁を補強・新設した。その際，改修前と比べ偏心率をできる限り小さく抑えるため，建築物の外壁に沿って優先的に耐力壁の補強設置を計画した。また，耐力壁の直下を始めとして広範囲にわたり RC 基礎の補強・新設を行った。

表１　改修前後の耐震診断結果

階	方向	改修前					改修後				
		W[kN]	Re	Que [kN]	Cue	Is	W[kN]	Re	Que [kN]	Cue	Is
1F	長辺(X)	1994	0.03	358.2	0.11	0.38	2488	0.02	957.7	0.27	0.74
	短辺(Y)	(1692)	0.15	271.3	0.09	0.28	(1694)	0.02	895.1	0.25	0.70
2F	長辺(X)	1125	0.06	266.1	0.24	0.54	1120	0.03	563.4	0.50	1.10
	短辺(Y)		0.44	165.6	0.15	0.22		0.03	427.3	0.38	0.75

W：重量，()の数値は固定荷重のみの重量，Re：偏心率，Que：保有水平耐力，
Cue：Queの層せん断力係数換算値(=Que/上部重量)，Is：上部構造評点(=Que/必要保有水平耐力)

3.3　２階床の持上げと補強

改修前の 2 階床は，4 m 間隔にスパン 11 m の松大梁が配置されており，スパンの中間で丸太柱により支持されている（図 2(a)）。本改修では 1 階の劇場を無柱空間とするため丸太柱を撤去する必要があり，また，事務所から劇場への用途変更に伴い積載荷重の増加が見込まれたため，2 階床の持ち上げにあわせ，鉄骨梁を追加して床の補強を行った。図 2(b), (c)の 1 階平面図に松大梁と鉄骨梁の位置を点線で示している。劇場の南北の両壁面に沿って柱間隔 2 または 4 m の木造の門型フレームを新設し，松大梁は柱（150×150）の直上に，鉄骨は柱間に架けた集成材梁の中間に載せて支持している（図 6）。

図 7 に 2 階床持ち上げの施工状況を示す。まず，床の板張り・根太・小梁を撤去した後（a），松大梁をクレーンで玉吊し仮支持しながら大梁の両端を壁際で切断する（b）。松大梁を切断後，そのまま玉吊りしている間に丸太柱を撤去し（c），松大梁を支持するための門型の補強フレームを建て込み（d），完了次第，新設柱の上に松大梁を載せて固定する。以上を 1 本ずつ繰り返し，全ての松大梁を持ち上げる。これらが完了した後，鉄骨梁を松大梁の間に立て込む（e, f）。

水平構面については，面積が広く耐力壁間の距離が大きい 2 階スタジオの床，および，その直上の屋根部分について面内剛性の補強を行い，地震力を確実に耐力壁に伝達できるようにした。2 階床は持ち上げ作業の完了後，スパン直交方向に小梁 105×240 を落し込み，その上に構造用合板 28 mm を釘打ちとした。

小屋組みの水平剛性補強については，2 階スタジオは床を持ち上げたことで天井高が小さくなったため，屋根トラスの陸梁のレベルで水平構面を構成するのが難しく，勾配屋根の面内にトラスを設置して面内剛性を確保する方式とした。図 2(c)の改修後 2 階平面図に面内トラスの設置を点線で示している。また，図 8 に施工状況を示す。面内トラスは屋根山形トラスの上弦材（合掌梁）と同一構面にあり，現しとなっている。



図 7　２階床の持ち上げと補強の施工状況



図 8　面内トラスによる屋根構面補強の施工状況

4　微振動測定による補強効果の検証

耐震補強の効果を確認するため，改修工事の前後に微振動計測を行った結果をもとに，工事前後の振動特性の変化を検証する。改修前の計測は既存の商工会館機能の移転が完了した直後であり，家具等の大半の撤去も完了した状況であった。また，改修後の計測は，工事が完了した直後，物品の搬入前に実施した。振動計測は，交通・歩行振動等の影響を避けるため，夜 20 時から翌朝まで 10 時間にわたり連続的に行った。計測項目は速度，サンプリング周波数は 100 Hz である。測定位置は図 2(b), (c)の平面図に示す A～D（×印）である。A は 1 階玄関ホール（土間コンクリート仕上げ），B は 2 階東側（ホール入口前），C は 2 階西側（会議室内），D は改修工事後の 2 階スタジオの中央部である。改修前の 1 階玄関ホールでの計測の目的は，地盤の卓越周期を確認することと，2 階床応答の伝達関数を求めるためである。また，改修

後は，2 階の各箇所のモード振幅の差をより詳しく確認するため，2 階の 3 か所で計測した。

図 9 は 2 階の測定点のフーリエスペクトルを 1 階の測定点 A のそれで除して求めた伝達関数である。10 Hz 以上には明確なピークが見られず，また，敷地地盤の卓越振動数は 10 Hz 以上であるため [2]，上部構造の卓越振動数はそれ以下と考えられる。また，ハーフパワー法により減衰定数を求めたところ，Y 方向並進（2.60 Hz）は約 1.6 %，X 方向並進（6.94 Hz）は約 3 %であった。

図 10 は改修工事後の 2 階床のパワースペクトルである。改修後の測定は 2 階に 3 台全てを設置したため地動に対する伝達関数は算出できないが，前述のように 10 Hz 以下に着目すれば，建築物の主要な振動モードとみられる複数のピークが確認できる。

図 11 は POD[8]により求めた改修前後の各ピーク振動数における 2 階床のモードベクトルである。モードベクトルを求めるにあたり，時刻歴データから卓越モードが存在すると考えられる 2～8 Hz の範囲をバンドパスフィルタで抽出した。改修前は 4 自由度（2 方向×2 台），改修後は 6 自由度（2 方向×3 台）のモードが得られる。

表 2 は 8 Hz 以下のピーク振動数と対応するモードベクトルの振幅方向をまとめたものである。同表中の Cm, Cm’ は，時刻歴波形の二乗平均パワーに対する，各モード成分のパワーの比を示しており，パワーの大きい順にモード a，b,・・・とした。パワーの最も大きなモード a は，改修前後ともに短辺方向（Y 方向）の並進と若干のねじれの組合せであり，8 Hz 以下の振動数領域ではパワーの大半を占める。また，改修後のモード b は a と全く同じ振動数の Y 方向並進モードであるが，2 次波形的な逆位相モードとなっている。これは，地動により計測データに剛体変位的な成分が含まれるため，本来は 1 つの固有モードである振動モードが 2 つの直交モードに分解されて得られたものである。実際にはモード a と b を合成したものが最大パワーのモードだと考えられ，パワー支配率は改修前の a と同様に約 75 %を占め，改修前より振動数が上昇している。改修前の次点はモード d であり，長辺方向（X 方向）の並進モードである。改修後は，これと類似したモードは 4 番目に見つかり，支配率が小さくなるとともに，やはり振動数が上昇している。

また，同表右列の α は，改修前後の主要モード a，d について固有振動数の比を 2 乗したもの（$\alpha = (f'/f)^2$）である。前述のように，本改修の前後では固定荷重の変化が小さいため，α の上昇は耐震補強による初期剛性の増加によるものと考えられる。

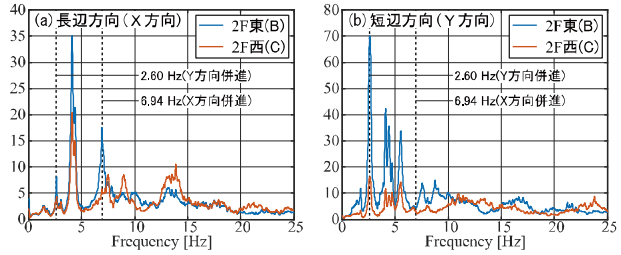


図 9　地階床に対する 2 階床の伝達関数（改修前）

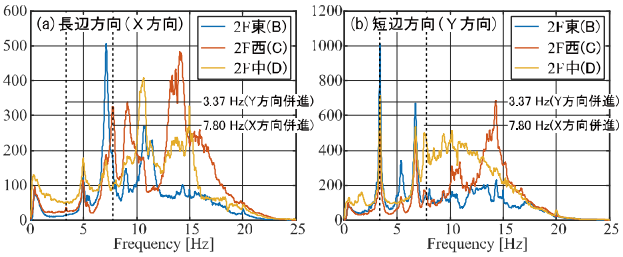


図 10　2 階床のパワースペクトル（改修後）

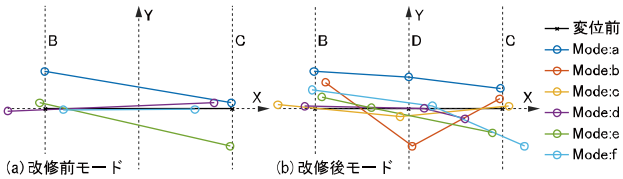


図 11　改修前後の卓越振動のモードベクトル

表 2　微振動計測による改修前後の卓越振動モード

モード形状	改修工事前			改修工事後			α
	T [s]	f [Hz]	Cm	T' [s]	f' [Hz]	Cm'	
a) 短辺 (Y) 並進+ねじれ	0.38	2.60	0.75	0.30	3.37	0.55	1.68
b) 短辺 (Y) 並進 (逆位相)	–	–	–	0.30	3.37	0.20	–
c) 長辺 (X) 伸縮	–	–	–	0.14	7.13	0.11	–
d) 長辺 (X) 並進	0.14	6.94	0.17	0.13	7.80	0.07	1.26
e) ねじれ	0.13	7.93	0.06	0.19	5.39	0.04	–
f) 長辺 (X) 伸縮	0.13	7.50	0.02	0.20	4.92	0.04	–

f, f' : 改修前，改修後の固有振動数，T, T' : 改修前，改修後の固有周期
Cm, Cm' : 改修前，改修後の二乗平均値における当該モードの支配率

表 3　改修前後の設計上の剛性増加率と固有値解析結果

方向	初期剛性増加率		固有振動数		α
	1F	2F	f [Hz]	f' [Hz]	
長辺 (X)	1.81	1.79	1.24	1.61	1.68
短辺 (Y)	1.93	1.95	1.15	1.55	1.83

f, f' : 改修前，改修後の固有振動数

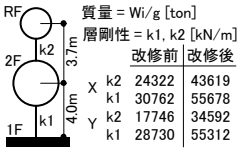


表 3 は，改修前後の耐震診断の結果から得られた初期剛性の増加率と，固有値解析により得られた 1 次モードの固有振動数をまとめたものである。固有値解析のモデルは同表右に示す方向別に独立したせん断型 2 質点系とした。質量は表 1 の固定荷重のみの重量を重力加速度で除した値とし，初期剛性は精密診断法 2 で用いた荷重ー

変形曲線の層間変形角 1/1000 時の割線剛性を用いた。短辺方向（Y 方向）の 1 次モードが実測モード a に対応し，長辺方向（X 方向）は実測モード d に対応すると仮定すれば，固有値解析の振動数は改修前後ともに実測結果よりも小さい。この理由は，解析モデルでは割線剛性を用いるため初期剛性が小さく評価されることや，非耐力壁・雑壁の剛性を過小評価していること等が考えられる。

明治以降に建設された近代洋風木造建築物の微振動測定を実施した例は数多くあるが，例えば，藤井ら [9]によれば本建築物と同様の最高高さ 12 m 前後の建築物では固有周期 0.2～0.4 秒程度が多い。また，山田ら [10]の対象建築物は本建築物よりやや小規模であるが構造形式は類似しており，固有周期は 0.3～0.4 秒程度である。本建築物の短辺方向の周期はこれらに近いと言えるが（改修前 0.38 秒），長辺方向の周期は本建築物のほうがかなり短い（改修前 0.14 秒）。長辺方向は外壁（木ずり下地モルタル塗+スクラッチタイル貼り）の壁量が大きく，長辺方向の剛性にかなり寄与していることが予測される。

また，微振動計測により得られる建物の固有振動数と構造設計上のパラメータを用いた固有値解析の比較も数多く行われており，例えば，高岩ら [11]は本建築物と同程度の規模の建築物の微振動測定と解析モデルとの比較を行っているが，固有振動数の測定値と解析値の比は本研究と同様に 1.6～2 倍程度となっている。

本建築物では両方向ともに補強により確実に初期剛性が増加していることは確認されたものの，その定量的な同定は困難であり，今後の課題としたい。

5 結論

昭和初期に建設された旧日高町役場庁舎の劇場への改修における建築計画の概要と構造計画，および改修工事前後に実施した微振動測定の結果について報告した。

既往研究 [5,6]と照合したところ，本建築物の構造は当時の先端的傾向がよく該当するものだと考えられる。また，小屋組の構成は力学的に非常に合理的な部材・工法が選択されており，設計者は鉛直荷重に対する応力分布を正確に理解していたと考えられる。

劇場への改修では，劇場の天井高を確保するため 2 階床の持ち上げを行い，用途変更による荷重増加に対応するため補強を行った。また，主に建築物の外周に沿って耐力壁の大幅な増強を行い，偏心率の改善を図った。

微振動計測により得られた支配的なモードは，パワーの支配率の順に短辺方向の併進，長辺方向の併進であり，いずれも改修後に振動数が上昇し耐震補強の効果が確認された。ただし，振動数の増加と補強による剛性増加の定量的な関係は不明であり，今後の課題である。

謝辞　本稿の執筆にあたり本計画の関係各位より多くの協力を得た。また，本研究の一部はユニオン造形文化財団の助成（助成番号 31-120）を受けて実施した。記して心からの謝意を表す。

参考文献

1) 永井拓生：旧日高町役場庁舎の改修以前における構造的特徴　設計図および部分解体を通じた構造的特徴と木部材の腐朽劣化状況の調査，日本建築学会技術報告集, vol. 29, no. 73, pp. 1279-1284, 2023. 10.
2) 永井拓生，浅沼秀治，木原湧：旧日高町役場庁舎の劇場への改修における構造補強計画および改修前後の微振動特性の比較，日本建築学会技術報告集, vol. 31, no. 77, pp. 181-186，2025. 2.
3) 日高町商工会，日高町商工会館建設委員会編集：日高町商工会館竣工までの歩み，1983. 3.
4) 旧町役場など設計図発見 日高の民家 大正～昭和初期の 220 枚，毎日新聞，2014. 3.
5) 西澤英和：耐震木造技術の近現代史 伝統木造家屋の合理性，学芸出版社，2018. 3.
6) 源愛日児：木造軸組構法の近代化，中央公論美術出版，2009. 7.
7) 田邊平学：耐震建築問答 附・耐風・耐火・防空，丸善, 1933. 4.
8) Y. Tamura, S. Suganuma, H. Kikuchi, and K. Hibi, “Proper orthogonal decomposition of random wind pressure field,” J. Fluids and Structures, vol. 13, pp.1069-1095, 1999. 10.
9) 藤井智規，福和伸夫，千賀英樹，飛田潤，吉田明義：常時微動計測による博物館明治村の近代建築物の振動性状データベース構築，日本建築学会技術報告集, vol. 13, no. 25, pp. 59-64, 2008. 8.
10) 山田明，金野章子：常時微動計測を活用した擬洋風建築物の耐震性能評価，日本建築学会技術報告集, vol. 25, no. 61, pp. 1079-1084, 2019. 10.
11) 高岩裕也，富所俊平，香取慶一，松野浩一：近代中規模木造建築物の振動特性と水平剛性の相関性に関する研究，構造工学論文集, vol. 61B, pp. 229-236, 2015. 3.

継手の無い板材のみからなる離散十字相欠き格子の提案と力学的特性の検討

佐藤　輝翔 [1)]，和多田　遼 [2)]
1)大阪産業大学デザイン工学部建築・環境デザイン学科，s22m044@ge.osaka-sandai.ac.jp
2)大阪産業大学デザイン工学部建築・環境デザイン学科，准教授，博士（工学）

1　研究の背景と目的

接合方式の一種である十字相欠き接合（接ぎ）（図 1）は，加工の簡易性から，木材による建築や造作に古くから用いられてきた．棒状の部材の他，平行な板部材による図 2 のような格子構造（本稿ではこれを**十字相欠き格子**と呼称する）の製作にも利用される．近年は CNC 加工機により板部材の任意形状での切削が容易になり，合板から切り出された部材を十字相欠き接合等により組み立てた架構からなる建築物も実現されている[1]．

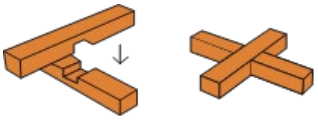


図 1 十字相欠き接合（接ぎ）

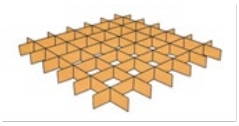


図 2 十字相欠き格子

板材からなる十字相欠き格子において，格子を構成する各行および各列の板（本稿ではそれぞれ横材および縦材とする）は，通常は格子の一端から他端まで連続している（図 3）．しかし，それらを合板などの薄い板材で製作する場合，一般にサブロク板やシハチ板など市況に流通する規格材にネスティングされ切り出されるため，その部材寸法には上限がある．それを超える寸法の格子を製作する場合，部材の途中で板材を連続させる継ぎ手を設ける対応が必要となるが，継手の製作は手間やコスト増の原因になり，力学的連続性の確保も困難である．

本稿では，格子の縦材と横材の交差部の一部に**不連続点**を含む**離散十字相欠き格子**（図 4）を提案する．不連続点を周期的に設けることで，各部材の長さは一定長以下に抑えられ，規格材からの切り出しによる製作が可能かつ継手が不要になる．ただし，不連続点により格子構造の強度は低下する．そこで本研究では，不連続点の周期的な配置パターンと力学的特性の関係を検討し、力学的性能に優れる配置パターンの特徴を考察する．

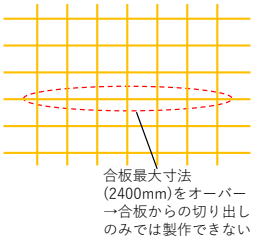


図 3　一般的な十字相欠き格子

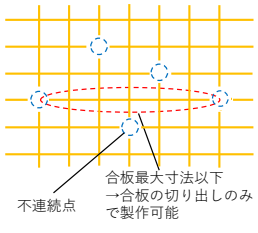


図 4　離散十字相欠き格子と不連続点

2　研究の方法

本稿では，図 5 に示す外半径 2m，内半径 1.5m，高さ 3m の円筒型の格子構造を考える．この構造は，円周方向に 42 列の縦材，高さ方向に 15 行（段）の横材からなる．

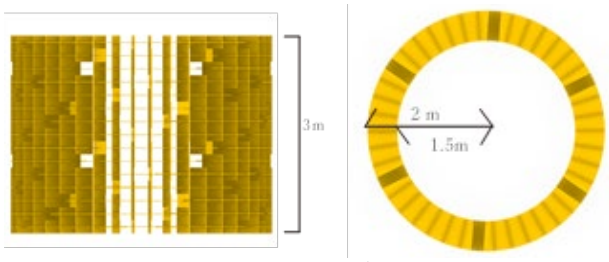


図 5　円筒型モデル

2.1　不連続点の周期配置

縦材と横材の交差部（接合部）の一部に不連続点を設ける．不連続点は周期的に配置するため，その最小単位を N 段×N 列とし，N×N の交差部の各行・各列に 1 個の不連続点を配置する．周期 N=7 での配置パターンの一例「0-5-3-1-6-4-2」を図 6 に示す．これは，各段番号・列番号を下および左から順に 0 から 6 とし，不連続点の段番号を 0 列目から順に並べたものである．

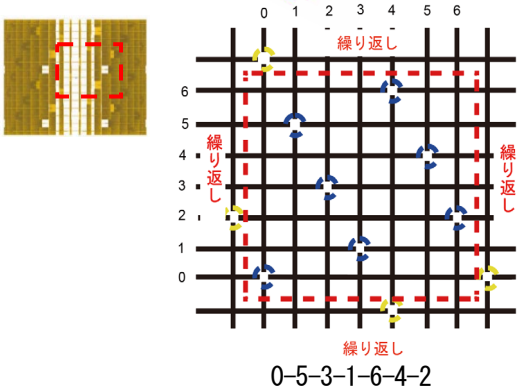


図 6　不連続点の配置パターンの例（N=7）

このように，不連続点の配置は 0 から$N-1$の N 文字

の順列で定められる．回転対称（「0-1-2-3-4-5-6」と「1-2-3-4-5-6-0」など）および鏡映対称（「0-1-2-3-4-5-6」と「0-6-5-4-3-2-1」など）のパターンを除くと，不連続点のパターンの数は N 文字の数珠順列（bracelet permutation）となり，その数は$(N-1)!/2$通りである．

2.2　解析条件

不連続点の全ての配置パターンに対し，構造解析により力学的性能を確認する．本稿では，周期 N=7 および 6 について検討を行う．縦材・横材ともに，三角形シェル要素に分割し，荷重は部材の自重とする．縦材・横材の交差部は，交差線上の同位置にある縦材・横材それぞれの解析節点の全並進・回転自由度を共有させ，十字相欠きによる離間・回転等は考慮しない．支持条件は，縦材の接地する解析節点を単純支持とする．解析は線形弾性解析とする．その他の解析条件を表 1 に示す．解析には Grasshopper プラグイン Karamba[2]を用いる．

表 1　解析条件

板厚: $t = 10$ mm
ヤング係数: $E = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2 ※
荷重: 自重 ($\gamma = 78.5$ kN/m^3) ※
メッシュサイズ: 0.10 m
解析要素: シェル要素
支持条件: 脚部（接地部）支点単純支持
解析方法: 線形弾性解析
※ここでは仮に鉄相当の値を用いた

最大変形量(DISP)，ひずみエネルギー(ENERGY)，発生最大曲げモーメント(BM)の 3 つの指標を求め，結果を考察する．

3　解析結果

3.1　周期 N=7 の場合

はじめに，周期 N=7 についての結果を示す．全$(7-1)!/2 = 360$通りの各パターンでの最大変形量，ひずみエネルギー，最大曲げモーメントを図 7 に示す．ここに，横軸は各周期パターンの通し ID を示す．いずれの指標においても，通し ID=0（0-1-2-3-4-5-6）の値が群を抜いて大きい外れ値となっている．これは，このパターンでは不連続点が斜め方向に連続し，構造全体が 6 個の傾斜した架構に完全に分割されるためであり，本稿ではこれを**純らせんパターン**と呼ぶこととする．

得られた結果について，DISP が小さいものから順に 1 から 360 まで順位を付け，ENERGY，BM についてもそれぞれ同様に順位付けを行った．各パターンについて，横軸を DISP の順位，縦軸を ENERGY の順位として各結

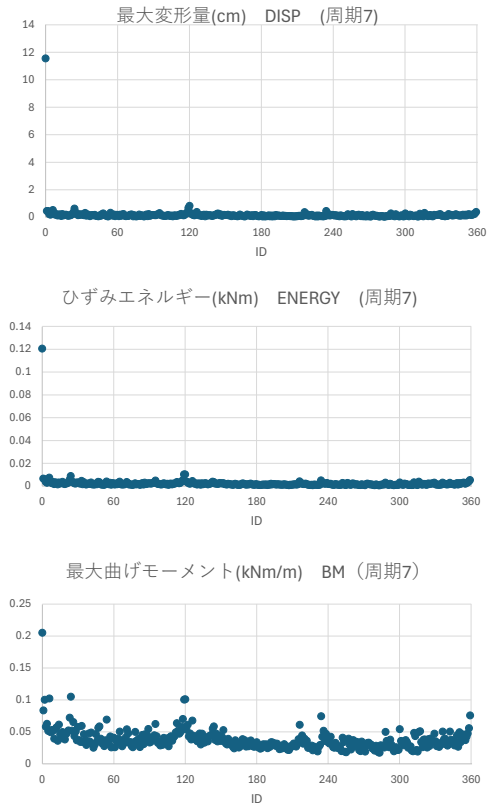


図 7　全解析結果（N=7）：

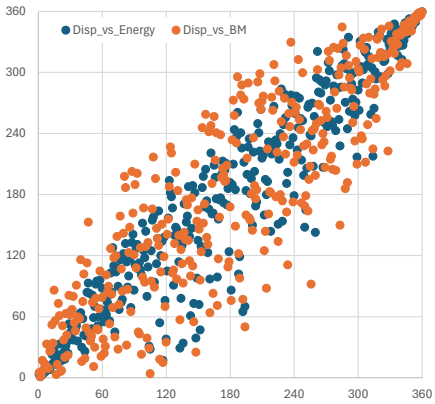


図 8　各指標の相関（N=7）

果をプロットしたものを図 8 に青色で示す．同様に，横軸を DISP の順位，縦軸を BM の順位としてプロットしたものを図 8 に橙色で示す.同図より，DISP の順位と ENERGY の順位，DISP の順位と BM の順位のいずれも相関はあるが一致はせず，ばらつきもあることがわかる．

各パターンについて，3 つの指標の順位を平均した値の順位を総合順位として定めた．総合順位が上から 5 番目まで，および前述の純らせんパターンを除く下から 5 番目までの各パターンについて，対応する不連続点の配置パターンと各節点の変位量のコンター図を図 9-10 に示す．純らせんパターンについても同様に図 11 に示す．

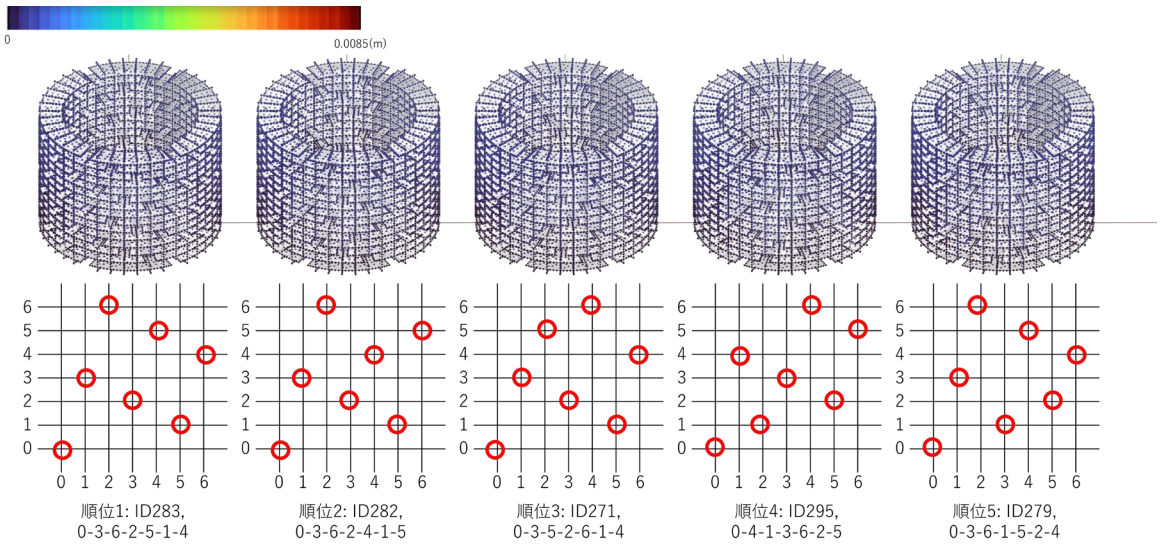


図 9　総合順位上位 5 パターン（N=7）

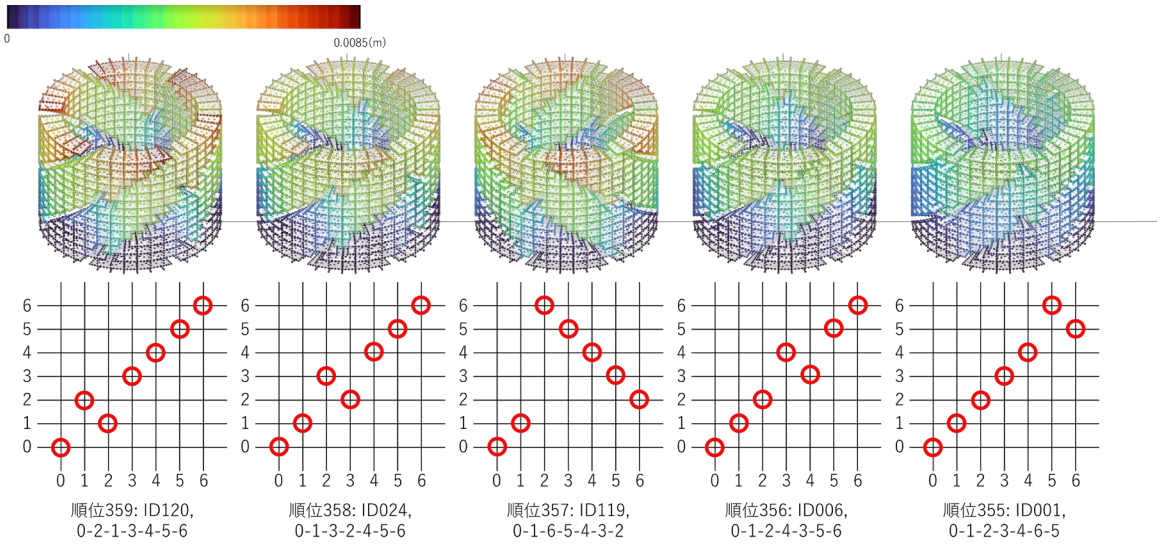


図 10　総合順位下位 5 パターン（N=7）

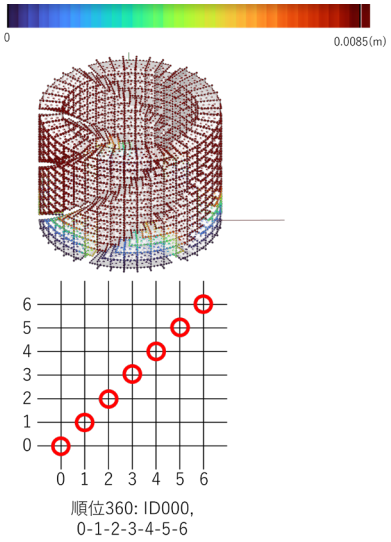


図 11　純らせんパターン
（N=7）

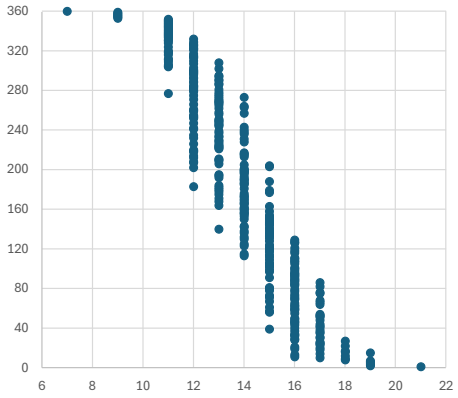


図 12　指標 F（横軸）と総合順位（縦軸）の相関（N=7）

図 9 と図 10,11 を比較すると，順位が上位のパターンは隣り合う列の間の不連続点の段差の和が大きい傾向があると予想できる．そこで，以下の指標Fを導入し，この値と総合順位の間の関係を調べる．

$$F = \sum_{i=0}^{N-1} \{\min(|a_{i+1} - a_i|, N - |a_{i+1} - a_i|)\} \qquad (1)$$

ここで，$a_0, \ldots, a_{N-1}$は周期 N の配置パターン「a_0-a_1-…-a_{N-1}」を表し，$a_N = a_0$とする．指標Fと総合順位の関係を図 12 に示す．図 12 より，指標Fと総合順位には負の相関があることが確認できる．また，指標Fの最大値は 21（1 パターンのみ），次に大きいのは 19（7 パターンで重複）であり，最小値は純らせんパターンを除くと 9（7 パターンで重複）であるのに対し，図 9 に示した上位 5 パターンのFの値は 1 位が 21，他が 19 であり，図 10 に示した下位 5 パターンでのFの値はいずれも 9 であった．以上より，指標Fは離散十字相欠き格子の力学的性能を推定するのに優れた指標であることが確認された．

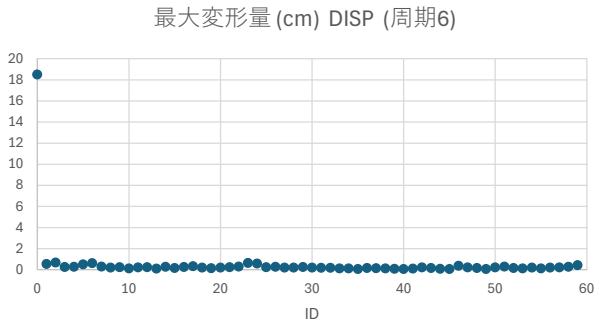
3.2　周期 N=6 の場合

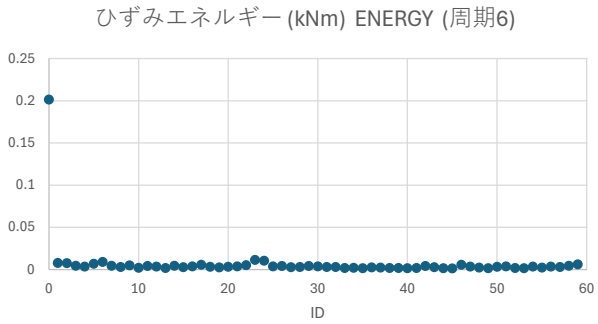
次に，周期 N=6 についても同様に検討した．，不連続点のパターン数は$(6-1)!/2 = 60$通りである．各パターンでの最大変形量（DISP），ひずみエネルギー（ENERGY），最大曲げモーメント）（BM）を図 13 に示す．ID=0 は純らせんパターン 0-1-2-3-4-5 であり，周期 N=7 の場合と同様に外れ値となっている．各指標の順位の相関（DISP と ENERGY，DISP と BM）を図 14 に示す．

周期 N=6 についても，各指標の順位の平均値から総合順位を定めた．総合順位の上位 5 パターンを図 15 に，純らせんパターンを除く総合順位の下位 5 パターンを図 16 に、純らせんパターンを図 17 に示す．周期 N=6 の場合も，N=6 の場合と類似の結果となった．全パターンでの総合順位と式(1)の指標Fの関係を図 18 に示す．Fの全パターンでの最大値は 14（9 パターンで重複），最小値は純らせんパターンを除くと 8（6 パターンで重複）であり，これらはそれぞれ図 15 の上位 5 パターンのFの値，および図 16 の下位 5 パターンのFの値とそれぞれ一致した．

4　まとめ

本研究では，一定長の部材が周期的に配置された離散十字相欠き格子を提案し,その不連続点の配置と力学的性能の検証を行った．





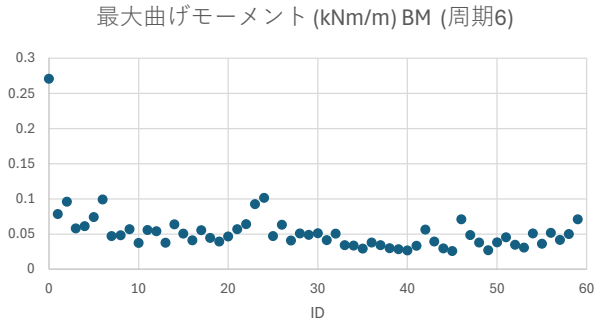


図 13　全解析結果（N=6）

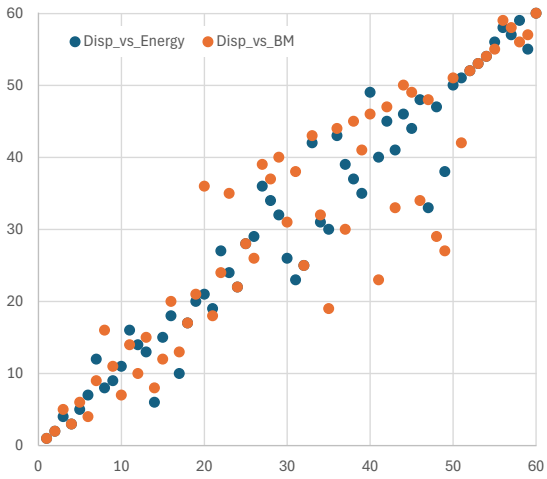


図 14　各指標の相関（N=6）

不連続点の配置から算定される指標 F を提案した．この値が力学的性能の優劣の推定に有効であることを例題より確認した．

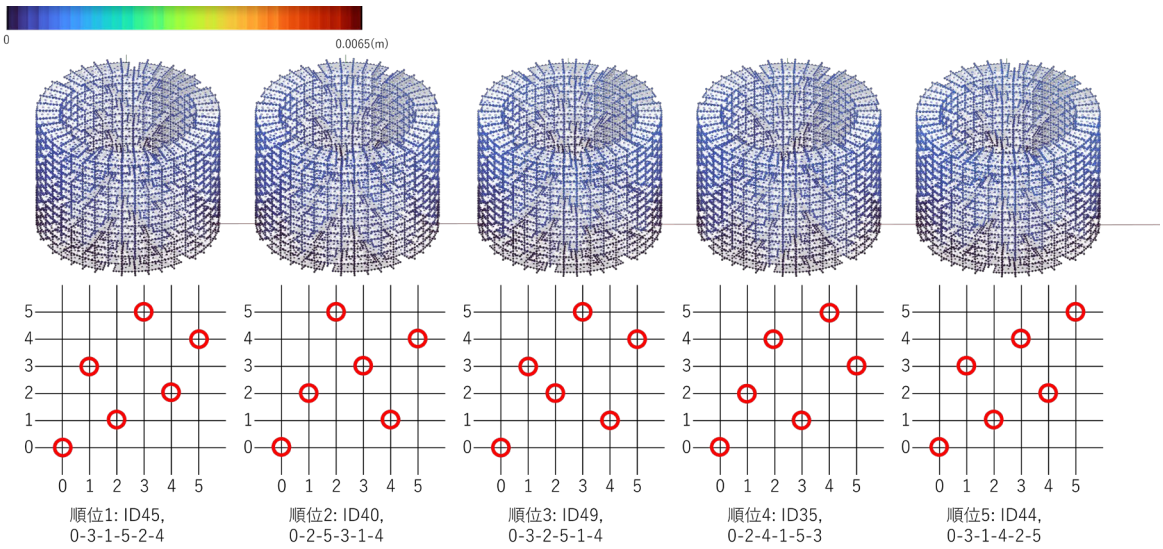


図 15　総合順位上位 5 パターン（N=6）

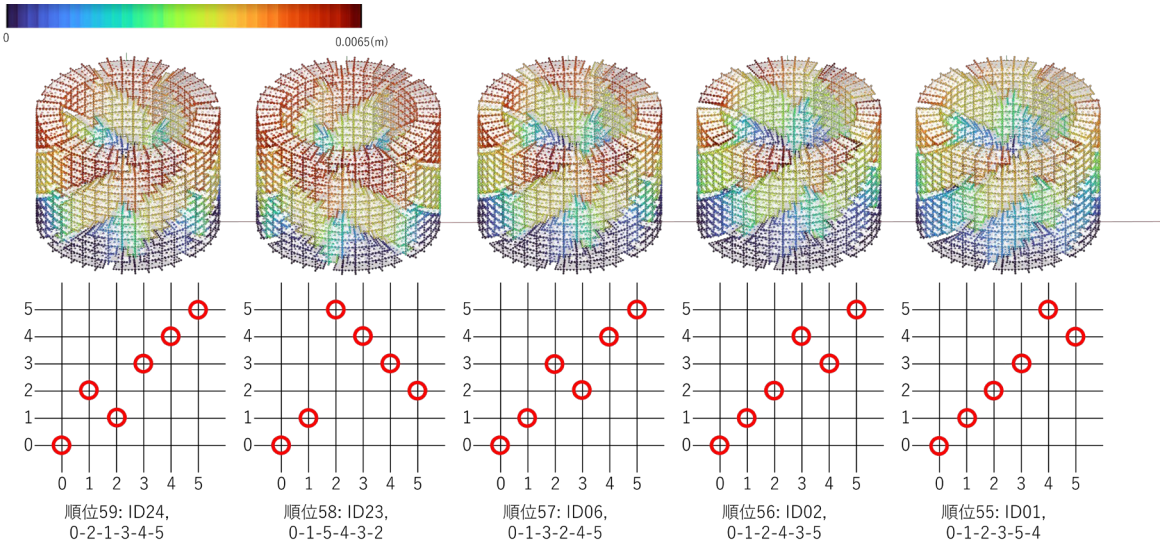


図 16　総合順位下位 5 パターン（N=6）

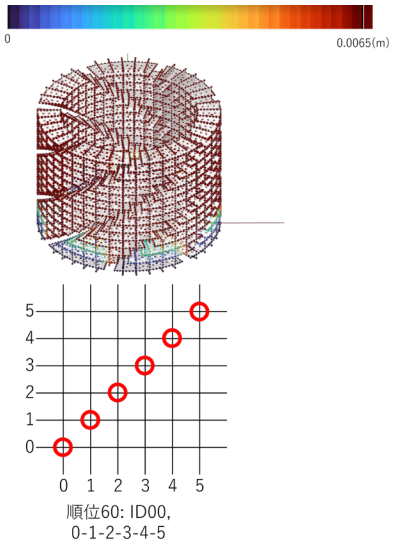


図 17　純らせんパターン
（N=6）

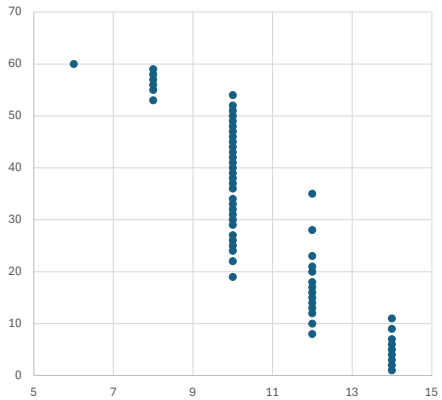


図 18　指標 F（横軸）と総合順位（縦軸）の相関（N=6）

今後の課題として，異なる形状や荷重条件での検討が考えられる．本研究で対象とした面内応力が卓越する壁状の部材としての利用の他，屋根や床など面外曲げが発生する水平材としての使用時にも同様の傾向が見られるか確認したい．また，十字相欠き接合によるめり込み・離間・摩擦・回転等の解析への考慮も行っていきたい．

謝辞：本研究成果の一部は棟田翔瑚氏（2025 年大阪産業大学卒）によるものである．ここに謝意を表す．

参考文献

1) VUILD ARCHITECTS：まれびとの家, https://architects.vuild.co.jp/works/house-for-marebito/, 2025/9/1 参照
2) Preisinger C. : Linking structure and parametric geometry, Architectural Design, 83 (2), pp. 110-113, 2013.

■第 20 回 形態創生コンテスト 2025

□ コンテスト概要

1．コンテストの趣旨

形態創生における種々のアイディアを適用して，建築空間や構造物などの「新しいかたち」や「独創的な形態創生手法」を提案いただくコンテストです。専門分野にかかわらず，多くの方々に参加いただいて，形態創生のおもしろさや可能性を感じていただければと思っています。本コンテストでは，形態創生のフリーウェアも提供しています。一方，コンピュータプログラムや汎用ソフトによらない手法で，「かたち」を創生するアイディアも可能です。

2．課題（テーマ）

第 20 回形態創生コンテストの課題（テーマ）は，下記のとおりです。

「リビルディングを可能とする形態創生」

なお，応募要項の詳細は，「第 20 回コロキウム構造形態の解析と創生 2025 ホームページ」

https://kozokeitaisosei.com/形態創生コンテスト/

に掲載しました。

3．審査委員（敬称略・50 音順）

・審査委員長：

満田　衛資（京都工芸繊維大学）

・審査員：

福島　加津也（福島加津也＋冨永祥子建築設計事務所，東京都市大学）

横須賀　洋平（鹿児島大学）

・特別審査員（特別講演講師）：

大崎　純（京都大学）

豊田　啓介（NOIZ）

4．コンテストの経過

2025 年 08 月 15 日：　応募エントリー締切

2025 年 09 月 01 日：　作品応募締切

2025 年 09 月 02 日：　一次審査（於：オンライン会議システム）

2025 年 09 月 10 日：　一次審査結果の通知

2025 年 10 月 11 日：「第 20 回コロキウム構造形態の解析と創生 2025」にて二次審査および表彰

（於：武庫川女子大学上甲子園キャンパス甲子園会館西ホール）

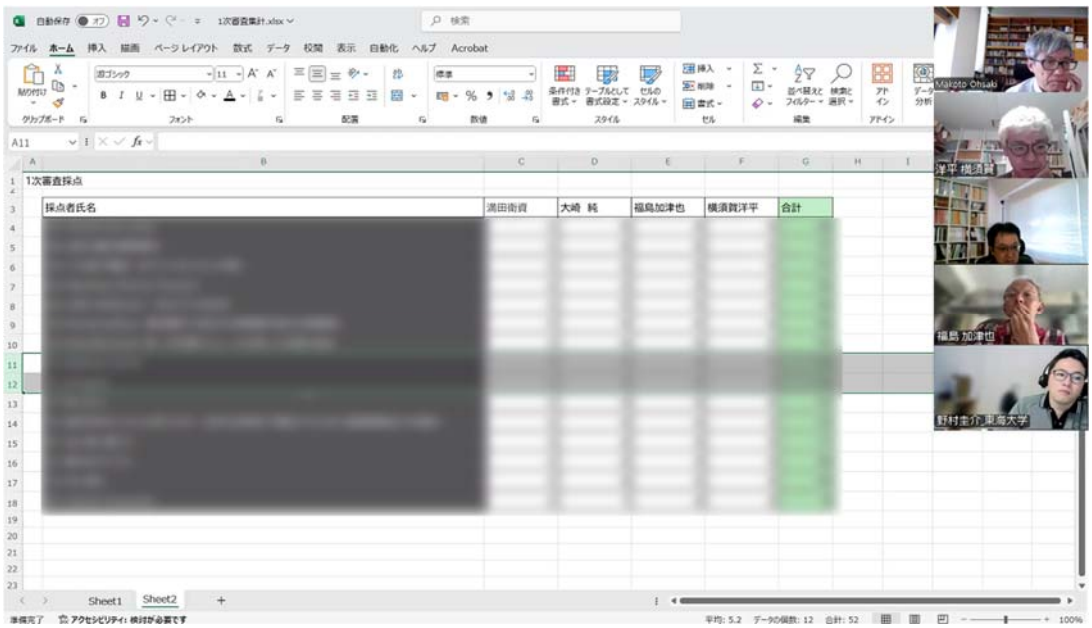


写真 1　一次審査の様子

5．審査の方法

一次審査は，特別審査員を含む審査員全員によりオンライン会議システムを使い，実施しました。所定の時刻に応募者に参加していただき，プレゼンテーション動画視聴の後，質疑応答を行いました。作品は匿名とし，課題（テーマ）に対する作品の満足度のほか，創生された形態（かたち）そのものの独創性や形態創生プロセスに関するアイディア性などを総合的に勘案して評価しました。なお，二次審査において，審査員と同じ所属研究室や関係者である場合には，投票権を無効とみなすことで公平性を保つこととします。

6．応募状況および一次審査での選出作品数

エントリー数：22 件
応募総数　：15 作品
入選作品数： 6 作品
佳作作品数： 1 作品

―入選作品―

受付 No.	タイトル	氏名（所属）［○印：代表者］
3	Bamboo String Tension	○三田沙也乃、安部基喜、伊藤世玲奈、上田昂平、國友弘隆、樋口敬治、徐宸寅（株式会社大林組）
4	ONE MODULE | MULTI MODE	○金原広太郎、新田哲史、芦田結理、伊藤慶彦、前田貴仁、榊原健晃、山口聡士（株式会社大林組）
5	Panta hut units	○田中一成（日建設計），大嶋千智（東京大学）
8	南京玉簾式展開構法	○林優斗（立命館大学）
18	Re:SpiraRise －幾何剛性で安定する再構築可能な空間構造－	○大村広輝，戸田陸，田中瑞樹，長浜慧昌，小川璃子，山地雄統（株式会社大林組）
20	六方格子構造～手でつくるつどいの場～	山本怜生，丸谷祐大，大嶽有加，○髙岡祐大，笹井智喬，森山佐那子，福田凱乃祐（株式会社大林組）

―佳作作品―

受付 No.	タイトル	氏名（所属）［〇印：代表者］
15	RULING PLAY 単一の円環モジュールを用いた空間の設計	〇来栖裕也、山崎珠美、青木馨 (東京大学)

7．応募全作品の講評

今年度も多数の大学・企業グループから応募があり、形態創生という分野に多くの興味が集まっていることが感じられる。皆様に深く感謝申し上げたい。

今年度のコンテストテーマは「リビルディングを可能とする形態創生」である。能登半島地震などの災害からの復興や、大阪万博のパビリオンに見られるようなサステナビリティの観点から、単なる仮設建築ではなく、復興・再利用・再構築といった広義の「リビルド」を可能にする構造体の提案を期待した。

応募作品には、応募者が考える様々なリビルディングの形が表現された。そのアプローチは、部材が連続的にスライドして展開する伝統芸の機構に着想を得たもの、部材の弾性や張力を利用した自己釣り合い系、空気膜を構造体として利用するもの、一体で平坦な状態から立体へと立ち上がるリンク機構、あるいは部材同士の噛み合わせによるユニット構造など、実に多様な提案内容であった。その一方で、「リビルディング」というテーマに対しては、「可変性・可動性」という解釈に留まる案が多かったとの指摘もあった。

近年、形態創生のアイディアだけでなく、より現実的な側面を考慮した提案が増えている。テーマが現実的なものを要求していた可能性もあるが、もう少し破天荒なものがあっても良いのではないかとの意見も挙げられた。形態創生の理論として成立していれば、たとえ実現性が低そうに見えても評価するというコンテストの意義を忘れてはならない。理論的なリアリティと実現性のバランスの重要性を、改めて感じたコンテストでもあった。

今年度も魅力的な作品が多く、審査員からは「どの作品もレベルが高く、評価は紙一重だった」との声が上がった。約 4 時間にわたる審査討議の結果、審査員の総意によって今年度は 6 点の入選作品と1点の佳作作品が選定された。入選作品の中には、アイディアは面白いが実現性という面で「あと一歩」詰め切れていない案も見られたが、各作品に対し、審査員から具体的なリクエスト・コメントを伝えており、よりテーマを掘り下げたプレゼンテーションを強く期待したい。

（以下, [ ]はエントリー番号を示す）

[01] 玉と紐と重さと

3D プリンター製のセメントビーズと麻ひもを「八の字編み」で構築する組積造の提案である。ビーズを用いた組み立て手順の検証が行われているが、ドームと壁の接合部や麻紐の配置ルールといった、構造システムとしての具体的なディテールが不明瞭である点に課題が残った。コンセプトの魅力や実現性を実証するためにも、モックアップによる検証の必要性が感じられた。

[03] Bamboo String Tension ＜入選作品＞

竹の復元力と糸の張力が釣り合う自己釣り合い系をユニットとし、空間を構築する提案である。模型が持つ空間イメージの美しさや、部材の特性を活かした着想のエレガントさが高く評価された。一方で、CG と模型で示された形態の印象に差異がある点や、コンセプトを支える力学的な検討の深さに課題が残った。また、実スケールで部材が滑らない接合部の納まりについても、さらなる検討が望まれる。

[04] ONE MODULE MULTI MODE ＜入選作品＞

背骨の構造に着想を得て、節のある柱とワイヤーで構成された可動ユニットの提案である。ワイヤーを引くことで構造が立ち上がるというユニークな機構や、張力の調整で形態を切り替える提案が評価された。一方で、この機構が成立するための幾何学的条件は非常に限定的であることや、自立を支える水平反力の釣り合いに関する説明に課題が残った。そのユニークな着想を実現するための、さらなる構造的探求に期待したい。

[05] Panta hut units ＜入選作品＞

平坦な状態から一体で立ち上がる、独自のリンク機構を用いたユニット建築の提案である。作図のみで設計可能な 1 自由度の可動構法は、審査員から高い評価を集めた。一方で、その機構がブリカール機構など先行研究の系譜にあることや、「リビルド」というテーマとの接続が弱いという指摘があった。展開後の角部の座屈といった構造的な課題をどう解決するのかなど、よりリアリティのある提案への発展を期待したい。

[07] Spiral Inversion

アルキメデス螺旋（らせん）を用いたユニットを「逆繋ぎ」することで、曲率が反転する双安定性を生み出す構造の提案である。螺旋状の MDF 版のみでは剛性が低いため、自重を支えるスケールでの実現性に懸念が示された。また、提示された強度測定実験も、部材形状の優位性を検証するには至らず、素材の性質を調べたに留まるとの指摘があった。

[08] 南京玉簾式展開構法 ＜入選作品＞

「南京玉すだれ」の部材が連続的にスライドして展開する機構に着目した構法の提案である。紐の代わりに剛性の高い金属製の接合部を用いることで、スライド機構による展開と部材のロックによる形状固定を両立させた点が高く評価された。特に、人が入れるサイズの実証実験を行い、その実現性を示した点は説得力があった。

[10] Balloon Archi

空気膜を軸方向材として使用する「エアチューブ構造」の提案である。空気でトラスを組むというコンセプトの面白さは認められつつも、部材の座屈や局所的なシワによる剛性低下といった構造的な課題についての疑問が残った。また、実現性を検証する上で重要な接合部のディテールが詰められていない点も指摘された。

[11] Re-D.C.

アクティブベンディング構造において、通常は用いられない不安定な二次モードをケーブルで安定化させて利用し、設計の自由度を高める提案である。二次モード特有の S 字状の形態は魅力的だが、その成立性が大きく指摘され、二次モードを用いること自体の合理性が問われた。また、模型が提示されなかったことも、コンセプトの実現性を示す上で大きな課題となった。一方で、魅力的な空間との評価もあり、その形態が持つ可能性も示唆された。

[12] 絡み合うトラス

トラスユニットと膜・ケーブル材を組み合わせた立体構造物の提案である。接合部を締結材とせずに組み立て・解体できる仕組みを取り入れることで、リビルドを可能とする。一方でシステムは既視感があり、リビルドに対する提案内容が弱く感じた。立体構造物に対して接合部を貫通するケーブル部材の納まりやその解決方法に課題が残った。また、提案構造物の形態だとケーブル部材に圧縮力が生じることも指摘されたが詳細検討がなされていないなど疑問が残った。

[13] Re・築土

土・石・石灰・稲穂等を混ぜて整形した版築ユニットを用いて組積造による様々な構造形態を生成する提案である。版築ユニットの材料は敷地内で調達できる材料とし、版築ユニットの力学的特性についてもほかの建築材料との対比により丁寧な検討がなされていた。一方で版築ユニット同士の接合材料の考察がかけていたことや、自重の大きな構造物が地震時には壊れることを想定しているリビルドのストーリーに対して建築として最低限備えるべき安全性や一歩踏み込んだ工夫が欲しかった。

[15] RULIMG　PLAY 単一の円環モジュールを用いた空間の設計 ＜佳作作品＞

扇状の薄板材を凹凸状のフィンガージョイントでつなぐことで、曲面形態を生成する提案である。薄板同士をフィンガージョイントでつなぐことでリビルドさせる計画であり、薄板材の曲率や扇形状を変えることで魅力的な形態が生成される点が評価された。形態ステディが紙にとどまっており、次元解析で導き出した CFRP が最適な材料という点について提案形態が実現できるかどうか疑問が上がった。スケールアップしたモックアップ模型を見てみたいという意見もあり全体的に高い評価を得ながらも惜しくも佳作作品に選定された。

[18] Re:SpiraRise ― 幾何剛性で安定する再構築可能な空間構造 ― ＜入選作品＞

1 本の圧縮材と引張材によるユニットを組み合わせて、スパイラル状の構造形態を生成する提案である。1 本の引張材を引っ張り上げるだけで建築形態が施工できるという点や、幾何剛性をうまく利用して形態の安定性を獲得している点が評価された。一方で、引張材を人力で引っ張って構造物を施工するという点について、提案されたおさまりでは実スケールの材料を想定したときに張力導入がうまくいかないことや円錐形態に添わせて圧縮材の単点を決定していることから建築空間内に構造要素が多く入り込んでおり、構造体と内包される空間の関係性に対してさらなる発展性があるのではないか議論がなされた。

[19] 幾何学的なリズムが折りなす ― 双対な四角形で構成された折り紙展開構造の大屋根 ―

正規・非正規な配置の特異な一般上ミウラ折りを組み合わせてヴォールト状の屋根形状を生成した提案である。各パネルをヒンジ接合とすることで展開施工する方法が提案されていたが、実スケールを想定したときに展開施工することの困難さや面外剛性の確保が難しい点、リビルドという観点から仕上げ材等の考えにまで提案が言及されていない点に課題が残った。

[20] 六方格子構造 ～ 手でつくるつどいの場 ～ ＜入選作品＞

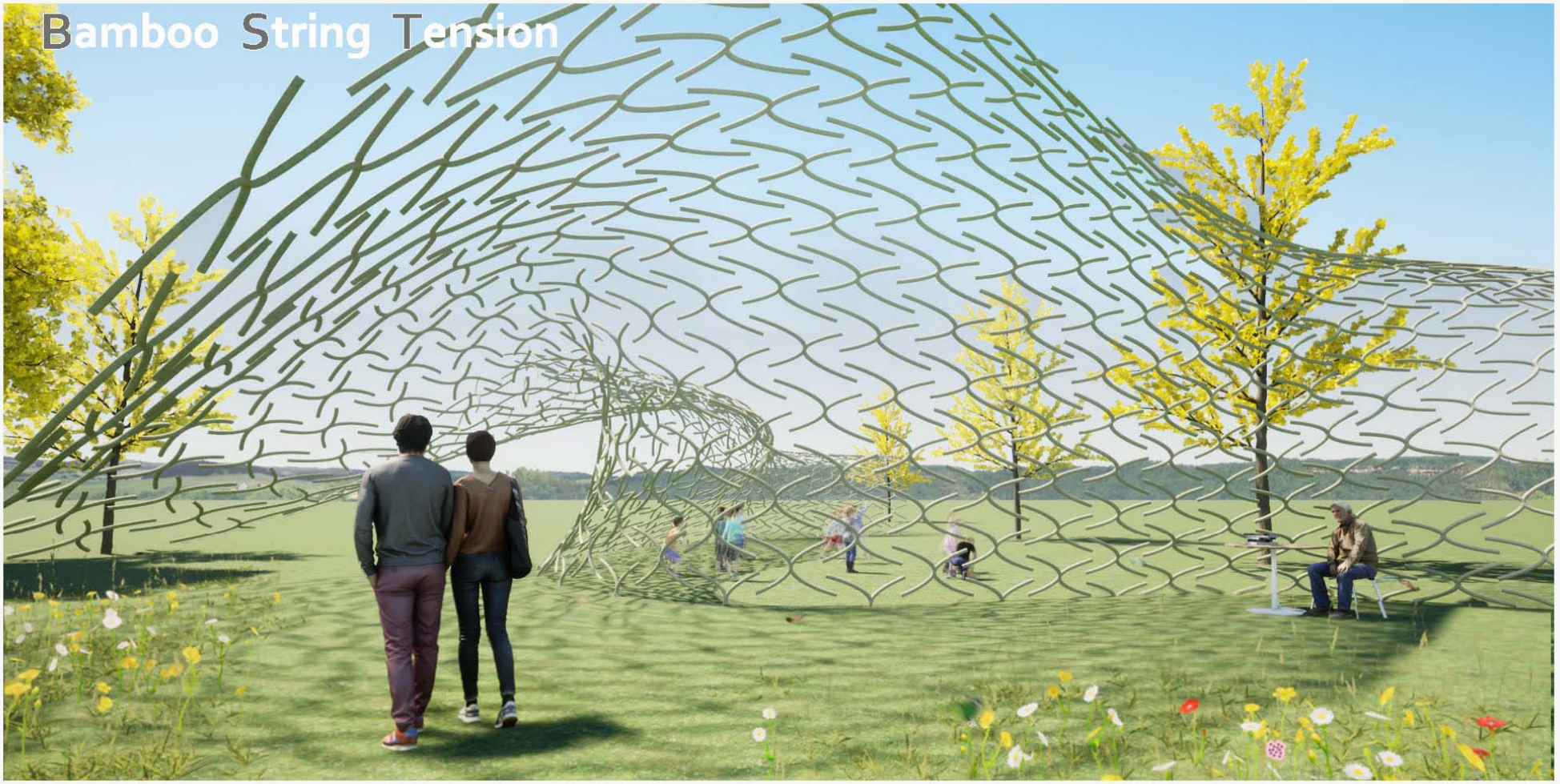
部材を 6 方向から篏合接合させた六方格子を 1 ユニットとする立体格子構造による集いの場の提案である。考え込まれた篏合接合と、応力解析により応力状態の確認を行い実現性の追求を図っている点が評価された。一方で鉛直部材を差し込むことで最後に差し込む鉛直部材が引張抵抗できない点や積層させた際に鉛直部材が芯ずれして積みあがっていく点に構造合理性として改善の余地があることが議論された。篏合された接合部はよく考えられており、上記の課題を克服した接合部のさらなる追求に期待したい案である。

[21] kirigami

特定の形に成形されたパネルの平面的な集合を作り、各パネルの交点にヒンジ機構を与えて剛体変形させることで立体構造物を生成させる提案である。最適化手法を用いたフォームファインディングを行っている点が興味深い。一方で、接合部のねじりを許容しているが実際に想定しているヒンジ機構がねじりに追従できる納まりになっていないことやねじり変形を定量的に評価するためには板材の厚みを考慮した最適化を行うことの必要性が指摘された。

以上

Bamboo String Tension



リビルディングを可能とする形態創生

リビルディングを実現するために、組立・接合・解体が容易にできる仕組みであることが不可欠である。

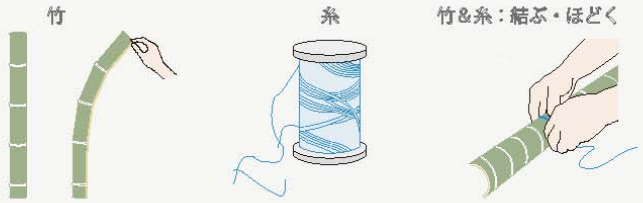
そこで、竹と糸を利用し＂結ぶ＂という誰でもできる簡単な接合方法のみで形態を創生する。

湾曲させた竹の端点同士を糸で結ぶことで、竹の復元力と糸の張力がつり合い、自立したユニットを形成することができる。

ユニットを平面的に拡張させることで形成される片持ち壁を基本の形態とする。その頂部を３次元的に移動させることで、半個室的な場所や開放的なトンネルへと、空間を再構築することが可能である。

構造そのものと、空間との両面において、リビルディング可能な柔軟な提案を行う。

組立・接合・解体が容易にできる仕組み



しなる特性を持つ竹は、靭性が高く、なめらかな湾曲形状を形成できる。さらに、竹の形状を保持するために糸を用いることで、結ぶ・ほどくという簡単な方法で部材同士の接合を行うことが可能となる。

空間の再構築

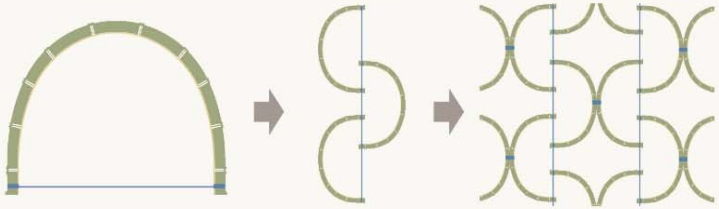


曲げ剛性がほとんど無いという糸の特性により、直立した壁から、そこにいる人々を包み込むような場所まで、多様な空間を構築することが可能である。

3

基本の仕組み

基本形　1ユニット　複数ユニット

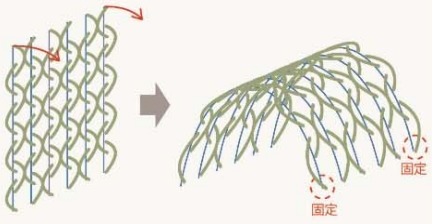


竹をしならせ、端点同士を糸でつなぐ。竹が直線に戻ろうとする復元力が糸の張力とつり合い、基本の曲線を形成する。この曲線を、Bamboo String Tension(BST) 曲線と称す。

BST 曲線を連続させることで一つのユニットが完成する。1 ユニットは糸の張力により、線材として自立する。

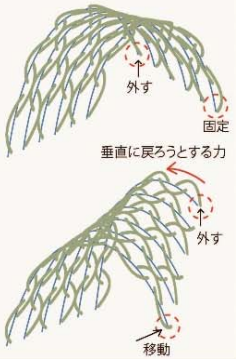
ユニット同士を＂結ぶ＂ことで、強度・剛性が向上し、平面的な壁を構築することができる。平面的に反復する BST 曲線が複数ユニットを構成する。

空間を再構築する仕組み



複数のユニットで構成される面の頂点を移動することで、竹のしなやかさを活かした立体的な空間を創出できる。固定を外すことで、ユニットが垂直に戻ろうとする力で異なる形態に変化し、空間を再構築することが可能である。

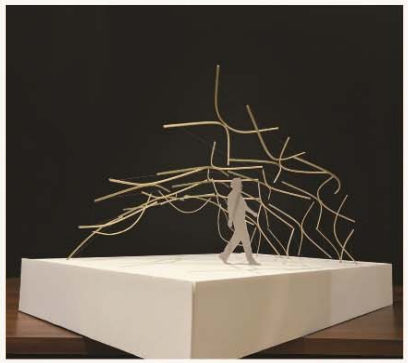
再構築の操作



形態の使い方（模型写真）



ユニットを鉛直に伸ばし、平面とすることで、空間を隔てる壁を作り出す。BST 曲線の軽やかさが壁を越えた交流も可能にしている。

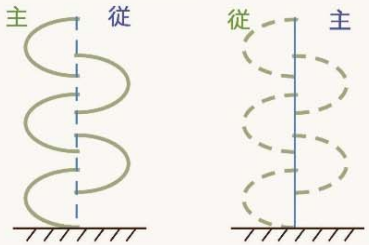


ユニットをアーチ形状に曲げることで、青空を見上げることのできる開放的なトンネルを作り出す。この形状にすることでより安定した構造となる。



ユニットを曲げ、包み込むような形にすることで半個室的な空間を作り出す。この形状では BST 曲線の密度が高まり、プライベートな空間が創出される。

視覚・力学の特徴

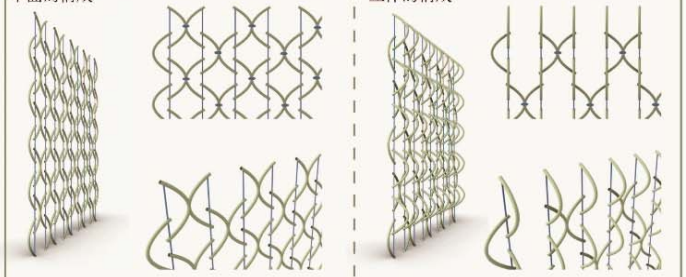


視覚的には太い竹があたかも構造部材かのような印象を受ける。しかし、力学的には糸の張力により自立しており、竹は補助的な役割を果たす。視覚的な印象と力学的な役割の相反する主従関係により、浮遊感が創出される。

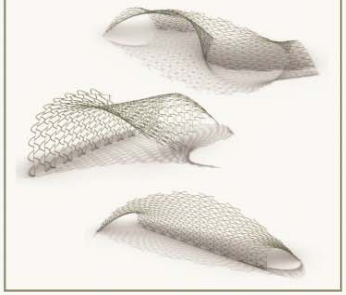
形態のバリエーション

ユニット同士の結合位置を変えることで、立体感のある壁も構築することができる。

平面的構成　立体的構成



ユニット頂点の固定位置を変えることで、形態の幅が広がり新たな空間も構築できる。



BST 曲線の構造

幅 × 厚さ × 長さ：50mm×10mm×1000mm

ヤング係数　E=20000N/mm²

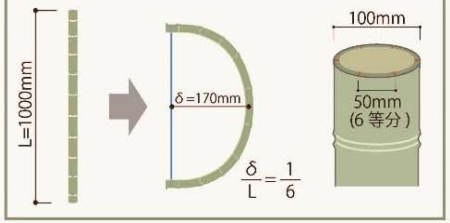
断面積　A=500mm²

断面二次モーメント I=4167mm⁴

荷重 $P=\frac{(\pi^2 EI)}{l^2}\times\alpha=822\times1.5=1250N$

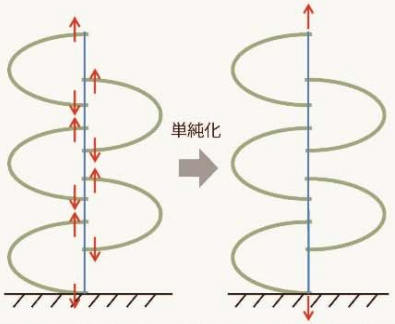
α：補正係数（=1.5）

糸の強度（200 号）：2300N＞1250N



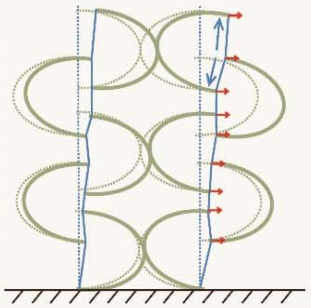
1 ユニットの自己釣合い

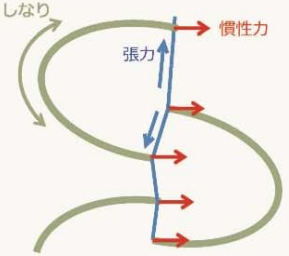
→：竹の復元力により糸に加わる張力



ユニット形成時に改めて BST 曲線を交互に配置することで、糸全体に張力がかかった状態を作り出す。糸の張力を単純化すると両端が引っ張られている状態とみなすことができ、自立した構造が形成される。

水平力への抵抗





地震時には、慣性力により竹と糸の交点に変位が生じ、竹のしなりが増加する。竹のしなりの増加に伴い、復元力が増加し、水平力に抵抗する。

地震力の算出

BST 曲線一本あたり自重：3N

→1 ユニットで 30N(BST 曲線 ×10 本)

地震力 =30N×0.5=15N

地震力 5N/ 張力 1250N= 約 1/80

→地震力による張力の増加は微小

3

ONE MODULE | MULTI MODE

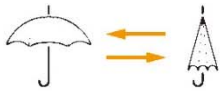
Rebuilding

私たちの目指すリビルディングとは、

○1つのモノを**形態変化させることで多用途に使用可能**であること
⇒既存の枠組みを超え、異なる機能や役割を持つ姿へと変貌を遂げることで、利用する人々の行動を拡大する



○**容易に構築・遍撤が可能**となること
⇒再構築に時間と労力を費やさない形態は、立つ場所を選ばない



着想

私たちの考えるリビルディングのために必要な要素

「様々な方向への可動性能を有すること」、「変形に対して復元性を持つこと」
を満たすものとして**「背骨周りの構造」**から着想を得た

背骨周りは大きく分けて、**背骨、筋肉、体幹**から構成される

背骨 ... 硬い骨と軟骨で構成されていて、
　　直立したり曲がったりする可動性能を持つ
筋肉 ... 背骨の形状を様々に変化させ、背骨の形状を保つ
体幹 ... 外力に対して背骨のバランスをとる



ONE MODULE / MULTI MODE

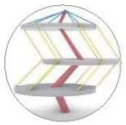
構造は **固定物** から **変身体** へ

私たちはAとBの境界を設計する
同一モジュールが張力の再編で姿を変え、用途は連続的に変化する
作り足さず、捨てず、切り替える
1つのキットが、多様なシーンに多態で寄り添う

背骨と筋肉の構造的特徴、機能性から着想を得た構造材がコンセプトを実現する
　背骨　→　節のある柱
　筋肉　→　柱内を通るワイヤー
　体幹　→　パネルを吊るワイヤー

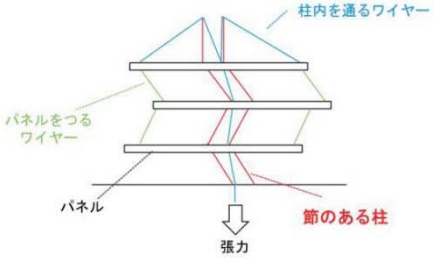
04

構造システム



複数のパネルが空中に浮遊しているように見える機構
この機構は、節のある柱、ワイヤー、パネルから構成される
ワイヤーには、全体のバランスをとるものと各パネルを支えるものの２種類がある。
浮いたパネルに様々な役割を与え、高さ変化と合わせて用途と形状の変化を生み出す

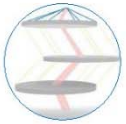
柱脚部で張力を導入することで、柱が立ち上り、自立する。柱の中を通るワイヤーの張力が、形状を決める。
各パネルの自重を伝えるワイヤーが節のある柱の中を通り、パネル自重を地盤まで伝える





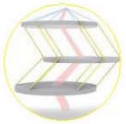
節のある柱

複数の中空部材が、蛇腹状に連なっている
部材端部はピン接合とし、接合部が節となる
折り畳み可能であり、高さが可変となる
これ単体では、バランスをとれず自立不可



柱内を通るワイヤー

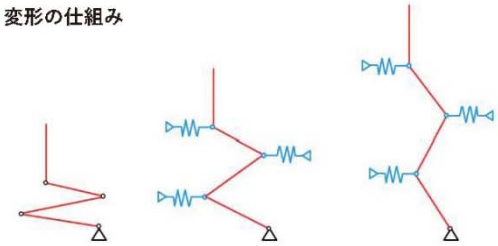
最上部のパネルから地盤面下までつながっている
パネルをバランスよく支えられる本数配置する
まっすぐな形になろうとする復元力を持つため、
柱の水平変位を拘束し自立させる
与える張力の大きさにより、全体形状が決まる
形態全体のバランスをとり、最上段のパネルをつる



パネルをつるワイヤー

各パネルの回転を拘束し、水平を保つ
パネル間のワイヤー長は、柱節点間の長さと同一
パネルの重さを上部のワイヤーへ伝える

変形の仕組み



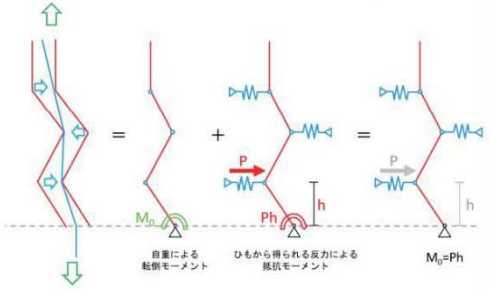
STEP 1
ワイヤーをひくと、
節で柱とワイヤーが接触する

STEP 2
柱の節を水平に押す力（水平バネ）が生じ、
節ごとに柱が立ち上がる

STEP 3
張力を固定すると
高さ・形状が決まる

自立の仕組み

柱単体では柱脚がピン支点であるため、そのままでは転倒する。一方で、ワイヤーと各節の接触による反力（水平バネ）によって、抵抗モーメントが発生する。これが、転倒モーメントを打ち消すことで、この機構は自立する

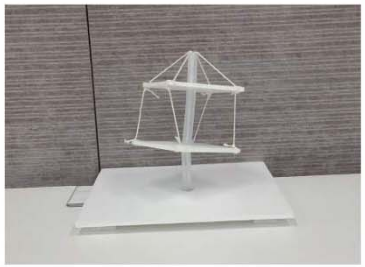


模型による検討

張力なし



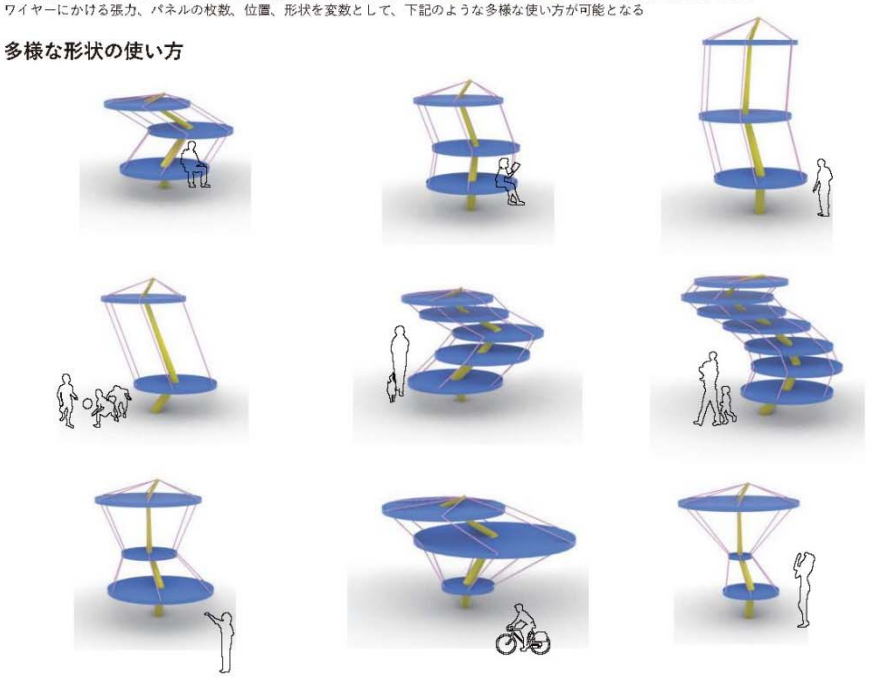
張力あり



Rebuilding

柱内を通るワイヤーにかける張力を増減させることで、柱を水平方向に押す力が変化し、構造体の高さが変化する
その結果、この形態はワイヤーにかける力によって多様に変化し、同様の構造システムを複数の用途で共有することができる
ワイヤーにかける張力、パネルの枚数、位置、形状を変数として、下記のような多様な使い方が可能となる

多様な形状の使い方



CASE STUDY

多様な形状の中から一つの例として、
昼間は太陽光パネルを持つ休憩所、夜間は街灯として機能するような構成を提案する



日差しの強い昼間は、**張力を弱く**設定することで、
形態は低く、幅広くなる
パネルの露出面積が大きくなり、太陽光パネルとしての役割を発揮する

MODE “DAY”

MODE “NIGHT”



太陽が沈む夜間は、**張力を高く**設定し、
形態を高く、まっすぐにする
パネルが中心によることで、
街灯としての機能を発揮する

04

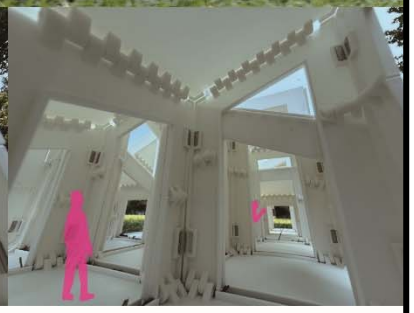
Panta hut units

新たな可動構法によって平坦から立ち上がるユニットは施工と解体が容易で面の堅牢さも併せ持つ。リビルディングにより小屋が姿を変え、屋根と空間が無限に広がる。





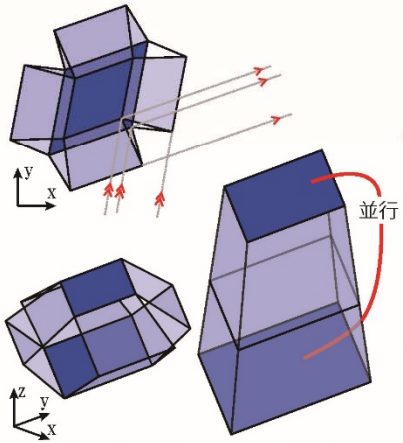




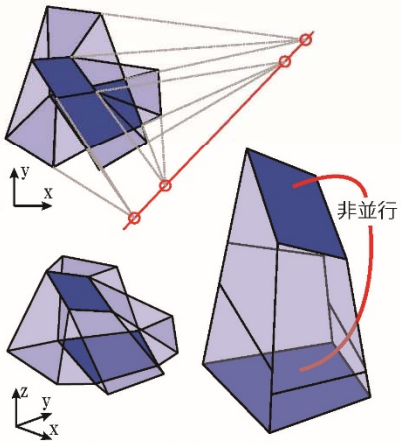
可動構法

可動構法であるパンダドーム構法は、剛体パネルと一軸ヒンジによって運動学的に解かれた機構が用いられている。角錐台を平坦化できるリンク機構であり、２つの底面が平行を保ち変形する。我々は、この機構を拡張し、２つの底面が平行でない多面体でも平坦化できる機構を発見した。 パンタドーム機法 [kawaguchi 1998]





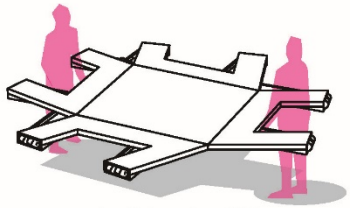
パンタドームの機構



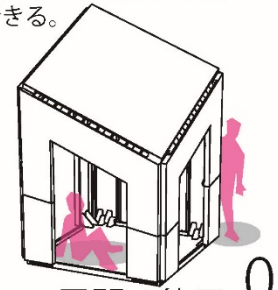
今回新たに発見

Rebuilding × 1DoF

新たに発見した機構をひとつの小屋 (hut) としたユニット建築を提案する。１自由度で変形するため、使用・撤収時の組み立て・解体が容易であり、組み立てによる施工誤差や間違いを排除できる。収納運搬時は平坦になり、かさばらない。



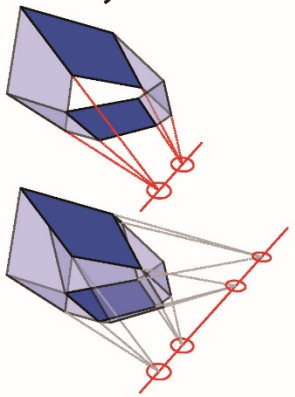
収納 / 運搬



展開 / 使用

05

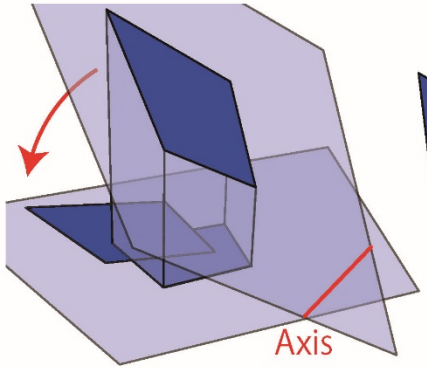
Develop Assembly of 6R Link



6つの一軸ヒンジで構成されるリンク機構 - 二重球面リンク - は3つのヒンジの回転軸が2点で交わり成立する。パンタドーム構法の機構を、「複数の二重球面リンクの組合わせ」と解釈することで拡張した。

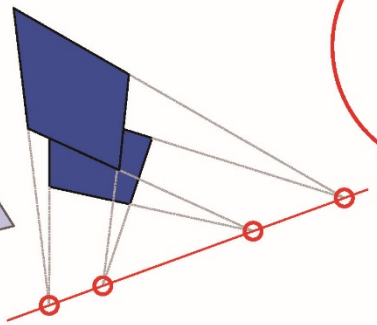
Design flow

1. Rotate



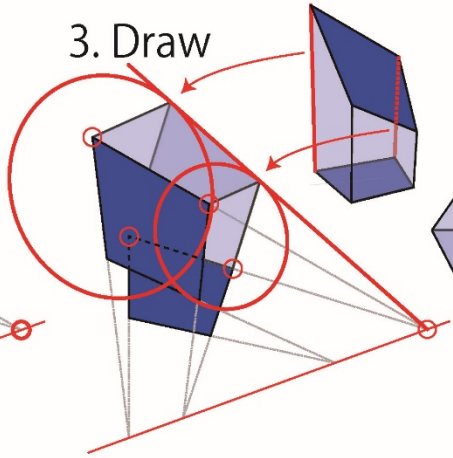
目的形状となる切頭角錐台を入力する。2つの底面を上面と下面、それらをつなぐ面を側面と呼ぶ。上面と下面が平行でないとき2つの面は直線で交わる。この直線を軸に、上面を下面と同一平面まで回転させる。

2. Extend



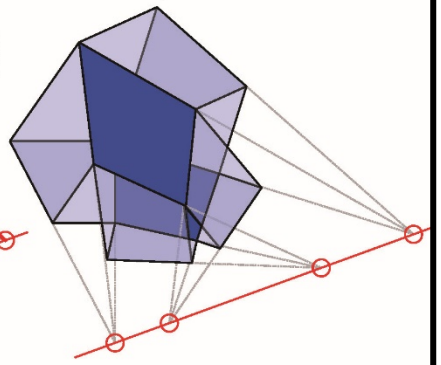
各面の辺を延長する。この時、上面を回転させた回転軸で、対応する延長線同士が一点で交わる。
この点が、二重球面リンク機構におけるヒンジの交点と対応する。

3. Draw



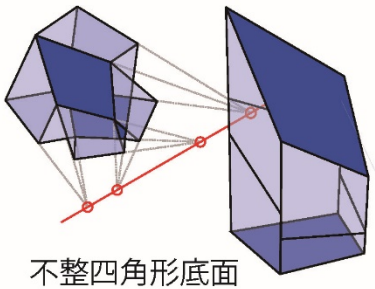
各面の対応する頂点を焦点とした楕円を作図する。楕円の軸長さは、側面の形状によって決まる。次に回転軸上の交点から2つの楕円に共通接線が引ける。2つの接点を結ぶ線分が側面のヒンジとなる。

4. Repeat

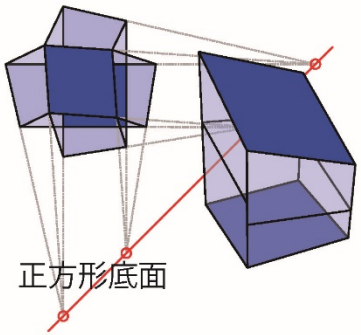


前項の作図を繰り返すとリンク機構の展開図が得られる。
作図のみで設計が行えるため、計算負荷が小さく、どんな形態でも短時間で設計できる。

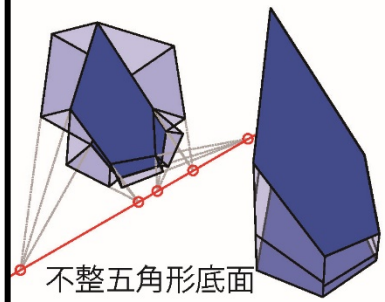
Variation - hut unit



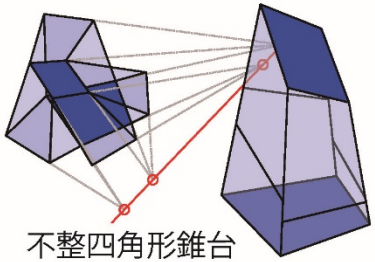
不整四角形底面



正方形底面



不整五角形底面



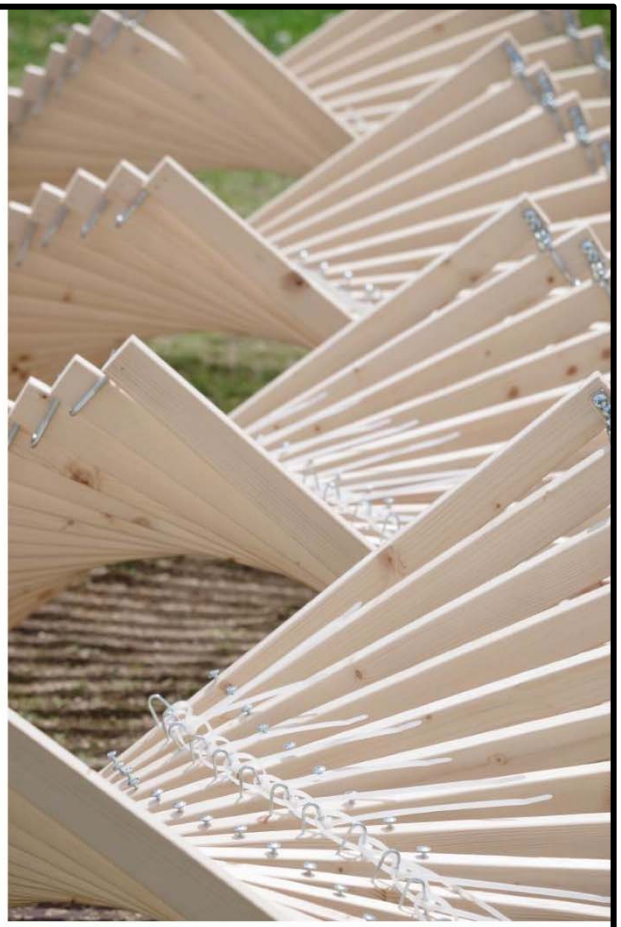
不整四角形錐台

Variation - Assembly Pattern

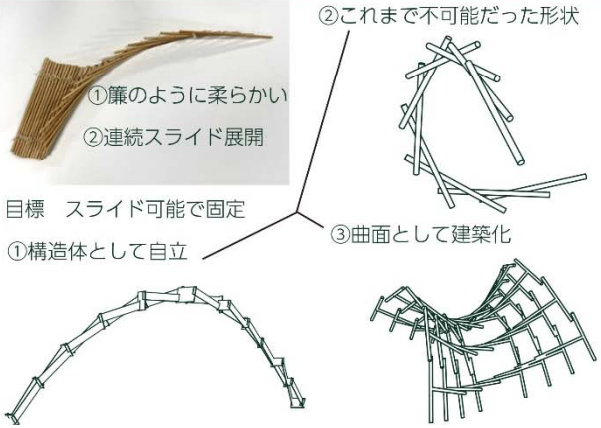


南京玉簾式展開構法





南京玉簾の建築化



展開施工

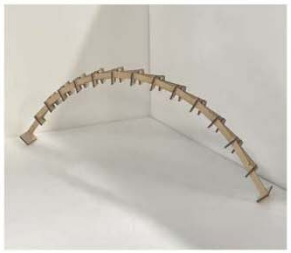


南京玉簾は簾から曲線に展開する大道芸の小道具である。南京玉簾は建築分野において構造デザインなどとして応用されているが、形状の美しさに加え、展開機構も類をみないほど特徴的である。。南京玉簾は①簾ように柔らかく形状が変化する、②曲線形状に瞬時にスライドして曲線形状に展開するという二つの性質がある。ここで①の変形を意図したかたちで固定しスライドのみ可能にすれば、曲線の展開構造物を設計可能である。今回は建築的視点とコンピューターショナル視点から南京玉簾を見直し、スライド機構のみによって開く新しい展開構造を考案した加えて複数本を同時に展開すれば曲面も制作することができる。今回は曲線や曲面に関して模型による展開性の確認を行い、人が入れるサイズのパビリオンの設計および展開施工の可能性に関して実証実験を行った。

08

バリエーション

開曲線

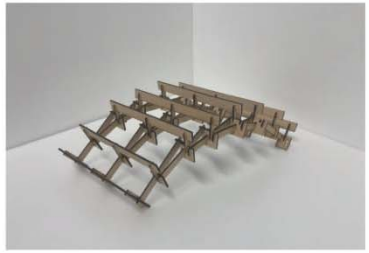


閉曲線





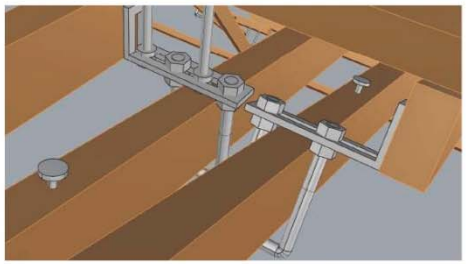

曲面



接合を紐から巻き付く剛体へ

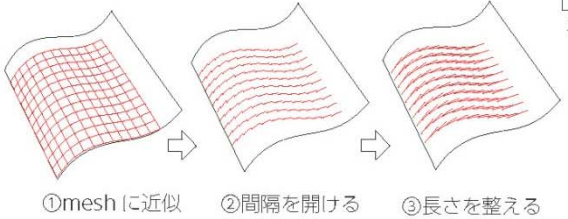
スライド可能なまま簾の動きを制限するために
接合部を巻き付く穴のある剛体に変更する。

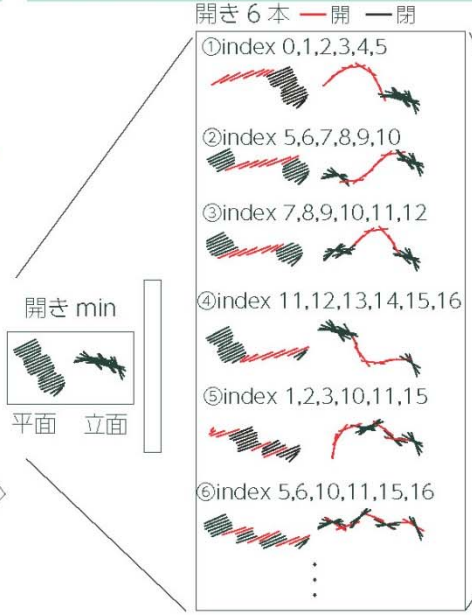
目標形状になる南京玉簾のモデリング

①曲線および曲線を接線や四角形メッシュに近似
②展開時干渉のないように、①を間隔の開いた配置に最適化
③連続して展開できる部材長さに調整





多様な展開過程と敷地適応性



スライドの動きが一本ずつ独立しているため
開き方がいくつもある。





これにより 1 つの展開構造から
様々な形態に展開できるため、
敷地条件や目的に適応し、持続的に
使い続けることができる。

08



Re:SpiraRise -幾何剛性で安定する再構築可能な空間構造-

01. リビルディングの解釈

■ 1-1. モノ・コトからリビルディングを考える

リビルディングストラクチャーに求められる要件とは、汎用性の高いユニットや自由度の高いジョイントといった**モノ**、移動・展開が容易に可能とする**コト**の２つの視点から考えられるのではないか。



■ 1-2. 提案するリビルディング

そこで我々は、**すべて同一長さの圧縮材としての棒**と**引張材としての紐**という簡易な部材を組み合わせ、人の手で立ち上げられる構造体を提案する。



02. リビルディングストラクチャーの仕組み

■ 2-1. 設置

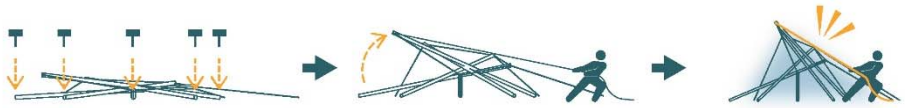
組み上げたい用途に合わせ、必要な部材数や高さ等を決定し、各部材脚部を地面に固定。

■ 2-2. 組立

各棒の頂部に通した紐を人の手で引張り頂点間を絞ることで、構造体を簡易に立ち上げることが可能。

■ 2-3. 空間

同一の部材でありながら、部材数や立ち上げ高さを調整することで、各々が求める空間を容易に創出できる。



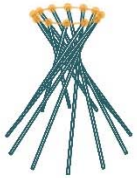
18

03. 形状

■ 3-1. HP シェルからの着想

- 線要素から曲面の形成が可能。
- 頂部（●）を円で結ぶ必要あり。

⇒ 形の自由度が低い。
（筒状・対称）



■ 3-2. 提案

- 圧縮材の頂部（●）を円錐表面上に螺旋配置。
- 同一長さの圧縮材・引張材で構成。

⇒ 棒の重なりが少なく、
形の自由度が高いため、
リビルディングに適する。



■ 3-3. パラメーター

- 形状の決定に必要なパラメーターのうち、影響度の高い３つを紹介する。
  - ・本数
  - ・高さ
  - ・回転

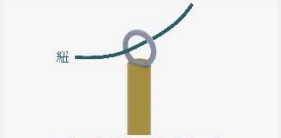


04. 接合部

棒の頂部と脚部は簡易な接合方法にするため、リング形状とする。

■ 4-1. 頂部

- 頂部のリングは紐を通すために利用する。
- 紐は一回転させてリングに通す。



＜そのまま紐を通す場合　△＞
・展開するときの可動性が高い。
・紐の張力が棒に伝わらず、**不安定。**

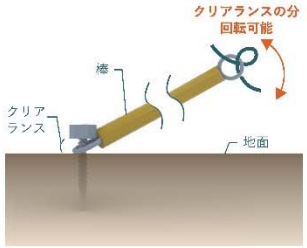


＜一回転させて紐を通す場合　◎＞
・紐の張力が小さいとき、可動性が高い。
・紐の張力が大きくなるにつれ、紐と棒が固定され、
摩擦力により張力を棒へと伝達できる。

■ 4-2. 脚部

- 脚部のリングは棒を地面に固定するために利用する。
- リング内に支持用のスクリュー型のペグを通す。ペグ端部と地面の間にクリアランスを設ける。

⇒ **組立時の棒の回転を許容した、**
フレキシブルなジョイントとなる。



05. 構造的安定性

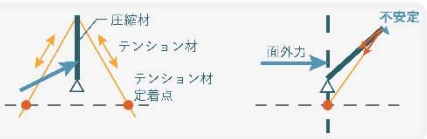
幾何剛性（＝変形により生じる剛性）を利用。

■ 5-1. メカニズム

- 圧縮材１本＋テンション材２本で三角形を構成。

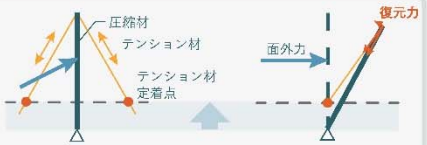
① テンション材定着点（●）が
圧縮材支持点（△）より**低い場合**

⇒ **不安定**



② テンション材定着点（●）が
圧縮材支持点（△）より**高い場合**

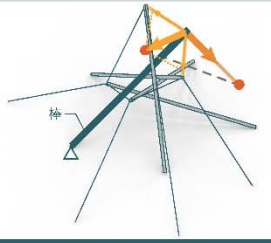
⇒ **面外力が働いてもテンション材の引張力の分力が復元力となり抵抗可能。**



■ 5-2. 利用

- 組立に際して、各紐には初期張力が導入されている。
- 提案構造において、テンション材の定着点は必ず支持点より高い位置となる。

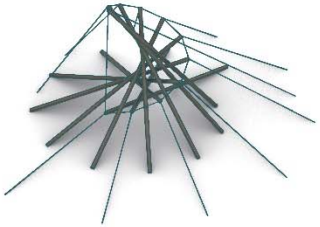
⇒ **安定した架構を実現する。**



① モニュメント

各パラメーター設定を調整しバランスの良いシルエットとすることで、往来する人々が親しみを抱きやすい形態を創成する。

本数　11
高さ　3375
回転　1.0

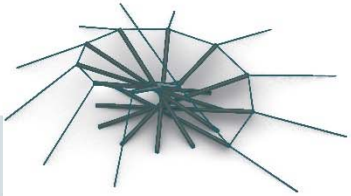




② 休憩所

棒頂部の最高点・最低点の差が大きくなるよう設定することで、内部空間と外部空間の両方を利用可能な構成とする。

本数　11
高さ　2925
回転　1.0

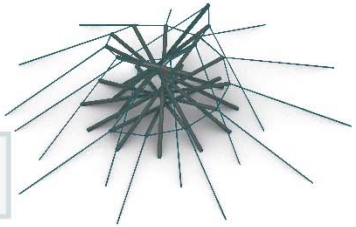




③ 滑り台

本数、回転を他の用途に比べ大きな数値として設定することにより、上昇感のある棒の形態と、多様な角度を持ったテンション材配置とした。

本数　17
高さ　3100
回転　1.5

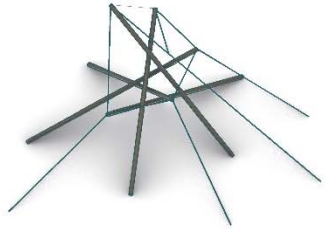




④ テント

使用する本数を少量とすることで浮遊感のある形態とともに組み立て時の省力化を可能とする。

本数　5
高さ　3650
回転　1.0



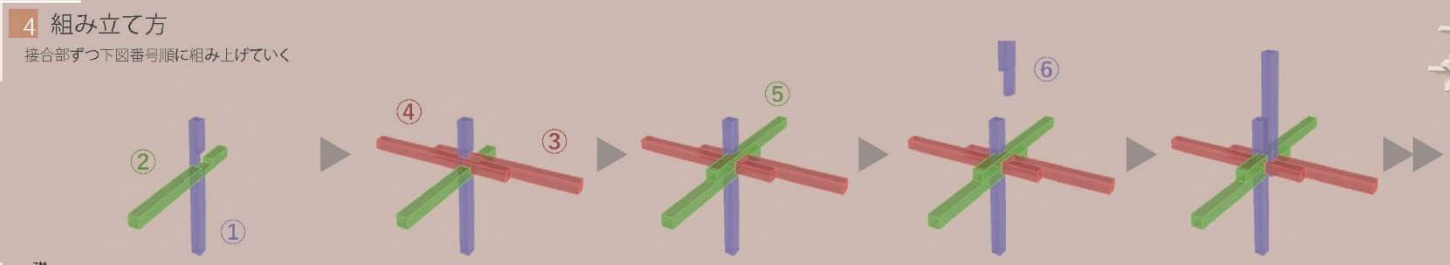


18


六方格子構造
～手でつくるつどいの場～
3 六方格子構造
接合部の形状について
三方格子　1つの部材に複数の接合箇所
→接合箇所ごとに切欠きが必要
→想定した形以外は作れない
三方格子
接合部単位で分割する
六方格子
接合部間を1部材とする
六方格子　1つの部材に2つの接合箇所
→6部材を接合しユニットを形成可能
→どんな形でもつくることができる
部材の構成について
六方格子　部材角dに対し、切欠きは2d×1/2d
X,Y軸部材（水平部材）
×4
Z軸部材（鉛直部材）
×2
30mm角（ヒノキ）
六方格子構造のメリット
●ユニット化できる
●部材種類を最小限にできる
●1部材の単純化、軽量化ができる
●同じ部材を用いて異なる形態を再構築可能
●1部材が短く、軽いので、解体・運搬が容易
●接合部に釘や金物を用いない
●手作業だけで組み上げられる
1「リビルディング」の解釈
場所を変え、形を変え、何度でも簡単に構築でき、
被災地で復興のシンボルとなりうるような、
「リビルディング」可能な構造形態を提案
構築
みんなで構築できる
解体・運搬
解体しやすく、運びやすい部材
解体・運搬
構築
別の場所でどんな形でも
構築できる
2 部材を現地で協力して組み立て、つどいの場を構築
造形の自由度を活かした六方格子構造を用いて、ベンチで休憩したり、棚で物資をやり取りできる災害時のつどいの場を生み出す
交流
支援
災害の場に必要な2つの機能
機能を「繋ぐ」
外部から「引き込む」
20

4 組み立て方

接合部ずつ下図番号順に組み上げていく



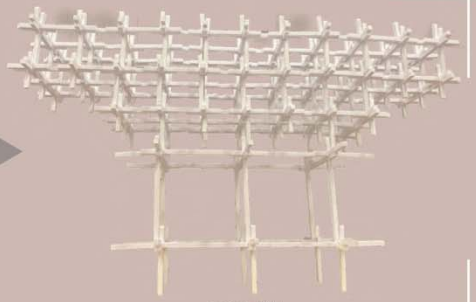
切欠き部で交差するように
2部材を直交させる

X軸の2部材を
Y軸部材の切欠き部にはめ込む

Y軸部材をX軸の2部材にはめ込み
スライドしてZ軸部材の切欠き部にはめ込む

形状の異なるZ軸部材を
X軸部材の切欠き部に上から差し込む

1ユニット完成

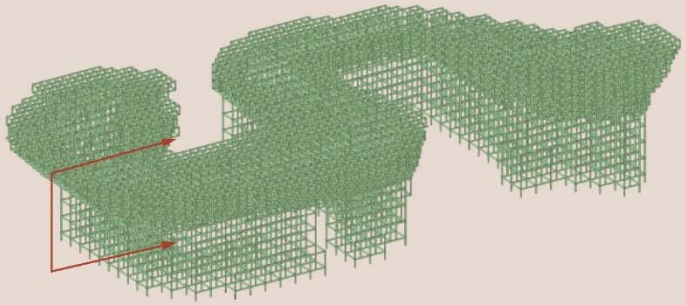


スタディ模型

5 構造検討

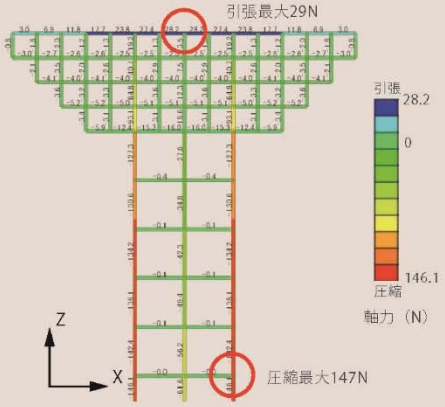
差し込み部材（鉛直部材）引抜の検討

- 架構をモデル化し、長期荷重に対する応力を解析
- 解析プログラムはMIDASを使用
- 解析条件
  - ・差し込み部材のZ軸引抜方向の境界条件を固定度0.1
  - ・相欠き部材の嵌合部の固定度1

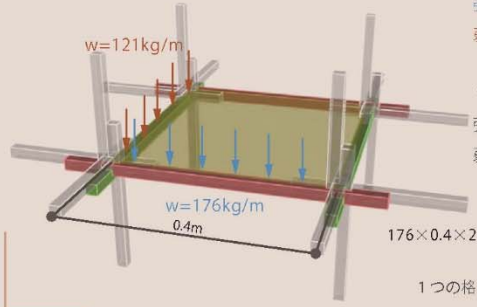


●解析結果

長期荷重時では、鉛直部材には圧縮力しか作用せず
差し込み部材が引き抜かれないことを確認



1つの格子が負担できる荷重の検討(ベンチや棚)



強軸方向　176 kg/m
弱軸方向　121 kg/m

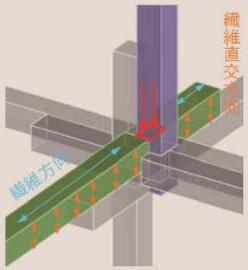
1つの格子:
強軸方向2部材
弱軸方向2部材で負担

176×0.4×2+121×0.4×2=237.6kg

▼

1つの格子で約200kg負担可能

鉛直荷重による繊維直交方向のめり込み検討



材：ヒノキ　Fcv=7.8(N/mm²)

Nmax=Ae×fcv(=1.1/3×Fcv)
=30×15×1.1/3×7.8
=1,287N

Nmax - 自重=1,140N

▼

1接合部に対して、
自重を除き約115kg負担可能

6 異なる組み方　～ねじれベンチ～

互い違い部材による形態

部材の切欠き方向を変えるだけで、1段ずつずれていく形をつくることができる
→つなぐ箇所が剛性に寄与するだけでなく、カウンターやベンチ、屋根として機能

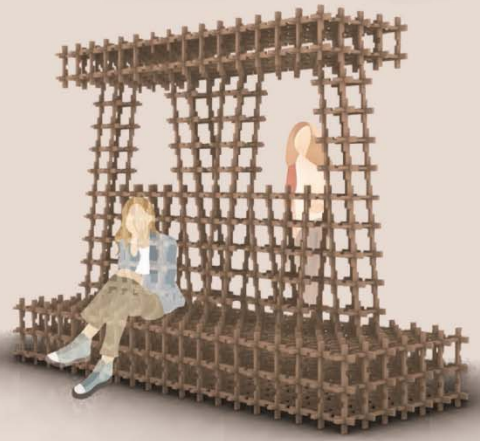
1 Z軸部材を互い違いにする



2 1段ごとに部材幅ずつずれていき
だんだんと傾いていく



3 互いに1/2スパンずつずれたところでつなぐ

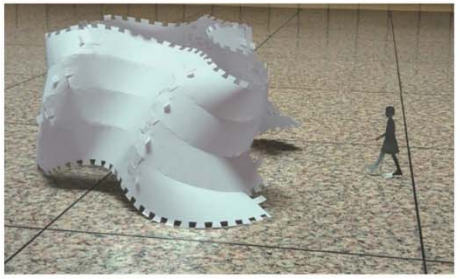


RULING PLAY

単一の円環モジュールを用いた空間の設計







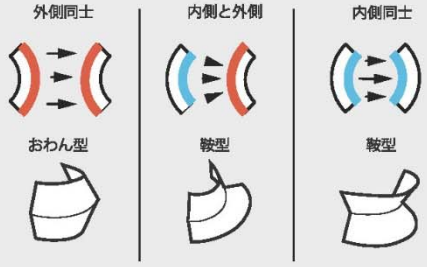


部材や空間のモジュール化は Rebuilding 可能な建築手法として幅広く応用されているが、生まれる形態はグリッドなどの単調なものにとどまったきた。
私たちは、円環から切り出した一種類の部材による形態創生手法を提案する。この手法は組み合わせによって、面の Ruling（曲がり方）が変化し、多様な形が立ち現れる。
スケールだけでなく空間の表情が連続的に変化する本作品は場所の条件や社会の変化に応じて建築の新たな「使われ方、建て方、再利用の仕方」を持続的に生み出し、
未来の建築の在り方を提案するプロジェクトである。

PRINCIPLE

先行研究で円環状の紙帯の内側と外側の円弧をつなぎ合わせると負曲率が生まれ、連続させることで擬球面を作ることが分かった。
このプロジェクトでは先行研究を踏襲し、円環の一部を基本単位として採用することで、様々な形の紙帯を作成した。紙帯のつなげ合わせ方を変化させることで多様な曲面が立ち上がる。

①円環の紙の円弧同士を貼り合わせると、
組み合わせ方によって、おわん形やくら型の立体形状が生まれる。



②円環を切り出した扇形を連ねて帯をつくり、帯同士を貼り合わせる。
円弧は「内側同士」「外側同士」「内側と外側」の３パターンの
いずれかで接続され、異なる曲率が生まれる。



③紙は滑らかに変形しながら曲率の異なる部分を
滑らかにつなぎ、独特な立体曲面が立ち現れる。



15

DESIGN VARIATION

円弧のユニットは円周方向と半径方向に拡張でき、様々なスケールの建築物に応用可能である。
同一のパーツのつなぎ方を変更することで、面のガウス曲率が変化し、全く表情の異なる曲面が立ち上がる。閉鎖的な空間から、分節された開放的な空間、ユニークな形の遊具までそれぞれの条件に合った空間を提供する。



ひらひら



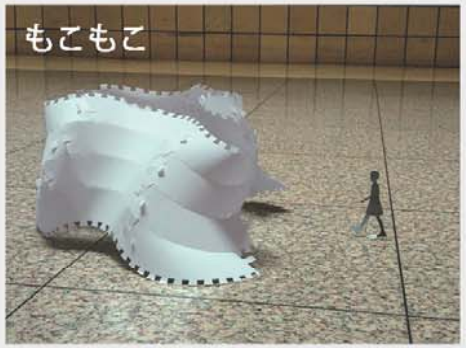


内と外をつなぐ

円弧の内側と外側を連続して貼り合わせることで一定負曲率曲面ができる。端部はひらひらと面が立ち上がり３つの大きな開口部を形成する。

参照：山崎内晴，則武尊太，鎮和宏 (2025). 円環型の紙片による負曲率曲面の形成 [学会発表]. 第 38 回折り紙の科学・数学・教育研究集会，日本折紙学会，

もこもこ

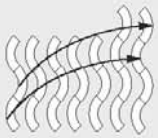




波打つ帯をつなげてできる形。正曲率と負曲率の曲面が連続する部分で、緩やかな頂点が生まれ三角形の平面が形作られる。面が垂直に立ち上がることでできる囲まれた休憩所。

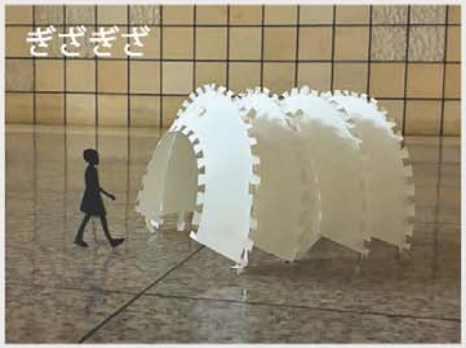
ぐるんぐるん





波状の紙帯を振じって円環状につなげることで、巻貝のような螺旋の形が表れる。中に入って遊ぶことのできる遊具。

ぎざぎざ





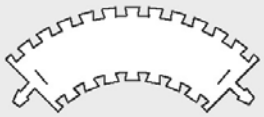
半円のパーツを作り、円環の内側同士、外側同士をつなぎ合わせると蛇腹状の構造物が出来る。折りたたみ可能な、仮設建築物に応用可能である。

DETAIL

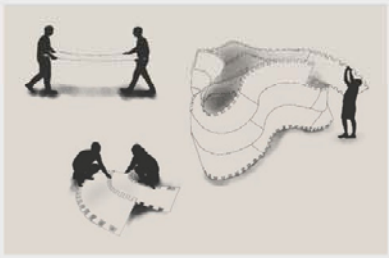
パーツの接合にはフィンガージョイント状の切り欠きを採用した。円環の内側と外側で切り欠きの大きさを同じにすることで、多様な組み合わせを可能にしている。簡単に解体、再利用が出来、必要な場所で必要な形に素早く建て直すことが出来る。



内側の円弧と外側の円弧を同じ長さで分割



円弧をオフセットして、ジョイントを作る。
材料に合わせて角度やオフセット距離を調整



部材を組み立てるイメージ図

STRUCTURAL ANALYSIS

模型を実寸大のスケールに拡大すること想定し、次元解析を用いて材料について考える。崩壊モードを知るために、コピー用紙を用いて模型を作成したところ、模型は座屈で崩壊した。

そこで、次元解析では下に示す座屈荷重と自重に関する物理量を対象とする。



座屈によって模型が壊れる様子

自重に関する物理量
► 密度：ρ、表面積：A、重力加速度：g

幾何学形状に関わる物理量
► 厚さ：t、長さ：l

材料の硬さに関する物理量
► ヤング率：E

パッキンガムのπの定理を用いると、下の３つの無次元積が得られる。このうちπ１からπ2はプロポーションを保ったまま拡大するため変化しない。π3 の式からから密度とヤング率に由来する無次元量が、模型≧実寸の制作物であれば建築物が成立することが分かった。

次元を分析するためのマトリックス

	ρ	g	A	t	E	l
l(長さ)	-3	1	2	1	-1	1
M(質量)	1	0	0	0	1	0
T(時間)	0	-2	0	0	-2	0

次元解析によって得られる３つの無次元積

$$\pi_1 = Al^2, \quad \pi_2 = l/t, \quad \pi_3 = \rho g t/E$$

ケント紙を用いた実寸の 10 分の１スケールで模型を作成し、自立することを確認出来た。このことから、ケント紙のヤング率と密度を測定し既存の材料と比較を行った。
検証の結果、厚さ２ミリ程度の CFRP の板が適切であることが分かった。

物性値比較表

材料	ケント紙（模型材料）	ポリエチレン	CFRP	塩化ビニル
厚さ(mm)	0.17	2	2	2
ヤング率(MPa)	1837	1070	230000	3100
密度(g/cm^3)	0.92	0.95	1.93	1.4
ρ*t/E	0.00009	0.00178	0.00002	0.0009

参考文献：
・坪井義勝ほか，『力学、素材、構造デザイン』，株式会社建築技術，2012 年 1 月，41 ページ ~44 ページ
・CFRP の物性，株式会社 super resin，https://www.super-resin.co.jp/cfrp/properties/, 2025 年 8 月アクセス
・高密度ポリエチレンの物性，KDA Coperation，https://www.kda1969.com/materials/pla_mate_pe2.htm, 2025 年 8 月アクセス
・塩化ビニル物性，モノタロウ，https://www.monotaro.com/g/00280749/, 2025 年 8 月アクセス

15

第 20 回コロキウム構造形態の解析と創生 2025

2025 年 10 月

編　集

著作人　一般社団法人 日 本 建 築 学 会

〒108-8414 東京都港区芝 5 丁目 26 番 20 号

TEL 03-3456-2051

FAX 03-3456-2058

https://www.aij.or.jp